EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

1. Calcula y simplifica:

a) (0,5 puntos) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)$.

b) (0,5 puntos) Factoriza el polinomio $P(x)=2x^3-2x^2-40x$

2. (0,8 puntos) Expresa mediante un solo radical la suma $4\sqrt{\frac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{27}+\sqrt{\frac{48}{9}}$.

3. a) (0,7 puntos) Un automóvil se devalúa anualmente un 20%. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su precio sea inferior al 40% de lo que costó nuevo?
b) (0,3 puntos) Si el automóvil cuesta 32000 €, ¿cuál será su valor dentro de 10 años?

4. (0,6 puntos) Representa la función $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x\le 1\\ -x^2+2 & \text{si } x>1\end{cases}$

A partir de su gráfica indica:
a) (0,2 puntos) ¿En qué puntos es discontinua?
b) (0,2 puntos) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?

5. La funciones de ingresos por venta y costes de producción, para un determinado producto, son $I(x)=100x-10x^2$ y $C(x)=100+5x$, donde x viene dada en miles de unidades e $I(x)$ y $C(x)$ en miles de euros. (Esto es: x = 1 significa 1000 unidades). Se pide:
a) (0,3 puntos) ¿Cuánto gasta, ingresa y gana la empresa si produce y vende 1000, 3000, 10000 unidades?
b) (0,6 puntos) ¿Cuál es la función de beneficios? Represéntala (Reduce el eje *OY*; escala 1:10).
c) (0,6 puntos) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea positivo? ¿Y máximo?

6. (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{4x-2}{2x-4}$, halla:
a) (0,3 puntos) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas;
b) (0,8 puntos) Sus asíntotas, aplicando el cálculo de límites. Indica, aplicando la calculadora si es necesario, la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.
c) (0,4 puntos) Con esos datos haz un esbozo de su gráfica.

7. (0,9 puntos) Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=7x^4-3x^2+\frac{3}{7}x-5$ b) $f(x)=\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(4x^2-3\right)$ c) $f(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x}$

8. (1 punto) En seis alumnos de bachillerato se observaron dos variables: *X* = "horas de uso de objetos digitales: móvil, internet…" e *Y* = "nota en un examen de matemáticas". Los resultados se indican en la siguiente tabla:

Horas móvil…: *X*	4	5	3,5	1	0,5	2
Nota examen: *Y*	3	4	5	7	8	6

a) Representa la nube de puntos asociada. ¿Se observa algún tipo de correlación entre las variables? Indica sus características.
b) ¿Cuál de las siguientes rectas de regresión ajustaría esos datos?
(1) $y = 1,21x + 8,10$ (2) $y = -0,98x + 8,11$ (3) $y = -1,3x + 8,12$
Justifica tu respuesta. (Puedes tener en cuenta que la recta de regresión pasa por el punto $(\bar{x},\ \bar{y})$, cuyas coordenadas son las medias marginales. Otra opción es obtener con la calculadora dicha recta de regresión).

9. (1 punto) Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:
a) $P(A \cap B)$ b) $P\left((A \cap B)^C\right)$
c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

10. a) (0,4 puntos) Si se lanzan cuatro monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenido, ¿cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?
b) (0,4 puntos) Calcula la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar 8 monedas a la vez.

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

1ª Evaluación. Temas 1 a 5 → (La puntuación total es 7 puntos. Se aprueba con 3,75 puntos)

1. Calcula y simplifica:

a) (1 punto) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)$

b) (1 punto) Factoriza el polinomio $P(x)=2x^3-2x^2-40x$.

2. (1 punto) Expresa mediante un solo radical la suma $4\sqrt{\frac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{27}+\sqrt{\frac{48}{9}}$.

3. a) (0,5 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1<\sqrt{x-2}<3$.

b) (1 punto) Halla los intervalos solución de $x^2-2x\le 0$.

4. (1,5 puntos) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2-2x-y=0 \\ (x+1)^2+y=3 \end{cases}$.

5. a) (1 punto) Un automóvil se devalúa anualmente un 20%. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su precio sea inferior al 40% de lo que costó nuevo?

b) (0,5 puntos) Si el automóvil cuesta 32000 €, ¿cuál será su valor dentro de 10 años?

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

2ª Evaluación. Temas 6 a 9 → La puntuación total es 7,2 puntos. Se aprueba con 3,6 puntos

1. (0,9 puntos) Representa la función $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x\le 1 \\ -x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

A partir de su gráfica indica:
a) (0,2 puntos) ¿En qué puntos es discontinua?
b) (0,2 puntos) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?

