RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA: TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

Teorema del seno

En un triángulo *ABC*, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

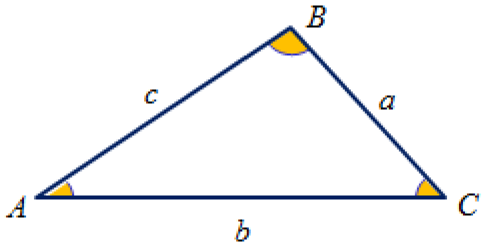
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Resolución de un triángulo cualquiera

Para resolver un triángulo cualquiera se utilizan las siguientes relaciones:

1. Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.
2. El teorema del seno.
3. El teorema del coseno.

Pueden plantearse los siguientes casos.



<u>Caso I: Se conocen dos ángulos y un lado.</u>

Por ejemplo, se conocen los ángulos *A*, *B* y el lado *a*.

El ángulo *C* se encuentra aplicando *A* + *B* + *C* = 180º.

Los lados *b* y *c*, despejando en: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

Ejemplo:

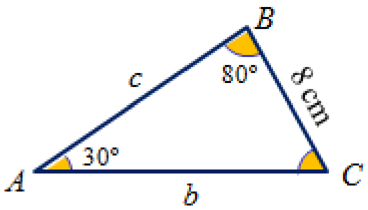
Del triángulo *ABC* se conocen *A* = 30º, *B* = 80º y *a* = 8 cm. Halla el ángulo *C* y los lados *b* y *c*.

→ El ángulo *C* = 180º – 30º – 80º = 70º.

→ Por el teorema del seno:

$$\frac{8}{\sin 30^o}=\frac{b}{\sin 80^o}=\frac{c}{\sin 70^o}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b=\frac{8\cdot\sin 80^o}{\sin 30^o}=15,76\ \text{cm};\ \ b=\frac{8\cdot\sin 70^o}{\sin 30^o}=15,04\ \text{cm}.$$



<u>Caso II: Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.</u>

Por ejemplo, se conocen los lados *b*, *c* y el ángulo *A*.

El problema tiene siempre solución única.

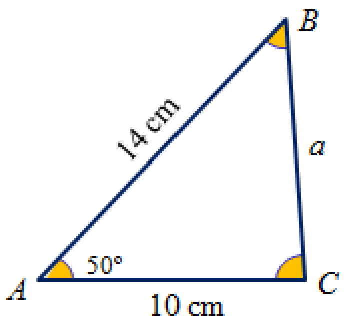
El lado *a* se encuentra aplicando $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

El ángulo *B*, despejando en: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

El ángulo *C* se encuentra aplicando *A* + *B* + *C* = 180º.

Ejemplo:

Del triángulo *ABC* se conocen *b* = 10 cm, *c* = 14 cm y *A* = 50º. Halla el lado *a* y los ángulos *B* y *C*.



→ Lado *a*: $a^2=10^2+14^2-2\cdot 10\cdot 14\cos 50^o=116,02$ ⇒ *a* = 10,77 cm.

→ Ángulo *B*: $\dfrac{10,77}{\sin 50^{\circ}} = \dfrac{10}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \dfrac{10 \cdot \sin 50^{\circ}}{10,77} = 0,7113 \Rightarrow B = 45,34^{\circ}$.

→ Ángulo *C*: $C = 180^{\circ} - 50^{\circ} - 45,34^{\circ} = 84,66^{\circ}$.

<u>Caso III: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.</u>
Por ejemplo, se conocen los lados *a*, *b* y el ángulo *A*.
El problema puede tener dos soluciones, una o ninguna.

Para resolverlo se comienza aplicando el teorema del seno: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

→ El ángulo *B* puede tomar dos valores ⇒ *C* tomará otros dos valores: $C = 180^{\circ} - A - B \Rightarrow$ los valores de *c* también serán dos. (Conviene hacer un dibujo para la discusión del este problema).

Ejemplos:

a) Del triángulo *ABC* se conocen $a = 9$ cm, $b = 7$ cm y $A = 45^{\circ}$. Halla el lado *c* y los ángulos *B* y *C*.

