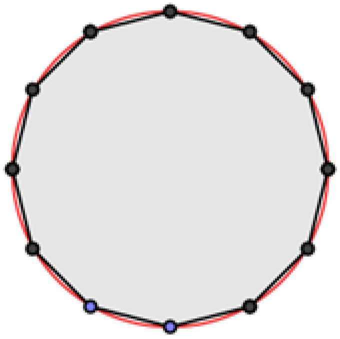
DODECÁGONO

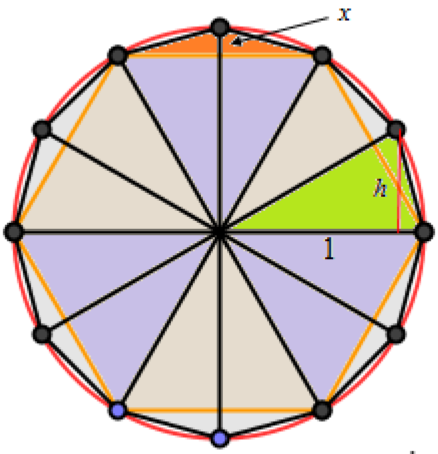
XXI Olimpiada Matemática Asturiana
http://www.pedrayes.com/index.php/olimpiada/descargas

El problema que se propone a continuación es relativamente sencillo; puede ser apropiado para alumnos a partir de 3º de ESO. Otra vez nos encontrmos con un problema que puede hacerse de varias maneras. Si el enfoque inicial es acertado su resolución es casi inmediata; si no se acierta al principio, puede tener algún escollo; pero en cualquier caso seguro que se da con la solución.
Para hacerlo se necesita conocer las siguientes cuestiones:
1. Propiedades de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia.
2. El teorema de Pitágoras.
3. Fórmulas de áreas de polígonos.

Problema
Calcula el área de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio.1. Sin hacer uso de las razones trigonométricas.

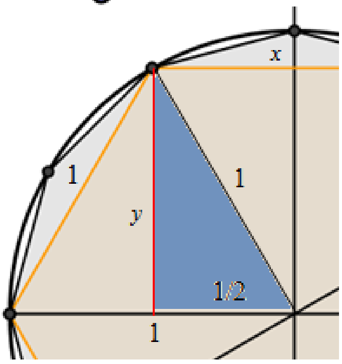


Solución:
Hay varias posibilidades de solución.
(1) El dodecágono puede dividirse en 12 triángulos isósceles.



El área de cada uno de ellos es $S_{12}=\frac{1\cdot h}{2}=\frac{h}{2}$. Para determinarla habría que calcular el valor de h. (Yo, sin la ayuda de la trigonometría, no he encontrado el método para hacerlo. Se me ocurrió a posteriori, como veré después en (2)).
Pero,…observando la figura puede verse que el área del dodecágono es una ampliación del área del hexágono regular inscrito. En concreto, el área del hexágono más la de 6 triángulos de base 1 y altura x.

Para determinar x hay que hallar la altura de cualquier triángulo equilátero en los que se descompone el hexágono. Su valor es se obtiene teniendo en cuenta que $y^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

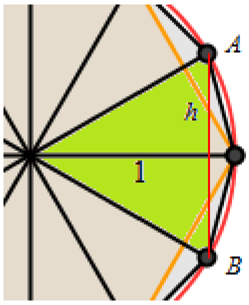


Por tanto, $x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.
En consecuencia, el área de cada uno de los 6 triángulos añadidos al

hexágono será: $s = \dfrac{1 \cdot \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ $\to$ Entre los 6 suman: $6s = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$.
El valor de *y* (que coincide con la apotema del hexágono) permite hallar su área (la del hexágono), que vale: $S_H = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
Con esto, el área del dodecágono pedido es:

$$S_D = S_H + 6s = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{6-3\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

(2) Esta segunda solución es muy rápida y sencilla, cuando se "ve". Yo la he visto una vez terminado el problema.
Si al intentar calcular el área de cada uno de los 12 triángulos isósceles en los que se descompone el dodecaedro, que es $S_{12} = \dfrac{1 \cdot h}{2} = \dfrac{h}{2}$, se observa que la altura es la mitad del lado *AB* del triángulo equilátero *OAB*, que vale 1 $\Rightarrow$ $h = \dfrac{1}{2}$.



Por tanto, el área de cada triángulo es $S_{12} = \dfrac{1 \cdot (1/2)}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Luego la del dodecaedro será: $S_D = 12 \cdot S_{12} = 12 \cdot \dfrac{1}{4} = 3$ cm

(3) Por último, si se aplica la trigonométria es inmediato, pues como el ángulo central de cada triángulo mide 30º $\Rightarrow$ $\sin 30 = \dfrac{h}{1} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = h$. Lo demás es como antes.