2. (2 puntos) La funciones de ingresos por venta y costes de producción, para un determinado producto, son $I(x)=100x-10x^2$ y $C(x)=100+5x$, donde x viene dada en miles de unidades e $I(x)$ y $C(x)$ en miles de euros. (Esto es: x = 1 significa 1000 unidades). Se pide:
a) (0,6 puntos) ¿Cuánto gasta, ingresa y gana la empresa si produce y vende 1000, 3000, 10000 unidades?
b) (0,8 punto) ¿Cuál es la función de beneficios? Represéntala (Reduce el eje *OY*; escala 1:10).
c) (0,6 puntos) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea positivo? ¿Y máximo?

3. (1 punto) El coste de fabricación de 80 piezas de un determinado producto es de 1200 euros. Si fabricar 200 piezas cuesta 2400 €, determina, aplicando técnicas de interpolación lineal, cuánto costará la fabricación de 150 piezas de ese mismo producto.

4. (0,9 puntos) Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}$ b) $g(x)=\sqrt{2-3x}$ c) $h(x)=\log\left(x^2+1\right)$

5. (1,5 puntos) Dadas $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$.

b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$.

c) La función inversa de $g(x)$.

6. (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x-4}$, halla:

a) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas;
b) Sus asíntotas, aplicando el cálculo de límites. Indica, aplicando la calculadora si es necesario, la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.
c) Con esos datos haz un esbozo de su gráfica.

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

3ª Evaluación. Tema 10 a 15 → La puntuación total es 8 puntos. Se aprueba con 4 puntos

1. (1 punto) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

2. (1 punto) Halla el valor del parámetro k para el cual es continua la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{si } x<2 \\ -2x+k & \text{si } x\geq 2 \end{cases}.$$

3. (1 punto) Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=7x^4-3x^2+\dfrac{3}{7}x-5$ b) $f(x)=\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(4x^2-3\right)$ c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$

4. (1 punto) En seis alumnos de bachillerato se observaron dos variables: X = “horas de uso de objetos digitales: móvil, internet…” e Y = “nota en un examen de matemáticas”. Los resultados se indican en la siguiente tabla:

Horas móvil…: X	4	5	3,5	1	0,5	2
Nota examen: Y	3	4	5	7	8	6

a) Representa la nube de puntos asociada. ¿Se observa algún tipo de correlación entre las variables? Indica sus características.

b) ¿Cuál de las siguientes rectas de regresión ajustaría esos datos?

(1) $y=1,21x+8,10$ (2) $y=-0,98x+8,11$ (3) $y=-1,3x+8,12$

Justifica tu respuesta. (Puedes tener en cuenta que la recta de regresión pasa por el punto $(\bar{x},\ \bar{y})$, cuyas coordenadas son las medias marginales. Otra opción es obtener con la calculadora dicha recta de regresión).

5. (1,5 puntos) Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A)=0,7$; $P(B)=0,6$ y $P(A\cup B)=0,85$. Calcula:

a) $P(A\cap B)$ b) $P\left((A\cap B)^C\right)$

c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

6. a) (0,5 puntos) Si se lanzan cuatro monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenido, ¿cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?

b) (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar 8 monedas a la vez.

7. (1,5 puntos) El peso medio de los recién nacidos en un hospital se distribuye normalmente con media μ = 3050 gramos y desviación típica 450 gramos. Si se elige un recién nacido al azar halla la probabilidad de que su peso sea:

a) (0,5 puntos) Superior a 3300 gramos.

b) (0,5 puntos) Inferior a 2600 gramos.

c) (0,5 puntos) ¿Qué peso mínimo debe tener un recién nacido para estar entre el 15% de los bebés con mayor peso?

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Soluciones

Examen FINAL

1. Calcula y simplifica:

a) (0,5 puntos) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)=$

$$=\frac{2}{3}x^3\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{4}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)=$$

$$=-x^5+\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{15}x^3+\frac{3}{8}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}=$$

$$=-x^5+\frac{25}{24}x^4-\frac{47}{60}x^3-\frac{11}{20}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}$$

b) (0,5 puntos) Factoriza el polinomio $P(x)=2x^3-2x^2-40x$

Sacando factor común $2x$, se obtiene:

$$P(x)=2x^3-2x^2-40x=2x\left(x^2-x-20\right)$$

Resolviendo la ecuación $x^2-x-20=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}\Rightarrow x=-4; x=5$

En definitiva, $P(x)=2x^3-2x^2-40x=2x\left(x^2-x-20\right)=2x(x+4)(x-5)$

2. (0,8 puntos) Expresa mediante un solo radical la suma $4\sqrt{\frac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{27}+\sqrt{\frac{48}{9}}$.

<u>Solución</u>:

$$4\sqrt{\frac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{27}+\sqrt{\frac{48}{9}}=4\sqrt{\frac{25\cdot3}{4}}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{9\cdot3}+\sqrt{\frac{16\cdot3}{9}}=$$

$$=4\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\cdot3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}=\left(4\cdot\frac{5}{2}+2-\frac{7}{3}\cdot3+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3}=\left(10+2-7+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3}=\frac{19\sqrt{3}}{3}$$

3. a) (0,7 puntos) Un automóvil se devalúa anualmente un 20%. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su precio sea inferior al 40% de lo que costó nuevo?

b) (0,3 puntos) Si el automóvil cuesta 32000 €, ¿cuál será su valor dentro de 10 años?