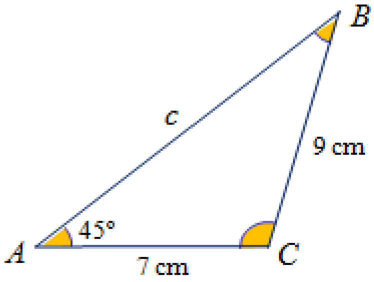
→ Ángulo *B*:

$$\frac{9}{\sin 45^{\circ}} = \frac{7}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{7 \cdot \sin 45^{\circ}}{9} = 0,55 \Rightarrow B = 33,37^{\circ}$$

→ Ángulo *C*: $C = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 33,37^{\circ} = 101,63^{\circ}$.

→ Lado *c*:

$$c^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos 101,63^{\circ} = 155,4 \Rightarrow c = 12,47 \text{ cm.}$$



b) Del triángulo *ABC* se conocen $a = 5,5$ cm, $b = 7$ cm y $A = 45^{\circ}$.
Halla el lado *c* y los ángulos *B* y *C*. (Observa que sólo se ha cambiado el valor del lado *a* del ejemplo a).

→ Ángulo *B*:

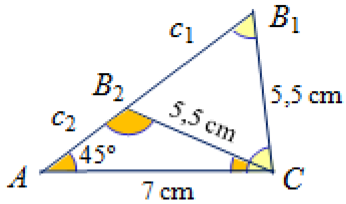
$$\frac{5,5}{\sin 45^{\circ}} = \frac{7}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{7 \cdot \sin 45^{\circ}}{5,5} = 0,90 \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 66,16^{\circ} \\ B_2 = 115,84^{\circ} \end{cases}$$

→ Ángulo *C*: $C_1 = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 66,16^{\circ} = 68,84$; $C_2 = 19,16^{\circ}$.

→ Lado *c*:

$$c_1^{\,2} = 5,5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5,5 \cdot 7 \cdot \cos 68,84^{\circ} = 51,46 \Rightarrow c_1 = 7,17 \text{ cm.}$$

$$c_2^{\,2} = 5,5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5,5 \cdot 7 \cdot \cos 19,16^{\circ} = 6,52 \Rightarrow c_2 = 2,55 \text{ cm.}$$



<u>Caso IV: Se conocen los tres lados.</u>
El problema tiene solución única siempre que cada uno de los lados sea menor que la suma de los otros dos.
La solución se consigue aplicando el teorema del coseno, para despejar cualquier ángulo; después puede aplicarse el teorema del seno.

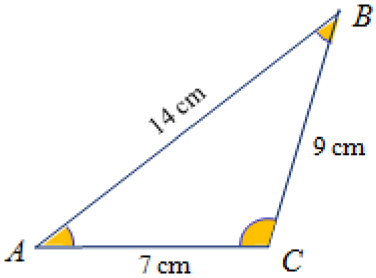
Ejemplos:

Del triángulo *ABC* se conocen $a = 9$ cm, $b = 7$ cm y $c = 14$ cm.
Halla sus ángulos.

→ Ángulo *A*:

$$9^2 = 7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cos A \Rightarrow 81 - 49 - 196 = -196 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{164}{196} = 0,8367 \Rightarrow A = 33,21^{\circ}.$$



→ Ángulos *B* y *C*: $7^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cos B \Rightarrow B = 25,20^{\circ} \Rightarrow C = 121,59^{\circ}$.

Pequeños retos

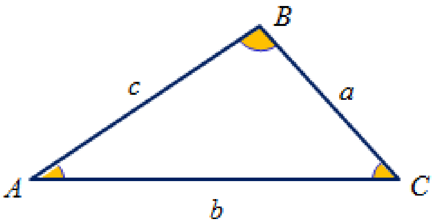
Resuelve los siguientes triángulos:

a) Sabiendo que A = 40º, a = 8 y b = 10 cm, halla c, B y C.

b) Sabiendo que A = 20º; B = 100º y c = 15 cm, halla a, b y C.

c) Sabiendo que a = 8 cm, c = 12 cm y B = 60º, hallar b, A y C.

d) Sabiendo que a = 8 cm, b = 10 cm y c = 12, hallar A, B y C.



Solución:

a) Dos soluciones:

1) B_1 = 53,46º; C_1 = 86,54º; c_1 = 12,42 cm. 2) B_2 = 126,54º ; C_2 = 13,46º; c_2 = 2,9 cm.

b) C = 60º; a = 4,74 cm; b = 13,65 cm.

c) b = 10,58 cm; A = 40,9º; C = 79,1º.

d) A = 41,41º; B = 55,77º; C = 82,82º.