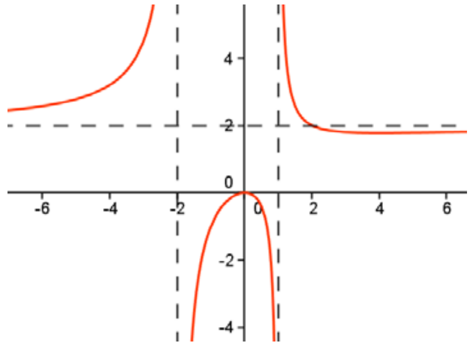
EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 6. 7, 8 y 9 (Recuperación)

1. (1 punto) Indica el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+3x+2}$ b) $f(x)=\sqrt{x^3+8}$ c) $f(x)=\log(2x+6)$

2. (1,3 puntos) Para la función representada en la figura adjunta, determina:
a) Su dominio; y algunos valores que no sean de su recorrido.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Sus máximos y mínimos, indicando las coordenadas aproximadas de dichos puntos.



3. (1,5 puntos) Expresa como una función definida a trozos $f(x)=\left|x^2+2x\right|$. Haz su representación gráfica. Indica su máximo y mínimo relativos, si los tiene.

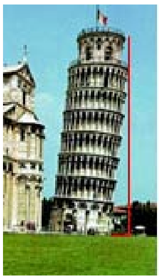
4. (2 puntos) A un precio de 10 € un fabricante oferta 200 unidades de un determinado producto; y a un precio de 13 € ofertaría 275 unidades. Si la función de demanda es $f_d(p)=298-\dfrac{1}{3}p^2$, donde p viene dado en euros, determina el precio y la cantidad de equilibrio.
(Observación: La función de oferta es lineal).

5. (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{3x-3}{2x-4}$, halla en qué puntos corta a los ejes de coordenadas y determina sus asíntotas. Con esos datos haz un esbozo de su gráfica, indicando la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.

6. (1,5 puntos) La expresión $C(t)=100e^{-kt}$ da el porcentaje de materia radiactiva de un determinado elemento al cabo de t años (de su actividad plena).
Sabiendo que un isótopo radiactivo decae un 9,5% anualmente:
a) ¿Cuánto vale la constante k?
b) Si la función fuese $C(t)=100e^{-0,1t}$, ¿cuánto tiempo debe pasar para que quede menos del 50% de la cantidad inicial?

7. (0,5 puntos) Resuelve la ecuación trigonométrica: $2\sin 2x=1$

8. (1 punto) La inclinación de la torre de Pisa es de 4,6º respecto de la vertical. Sabiendo que una piedra dejada caer desde lo más alto de la torre impacta a 4,4 m de la base, ¿cuál era la altura inicial de la Torre?



Alcalá de Henares, 15 de marzo de 2016

Soluciones:

1. (0,9 puntos) Indica el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+3x+2}$ b) $f(x)=\sqrt{x^3+8}$ c) $f(x)=\log(2x+6)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+3x+2}$ está definida siempre que el denominador sea distinto de 0.

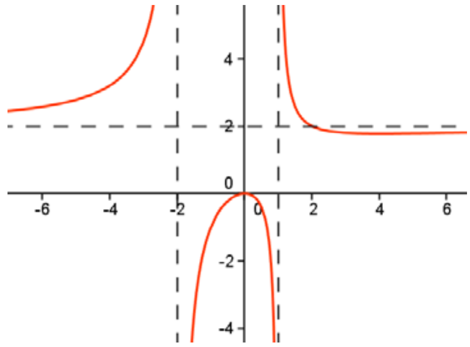
$x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-,\ x=-1$ → Por tanto Dom(*f*) = **R** – {–2, –1}.

b) $f(x)=\sqrt{x^3+8}$ está definida siempre que $x^3+8\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$.

c) $f(x)=\log(2x+6)$ está definida cuando $2x+6>0 \Rightarrow x>-3$.

2. (1,3 puntos) Para la función representada en la figura adjunta, determina:

a) Su dominio; y algunos valores que no sean de su recorrido.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Sus máximos y mínimos, indicando las coordenadas aproximadas de dichos puntos.



Solución:

a) Dominio: **R** – {–2, 1}.
Recorrido: **R** – (0, 1,7), aproximadamente.

b) Verticales: $x=-2$ y $x=1$. Horizontal: $y=2$.

c) Crecimiento: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$. El último intervalo es aproximado.
Decrecimiento: $x \in (0, 1) \cup (1, 4)$.

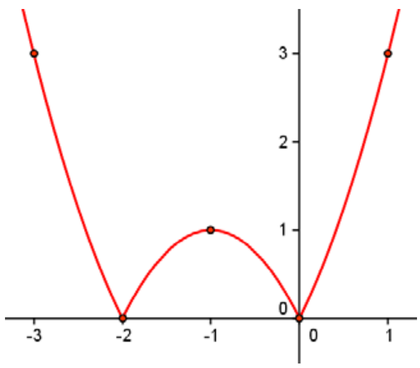
d) Tiene un máximo en el punto (0, 0); en el punto $x \approx 4$ tiene un mínimo.

3. (1,5 puntos) Expresa como una función definida a trozos $f(x)=\left|x^2+2x\right|$. Haz su representación gráfica. Indica su máximo y mínimo relativos, si los tiene.