<u>Solución</u>:

La expresión que da el valor del automóvil en función del tiempo es:

$$P(t)=P_0\cdot(0,80)^t$$

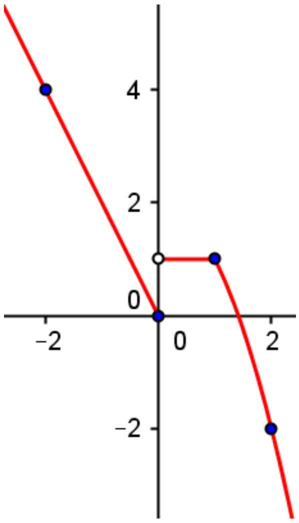
Se desea conocer t para que: $P(t)=0,40P_0$.

Hay que resolver la ecuación:

$$0,40P_0=P_0\cdot(0,80)^t\Rightarrow 0,40=(0,80)^t\Rightarrow \log(0,40)=t\log(0,80)\Rightarrow t=\frac{\log 0,40}{\log 0,80}=4,1$$

b) $P(10)=32000\cdot(0,80)^{10}=32000\cdot0,107374182=3435,97$ €

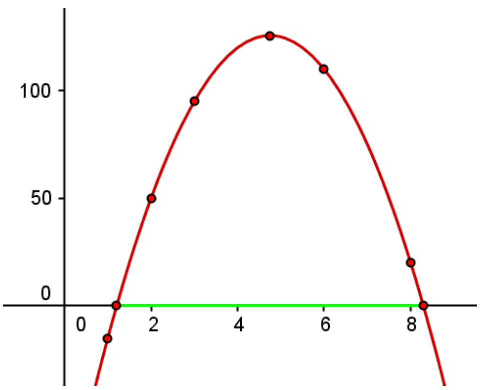
4. (0,6 puntos) Representa la función $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x\le 1 \\ -x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$



A partir de su gráfica indica:
a) (0,2 puntos) ¿En qué puntos es discontinua?
b) (0,2 puntos) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?
Solución:
Dando algunos valores:
(–2, 4); (0, 0);
(0, 1); (0,5, 2);
(0,5, 0,75); (1, 0) (2, –3)
Se obtiene la gráfica adjunta.
a) Es discontinua en x = 0.
b) Nunca es creciente. Es constante en el intervalo (0, 1).
Es estrictamente decreciente en los intervalos (–∞, 0) y (1, +∞).

5. (1 punto) La funciones de ingresos por venta y costes de producción, para un determinado producto, son $I(x)=100x-10x^2$ y $C(x)=100+5x$, donde x viene dada en miles de unidades e $I(x)$ y $C(x)$ en miles de euros. (Esto es: x = 1 significa 1000 unidades). Se pide:
a) ¿Cuánto gasta, ingresa y gana la empresa si produce y vende 1000, 3000, 10000 unidades?
b) ¿Cuál es la función de beneficios? Represéntala (Reduce el eje OY; escala 1:10).
c) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea positivo? ¿Y máximo?
Solución:
a) Para 1000 unidades, x = 1:
$I(1)=100-10=90$; $C(1)=105$ → (90 – 105 = –15) ⇒ pierde 15000 €
Para 3000 unidades, x = 3:
$I(3)=300-90=210$; $C(3)=115$ → (210 – 115 = 95) ⇒ gana 95000 €
Para 10000 unidades, x = 10:
$I(10)=1000-1000=0$; $C(10)=150$ → (0 – 150 = –150) ⇒ pierde 150000 €

b) $B(x)=I(x)-C(x)=100x-10x^2-\left(100+5x\right)=-10x^2+95x-100$.
Su gráfica es la adjunta. Se obtiene calculando algunos pares de valores…



c) El beneficio es positivo cuando $-10x^2+95x-100>0$ ⇒ (Se resuelve la ecuación asociada y estudia el signo de la expresión en cada uno de los intervalos que determinan esas soluciones. Si se ha dibujado la función, el intervalo solución es el que se corresponde con los valores positivos de $y=B(x)$).

$$x=\frac{-95\pm\sqrt{95^2-4\cdot(-1)\cdot(-100)}}{-20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-95\pm 70,887}{-20} \Rightarrow x=1,2056; x=8,2944$$

El beneficio es positivo cuando se fabrican más de 1205 unidades y menos de 8295.

Como la función beneficio es una función de segundo grado, el máximo se da en el vértice de la parábola: punto de abscisa $x_V = \dfrac{95}{40} = 4,75$ → hay que fabricar 4750 unidades.
Ese beneficio máximo asciende a $B(4,75)$ = 125,625 → 125625 €.

