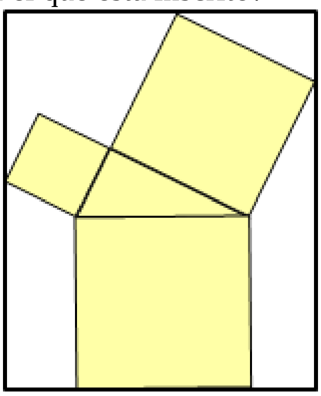
COCIENTE DE ÁREAS

LI Olimpiada Matemática Española (Fase Local)

El problema que se plantea a continuación no sencillo. Tampoco es difícil, pero hay que realizar un par de procesos que no son inmediatos.
Inicialmente hay que tener una “idea”; a continuación hay que descubrir triángulos semejantes; y, por último, hacer algunos cálculos…
Para resolverlo necesitas saber:
1) Los teoremas de Pitágoras y de Tales, y aplicarlos a la situación.
2) Manejar relaciones de proporcionalidad.
3) Operar con radicales.

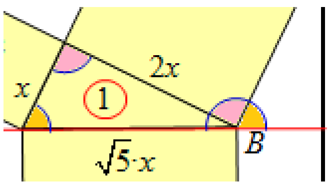
Problema

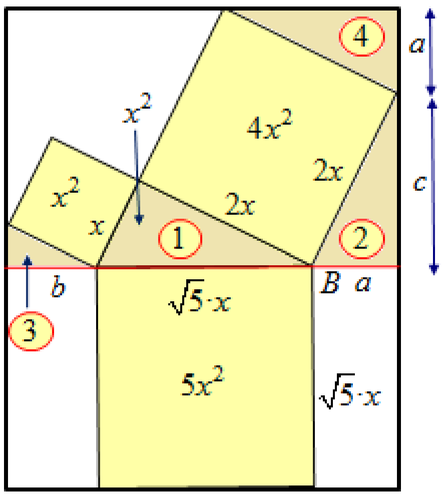
Sobre los lados de un triángulo rectángulo, de catetos uno doble que el otro, dibujamos cuadrados hacia fuera, como se muestra en la figura. El polígono obtenido lo inscribimos en un rectángulo como puede observarse en la citada figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del polígono sombreado y el área del rectángulo en el que está inscrito?



Solución:

Si la hipotenusa del triángulo se prolonga hasta cortar a dos de los lados del rectágulo se obtiene cuatro triángulos rectángulos (numerados como 1, 2, 3 y 4), todos ellos semejantes; en particular, los triángulos triángulos 2 y 4 son iguales.
(Es muy sencillo ver que son semejantes: además de un ángulo recto, los ángulos correspondientes son iguales. Por ejemplo, en el punto *B*, basta con observar la disposición de los ángulos).





Con esto, si los catetos del triángulo rectángulo inicial miden x y $2x$, se tendrá que su hipotenusa medirá $\sqrt{5}x$, pues: $x^2+(2x)^2=5x^2$.

También puede deducirse que las áreas de los cuadrados construídos sobre el triángulo inicial valen, como se indica en la figura, x^2, $4x^2$ y $5x^2$. Igualmente puede deducirse que el área del triángulo inicial es x^2: $S_T = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$.

Por tanto, el área del poligono sombreado en la figura dada vale $11x^2$.

Por otra parte, por la semejanza de los triángulos 1 y 2 $\Rightarrow \frac{\sqrt{5}x}{x} = \frac{2x}{a} \Rightarrow a = \frac{2x}{\sqrt{5}}$.

Y por lo mismo: $\frac{\sqrt{5}x}{2x} = \frac{2x}{c} \Rightarrow c = \frac{4x}{\sqrt{5}}$

Por la semejanza de los triángulos 1 y 3 $\Rightarrow \frac{\sqrt{5}x}{2x} = \frac{x}{b} \Rightarrow b = \frac{2x}{\sqrt{5}}$

Con esto, las dimensiones del rectángulo son:

Base = $b + \sqrt{5}x + a = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}x + \frac{2x}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}x + \frac{4x}{\sqrt{5}}$

Altura = $\sqrt{5}x + c + a = \sqrt{5}x + \frac{6x}{\sqrt{5}} + \frac{2x}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}x + \frac{6x}{\sqrt{5}}$

Su área será:

$$\left(\sqrt{5}x + \frac{4x}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{5}x + \frac{6x}{\sqrt{5}}\right) = 5x^2 + 6x^2 + 4x^2 + \frac{24}{5}x^2 = \frac{99x^2}{5}$$

Así pues, el cociente entre el área del polígono sombreado y el área del rectángulo en el que está inscrito es:

$$\frac{11x^2}{\frac{99x^2}{5}} = \frac{55}{99} = \frac{5}{9}$$