Solución:

Como $x^2+2x=0$ si $x = -2$ o $x = 0 \Rightarrow$

$$f(x)=\left|x^2+2x\right|=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\leq -2 \\ -x^2-2x & \text{si } -2<x<0 \\ x^2+2x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$



Para representarla, como son arcos de parábolas, basta con dar algunos valores:

(–3, 3); (–2, 0); (–1, 1); (0, 0); (1, 3)

Se obtiene la gráfica adjunta.

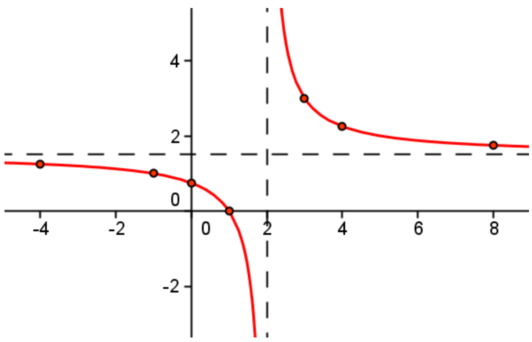
Tiene dos mínimos absolutos: (–2, 0) y (0, 0); y un máximo relativo en (–1, 1).

4. (2 puntos) A un precio de 10 € un fabricante oferta 200 unidades de un determinado producto; y a un precio de 13 € ofertaría 275 unidades. Si la función de demanda es $f_d\left(p\right)=298-\frac{1}{3}p^2$, donde p viene dado en euros, determina el precio y la cantidad de equilibrio.
(Observación: La función de oferta es lineal).
Solución:
Función de oferta: $f_o\left(p\right)=ap+b$
De $f_d\left(10\right)=200 \Rightarrow 200=10a+b$
De $f_d\left(13\right)=275 \Rightarrow 275=13a+b$ $\Rightarrow$ a = 25; b = –50.
Luego: $f_d\left(p\right)=25p-50$
Igualando la oferta y la demanda:

$$25p-50=298-\frac{1}{3}p^2 \Rightarrow p^2+75p-1044=0 \Rightarrow p=\frac{-75\pm\sqrt{5625-4\cdot\left(-1044\right)}}{2}=\frac{-75\pm 99}{2}=12\text{ €}$$

(La solución negativa no tiene sentido económico).
A ese precio, las cantidades de oferta y demanda son de 250 unidades.

5. (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{3x-3}{2x-4}$, halla en qué puntos corta a los ejes de coordenadas y determina sus asíntotas. Con esos datos haz un esbozo de su gráfica, indicando la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.
Solución:
Dom(f) = **R** – {2}.
Corta al eje OX cuando y = 0 ⇒ $3x$ – 3 = 0 ⇒ x = 1. Punto (1, 0)
Corta al eje OY cuando x = 0 ⇒ y = 3/4. Punto (0, 3/4).
En x = 2 tiene una asíntota vertical.
Por la izquierda de x = 2 la rama de la asíntota se va hacia –∞.
Por la derecha de x = 2 la rama de la asíntota se va hacia +∞.
También tiene una asíntota horizontal, la recta y = 3/2.
Hacia +∞ la función toma valores mayores que 3/2.
Hacía –∞ toma valores menores que 3/2.
Algunos de sus puntos son:
(–4, 15/12)); (–1, 1); (0, 3/4); (1, 0);
(3, 3); (4, 9/4); (5, 2); (8, 21/12)



6. (1,5 puntos) La expresión $C(t)=100e^{-kt}$ da el porcentaje de materia radiactiva de un determinado elemento al cabo de t años (de su actividad plena). Sabiendo que un isótopo radiactivo decae un 9,5 % anualmente:
a) ¿Cuánto vale la constante k?
b) Si la función fuese $C(t)=100e^{-0,1t}$, ¿cuánto tiempo debe pasar para que quede menos del 50% de la cantidad inicial?
Solución:
a) $C(t)=100e^{-kt}$ → al cabo de un año:

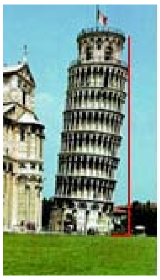
$$90,5=100e^{-k\cdot 1} \Rightarrow 0,905=e^{-k} \Rightarrow \ln 0,905=-k \Rightarrow k=0,09982 \rightarrow k=0,1.$$

b) $C(t)=100e^{-0,1t} \to 50=100e^{-0,1t} \Rightarrow 0,5=e^{-0,1t} \Rightarrow \ln 0,5=-0,1t \Rightarrow t=6,93$.
Deben transcurrir más de 6,93 años.

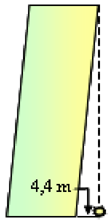
7. (0,5 puntos) Resuelve la ecuación trigonométrica: $2\sin 2x=1$
Solución:

$$\sin 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}30^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\\150^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}15^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}\\75^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}\end{cases} \equiv \begin{cases}\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \frac{5\pi}{12}+k\pi\end{cases}$$

8. (1 punto) La inclinación de la torre de Pisa es de 4,6º respecto de la vertical. Sabiendo que una piedra dejada caer desde lo más alto de la torre impacta a 4,4 m de la base, ¿cuál era la altura inicial de la Torre?



Solución:



La altura inicial se corresponde con la hipotenusa del triángulo.

$$\sin 4,6^{\circ}=\frac{4,4}{h} \Rightarrow h=\frac{4,4}{\sin 4,6^{\circ}}=54,86 \text{ m}$$

Alcalá de Henares, 15 de marzo de 2016