6. (1,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{4x-2}{2x-4}$, halla:
a) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas;
b) Sus asíntotas, aplicando el cálculo de límites. Indica, aplicando la calculadora si es necesario, la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.
c) Con esos datos haz un esbozo de su gráfica.
Solución:
Dom(f) = **R** – {2}.
Corta al eje OX cuando $y = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Punto (1/2, 0)
Corta al eje OY cuando $x = 0 \Rightarrow y = 1/2$. Punto (0, 1/2).
En $x = 2$ tiene una asíntota vertical, pues

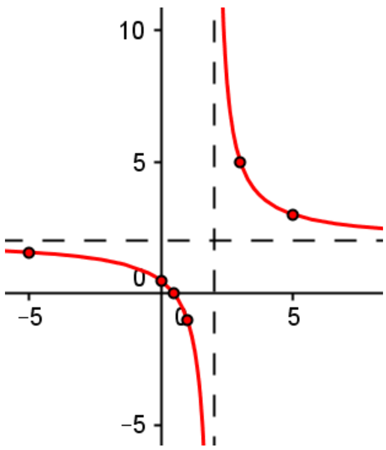
$$\lim_{x\to 2} \frac{4x-2}{2x-4} = \left[\frac{8}{0}\right] = \infty$$

Por la izquierda de $x = 2$ la rama de la asíntota se va hacia $-\infty$; por la derecha, hacia $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x-2}{2x-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-2}{2x-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 2$, pues

$$\lim_{x\to \infty} \frac{4x-2}{2x-4} = \frac{4}{2} = 2$$



Con la calculadora puede deducirse que:
Hacia $+\infty$ la función toma valores mayores que 2.
Hacía $-\infty$ toma valores menores que 2.
Algunos de sus puntos son: (–5, 11/7)); (0, 1/2); (1/2, 0); (1, –1); (3, 5); (5, 3).

7. (0,9 puntos) Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{7}x - 5$ b) $f(x) = \left(3x^2 - 2x\right)\left(4x^2 - 3\right)$ c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2 - 4x}$

Solución:

a) $f'(x) = 28x^3 - 6x + \dfrac{3}{7}$

b) $f'(x) = (6x-2)\cdot\left(4x^2-3\right) + \left(3x^2-2x\right)\cdot 8x = 48x^3 - 24x^2 - 18x + 6$

c) $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4x\right) - (2x-4)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2} = \dfrac{-2x^2+8x-16}{\left(x^2-4x\right)^2}$

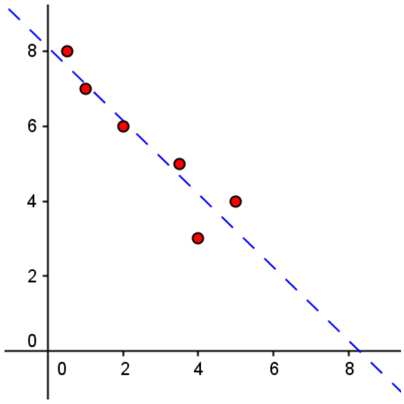
8. (1 punto) En seis alumnos de bachillerato se observaron dos variables: X = "horas de uso de objetos digitales: móvil, internet…" e Y = "nota en un examen de matemáticas". Los resultados se indican en la siguiente tabla:

Horas móvil…: X	4	5	3,5	1	0,5	2
Nota examen: Y	3	4	5	7	8	6

a) Representa la nube de puntos asociada. ¿Se observa algún tipo de correlación entre las variables? Indica sus características.
b) ¿Cuál de las siguientes rectas de regresión ajustaría esos datos?
(1) $y = 1,21x + 8,10$ (2) $y = -0,98x + 8,11$ (3) $y = -1,3x + 8,12$
Justifica tu respuesta. Puedes tener en cuenta que la recta de regresión pasa por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, cuyas coordenadas son las medias marginales.

Solución:

a) La nube de puntos es la representada en la figura adjunta. Es estrecha y con tendencia decreciente. Esto indica que la correlación entre las variables es inversa y fuerte: el tiempo dedicado a usar artilugios digitales influye negativamente en las calificaciones obtenidas en el examen.



b) La recta de regresión debe tener pendiente negativa, lo que descarta la recta (1).
Las medias marginales son.

$$\overline{x} = \frac{16}{6} = 2,67 \;;\; \overline{y} = \frac{33}{6} = 5,5$$

Esas coordenadas verifican (salvo el error de aproximación debido a los decimales empleados) la ecuación (2).

- Con la calculadora se obtiene: $y = -0,9789x + 8,1105$.

9. (1 punto) Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ b) $P\left((A \cap B)^C\right)$

c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

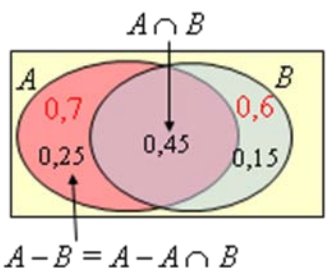
Solución:

a) Se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,85 = 0,45$$

b) El suceso $(A \cap B)^C$ es el contrario de $A \cap B \Rightarrow$

$$P\left((A \cap B)^C\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,45 = 0,55$$



a) Que se cumpla solo uno de los dos sucesos significa que se cumple A y no B o que se cumple B, pero no A. Esto es, cualquiera de los dos, pero no los dos a la vez.
Su valor es:

$$P\big((A - B) \cup (B - A)\big) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,85 - 0,45 = 0,40.$$

En el diagrama adjunto se puede visualizar todo el problema.

10. a) (0,4 puntos) Si se lanzan cuatro monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenido, ¿cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?
b) (0,4 puntos) Calcula la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar 8 monedas a la vez.
Solución:
a) El número de resultados es $2^4 = 16$.
Salen más caras que cruces cuando salen 3 caras y una cruz o cuando salen 4 caras, sucesos:
CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCCC
Por tanto:

$$P(\text{más caras que cruces}) = \frac{5}{16}$$

b) Puede estudiarse como una binomial $B(8, 0{,}5)$. Por tanto:

$$P(X=3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^5 = 56 \cdot 0{,}00390625 = 0{,}21875$$

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

1ª Evaluación. Temas 1 a 5 → (La puntuación total es 7 puntos. Se aprueba con 3,75 puntos)

1. Calcula y simplifica:
a) (1 punto) $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{5}\right) =$

$$= \frac{2}{3}x^3\left(-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{4}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{5}\right) =$$

$$= -x^5 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{15}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{5} =$$

$$= -x^5 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{47}{60}x^3 - \frac{11}{20}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$$

b) (1 punto) Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 40x$
Sacando factor común $2x$, se obtiene:
$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 40x = 2x\left(x^2 - x - 20\right)$

Resolviendo la ecuación $x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \Rightarrow x = -4; x = 5$

En definitiva, $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 40x = 2x\left(x^2 - x - 20\right) = 2x(x+4)(x-5)$

2. (1 punto) Expresa mediante un solo radical la suma $4\sqrt{\dfrac{75}{4}} + 2\sqrt{3} - \dfrac{7}{3}\sqrt{27} + \sqrt{\dfrac{48}{9}}$.

Solución:

$$4\sqrt{\frac{75}{4}} + 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}\sqrt{27} + \sqrt{\frac{48}{9}} = 4\sqrt{\frac{25 \cdot 3}{4}} + 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{9}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{7}{3} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} = \left(4 \cdot \frac{5}{2} + 2 - \frac{7}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3}\right)\sqrt{3} = \left(10 + 2 - 7 + \frac{4}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{19\sqrt{3}}{3}$$

3. a) (0,5 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1 < \sqrt{x-2} < 3$.
b) (1 punto) Halla los intervalos solución de $x^2 - 2x \le 0$.
<u>Solución</u>:
a) $1 < \sqrt{x-2} < 3 \Rightarrow 1 < x-2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11 \to x \in (3,\ 11)$

b) $x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow x(x-2) \le 0 \Rightarrow$ se anula en $x = 0$ y $x = 2$.
Si $x < 0$: $x(x-2) \le 0 \to (–) \cdot (–) = (+)$
Si $0 < x < 2$: $x(x-2) \le 0 \to (+) \cdot (–) = (–)$
Si $x > 2$: $x(x-2) \le 0 \to (+) \cdot (+) = (+)$
El intervalo solución es [0, 2]

4. (1,5 puntos) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$.

<u>Solución</u>:
$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$
Si $x = –1$, $y = 1 + 2 = 3$. Solución: punto (–1, 3).
Si $x = 1$, $y = 1 – 2 = –1$. Solución: punto (1, –1).

5. a) (1 punto) Un automóvil se devalúa anualmente un 20%. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su precio sea inferior al 40% de lo que costó nuevo?
b) (0,5 puntos) Si el automóvil cuesta 32000 €, ¿cuál será su valor dentro de 10 años?
<u>Solución</u>:
La expresión que da el valor del automóvil en función del tiempo es:
$$P(t) = P_0 \cdot (0,80)^t$$
Se desea conocer t para que: $P(t) = 0,40P_0$.
Hay que resolver la ecuación:
$$0,40P_0 = P_0 \cdot (0,80)^t \Rightarrow 0,40 = (0,80)^t \Rightarrow \log(0,40) = t\log(0,80) \Rightarrow t = \frac{\log 0,40}{\log 0,80} = 4,1$$

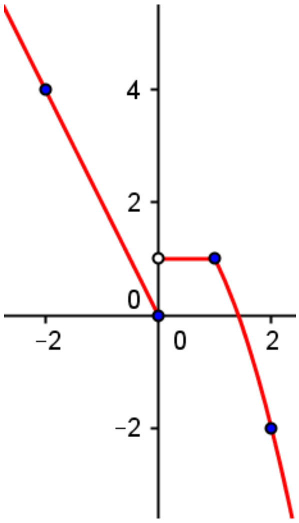
b) $P(10) = 32000 \cdot (0,80)^{10} = 32000 \cdot 0,107374182 = 3435,97$ €

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

2ª Evaluación. Temas 6 a 9 → La puntuación total es 7,2 puntos. Se aprueba con 3,6 puntos

1. (0,9 puntos) Representa la función $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } 0<x\le 1 \\ -x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$



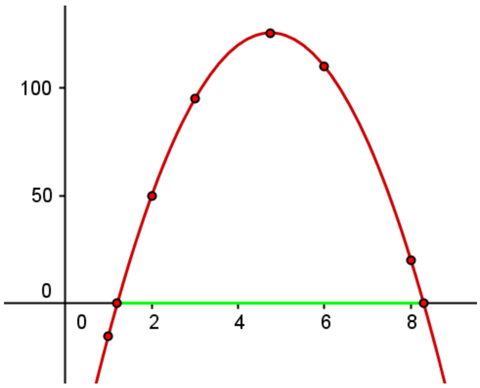
A partir de su gráfica indica:
c) (0,2 puntos) ¿En qué puntos es discontinua?
d) (0,2 puntos) ¿Cuándo es creciente y cuándo decreciente?
Solución:
Dando algunos valores:
(–2, 4); (0, 0);
(0, 1); (0,5, 2);
(0,5, 0,75); (1, 0) (2, –3)
Se obtiene la gráfica adjunta.
a) Es discontinua en x = 0.
b) Nunca es creciente. Es constante en el intervalo (0, 1).
Es estrictamente decreciente en los intervalos (–∞, 0) y (1, +∞).

2. (2 puntos) La funciones de ingresos por venta y costes de producción, para un determinado producto, son $I(x)=100x-10x^2$ y $C(x)=100+5x$, donde x viene dada en miles de unidades e $I(x)$ y $C(x)$ en miles de euros. (Esto es: x = 1 significa 1000 unidades). Se pide:
a) (0,6 puntos) ¿Cuánto gasta, ingresa y gana la empresa si produce y vende 1000, 3000, 10000 unidades?
b) (0,8 punto) ¿Cuál es la función de beneficios? Represéntala (Reduce el eje *OY*; escala 1:10).
c) (0,6 puntos) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea positivo? ¿Y máximo?
Solución:
a) Para 1000 unidades, x = 1:
$I(1)=100-10=90$; $C(1)=105$ → (90 – 105 = –15) ⇒ pierde 15000 €
Para 3000 unidades, x = 3:
$I(3)=300-90=210$; $C(3)=115$ → (210 – 115 = 95) ⇒ gana 95000 €
Para 10000 unidades, x = 10:
$I(10)=1000-1000=0$; $C(10)=150$ → (0 – 150 = –150) ⇒ pierde 150000 €

b) $B(x)=I(x)-C(x)=100x-10x^2-\left(100+5x\right)=-10x^2+95x-100$.
Su gráfica es la adjunta. Se obtiene calculando algunos pares de valores…

c) El beneficio es positivo cuando $-10x^2+95x-100>0$ ⇒ (Se resuelve la ecuación asociada y estudia el signo de la expresión en cada uno de los intervalos que determinan esas soluciones. Si se ha dibujado la función, el intervalo solución es el que se corresponde con los valores positivos de $y=B(x)$).

$$x=\frac{-95\pm\sqrt{95^2-4\cdot(-1)\cdot(-100)}}{-20} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x = \frac{-95 \pm 70,887}{-20} \Rightarrow x = 1,2056; x = 8,2944$$

El beneficio es positivo cuando se fabrican más de 1205 unidades y menos de 8295.
Como la función beneficio es una función de segundo grado, el máximo se da en el vértice de la parábola: punto de abscisa $x_V = \frac{95}{40} = 4,75$ → hay que fabricar 4750 unidades.
Ese beneficio máximo asciende a $B(4,75)$ = 125,625 → 125625 €.

3. (1 punto) El coste de fabricación de 80 piezas de un determinado producto es de 1200 euros. Si fabricar 200 piezas cuesta 2400 €, determina, aplicando técnicas de interpolación lineal, cuánto costará la fabricación de 150 piezas de ese mismo producto.
Solución:
La función de interpolación es de la forma $f(x) = ax + b$.
Con los datos dados se deduce que: $\begin{cases} 1200 = 80a + b \\ 2400 = 200a + b \end{cases} \Rightarrow a = 10; b = 400$
Por tanto, $f(x) = 10x + 400$ → fabricar 150 piezas costará $f(150) = 10 \cdot 150 + 400 = 1900$ €.

4. (0,9 puntos) Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2 - 3x + 2}$ b) $g(x) = \sqrt{2-3x}$ c) $h(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$

Solución:
b) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2 - 3x + 2}$ está definida siempre que el denominador sea distinto de 0.
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 2$ → Por tanto Dom(*f*) = **R** – {1, 2}.
c) $g(x) = \sqrt{2-3x}$ está definida siempre que $2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
c) $h(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$ está definida cuando $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x \in$ **R**.

5. (1,5 puntos) Dadas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = \frac{1}{x-3}$, halla:
a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$.
b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$.
c) La función inversa de $g(x)$.
Solución:
a) $f\left(g(2)\right) = f\left(-1\right) = 1 + 2 = 3$. $g\left(f(-1)\right) = g(3) = \frac{1}{0}$ → no está definido.

b) $f\left(g(x)\right) = \left(g(x)\right)^2 - 2 \cdot g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} - 2 \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{5-2x}{(x-3)^2}$ → Su dominio es **R** – {3}.

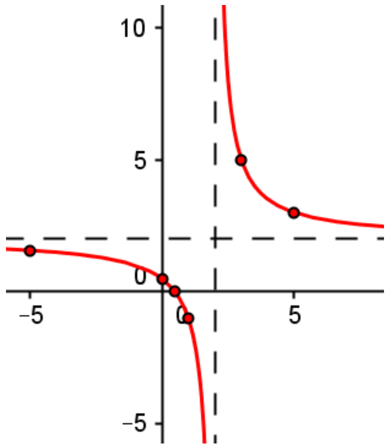
c) Si y es la inversa de $g \Rightarrow g(y) = x \Rightarrow \frac{1}{y-3} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = y - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{x} + 3$.

6. (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x-4}$, halla:

a) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas;
b) Sus asíntotas, aplicando el cálculo de límites. Indica, aplicando la calculadora si es necesario, la posición de la curva con respecto a sus asíntotas.
c) Con esos datos haz un esbozo de su gráfica.

Solución:
Dom(*f*) = **R** – {2}.
Corta al eje *OX* cuando $y = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Punto (1/2, 0)
Corta al eje *OY* cuando $x = 0 \Rightarrow y = 1/2$. Punto (0, 1/2).
En $x = 2$ tiene una asíntota vertical, pues

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-2}{2x-4}=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty$$



Por la izquierda de $x = 2$ la rama de la asíntota se va hacia $-\infty$; por la derecha, hacia $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x-2}{2x-4}=\left[\frac{8}{0^-}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{4x-2}{2x-4}=\left[\frac{8}{0^+}\right]=+\infty$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 2$, pues

$$\lim_{x\to \infty}\frac{4x-2}{2x-4}=\frac{4}{2}=2$$

Con la calculadora puede deducirse que:
Hacia $+\infty$ la función toma valores mayores que 2.
Hacía $-\infty$ toma valores menores que 2.
Algunos de sus puntos son: (–5, 11/7)); (0, 1/2); (1/2, 0); (1, –1); (3, 5); (5, 3).

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM

Examen Final (Matemáticas CCSS I)

3ª Evaluación. Tema 10 a 15 → La puntuación total es 8 puntos. Se aprueba con 4 puntos

1. (1 punto) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}=-\dfrac{4}{2}=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{2-4}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es asíntota vertical de la curva.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{1}=2$.

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\infty}=0 \Rightarrow$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva.

2. (1 punto) Halla el valor del parámetro k para el cual es continua la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{si } x<2 \\ -2x+k & \text{si } x\geq 2 \end{cases}.$$

Solución:

El único punto conflictivo es x = 2. Para que la función sea continua en él deben coincidir los límites laterales con su valor de definición.

Esto es: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2-1\right)=4-1=3;\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(-2x+k\right)=-4+k$$

Por tanto:

$$3=-4+k \Rightarrow k=7$$

3. (1 punto) Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=7x^4-3x^2+\dfrac{3}{7}x-5$ b) $f(x)=\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(4x^2-3\right)$ c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$

Solución:

a) $f'(x)=28x^3-6x+\dfrac{3}{7}$

b) $f'(x)=(6x-2)\cdot\left(4x^2-3\right)+\left(3x^2-2x\right)\cdot 8x=48x^3-24x^2-18x+6$

c) $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-4x\right)-(2x-4)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2}=\dfrac{-2x^2+8x-16}{\left(x^2-4x\right)^2}$

4. (1 punto) En seis alumnos de bachillerato se observaron dos variables: *X* = "horas de uso de objetos digitales: móvil, internet…" e *Y* = "nota en un examen de matemáticas". Los resultados se indican en la siguiente tabla:

Horas móvil…: *X*	4	5	3,5	1	0,5	2
Nota examen: *Y*	3	4	5	7	8	6

a) Representa la nube de puntos asociada. ¿Se observa algún tipo de correlación entre las variables? Indica sus características.

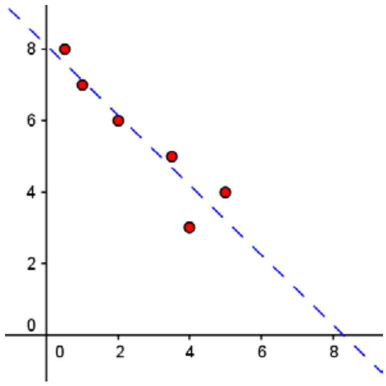
b) ¿Cuál de las siguientes rectas de regresión ajustaría esos datos?

(1) $y = 1,21x + 8,10$ (2) $y = -0,98x + 8,11$ (3) $y = -1,3x + 8,12$

Justifica tu respuesta. Puedes tener en cuenta que la recta de regresión pasa por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, cuyas coordenadas son las medias marginales.

<u>Solución</u>:

a) La nube de puntos es la representada en la figura adjunta.
Es estrecha y con tendencia decreciente. Esto indica que la correlación entre las variables es inversa y fuerte: el tiempo dedicado a usar artilugios digitales influye negativamente en las calificaciones obtenidas en el examen.



b) La recta de regresión debe tener pendiente negativa, lo que descarta la recta (1).
Las medias marginales son.

$$\overline{x} = \frac{16}{6} = 2,67 \ ; \ \overline{y} = \frac{33}{6} = 5,5$$

Esas coordenadas verifican (salvo el error de aproximación debido a los decimales empleados) la ecuación (2).

- Con la calculadora se obtiene: $y = -0,9789x + 8,1105$.

5. (1,5 puntos) Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ b) $P\left((A \cap B)^C\right)$

c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

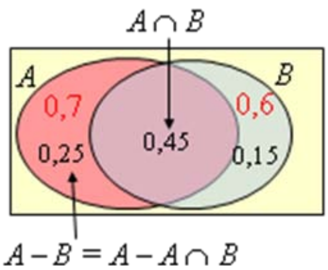
<u>Solución</u>:

a) Se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,85 = 0,45$$

b) El suceso $(A \cap B)^C$ es el contrario de $A \cap B \Rightarrow$

$$P\left((A \cap B)^C\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,45 = 0,55$$



d) Que se cumpla solo uno de los dos sucesos significa que se cumple *A* y no *B* o que se cumple *B*, pero no *A*. Esto es, cualquiera de los dos, pero no los dos a la vez.
Su valor es:

$$P\left((A - B) \cup (B - A)\right) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,85 - 0,45 = 0,40.$$

En el diagrama adjunto se puede visualizar todo el problema.

6. a) (0,5 puntos) Si se lanzan cuatro monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenido, ¿cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?
b) (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar 8 monedas a la vez.
Solución:
a) El número de resultados es $2^4 = 16$.
Salen más caras que cruces cuando salen 3 caras y una cruz o cuando salen 4 caras, sucesos:
CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCCC
Por tanto:

$$P(\text{más caras que cruces}) = \frac{5}{16}$$

b) Puede estudiarse como una binomial $B(8, 0{,}5)$. Por tanto:

$$P(X=3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^5 = 56 \cdot 0{,}00390625 = 0{,}21875$$

7. (1,5 puntos) El peso medio de los recién nacidos en un hospital se distribuye normalmente con media $\mu = 3050$ gramos y desviación típica 450 gramos. Si se elige un recién nacido al azar halla la probabilidad de que su peso sea:
a) (0,5 puntos) Superior a 3300 gramos.
b) (0,5 puntos) Inferior a 2600 gramos.
c) (0,5 puntos) ¿Qué peso mínimo debe tener un recién nacido para estar entre el 15% de los bebés con mayor peso?
Solución:
La normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, (en este caso, $N(3050, 450) \to Z = \frac{X-3050}{450}$). Por tanto:

a) $P(X > 3300) = P\left(Z > \frac{3300-3050}{450}\right) \approx P(Z > 0{,}56) = 1 - P(Z < 0{,}56) = 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877$

b) $P(X < 2600) = P\left(Z < \frac{2600-3050}{450}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

c) Se desea encontrar el valor p (de peso) tal que $P(X > p) = 0{,}15 \Rightarrow$

$$P\left(Z > \frac{p-3050}{450}\right) = 0{,}15 \Rightarrow \frac{p-3050}{450} = 1{,}06 \Rightarrow p = 450 \cdot 1{,}06 + 3050 = 3527 \text{ gramos.}$$

Alcalá de Henares, 17 de junio de 2016. JoséMMM