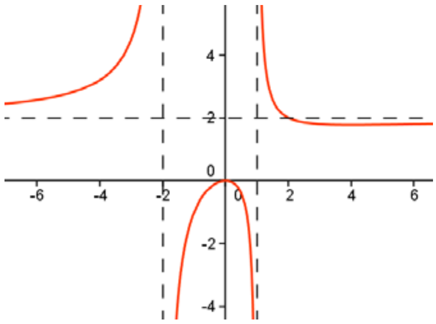
TEMA 5. Límites y continuidad de funciones
Problemas Resueltos

Cálculo de límites



1. Para la función representada en la figura adjunta, determina:
a) Su dominio.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) El valor del límite de la función cuando:
$x \to -\infty$; $x \to -2$; $x \to 0$; $x \to 1$; $x \to +\infty$
d) En los puntos $x = -2$ y $x = 1$, indica el signo de los límites laterales.

Solución:
a) Dominio: **R** – {–2, 1}.
b) Verticales: $x=-2$ y $x=1$. Horizontal: $y=2$.
c) Si $x \to -\infty$, $f(x) \to 2$; si $x \to -2$, $f(x) \to \pm\infty$; si $x \to 0$, $f(x) \to 0$; si $x \to 1$, $f(x) \to \pm\infty$; si $x \to +\infty$, $f(x) \to 2$.
d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$, calcula su límite en los siguientes puntos:

a) $x = -1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = 3$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \dfrac{1-4}{1+1-6} = \dfrac{3}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \dfrac{0}{-4} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \left[\dfrac{5}{0}\right] = \infty$. No existe.

3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x}{x^2+x-12}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+x-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{7}$.

La descomposición $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$ se obtiene resolviendo la ecuación $x^2-x-12=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x}{x^2+x-12} = \dfrac{18}{0} = \infty$.

c) $\underset{x\to -1}{lím}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\underset{x\to -1}{lím}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(2x-1)}=\underset{x\to -1}{lím}\dfrac{x-3}{2x-1}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

La descomposición $2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$ se obtiene dividiendo por Ruffini.

4. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$. b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+4x+4}$. c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{-8+6+2}{4-6+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}=\dfrac{9}{-1}=-9$.

La descomposición $x^3-3x+2=(x+2)(x^2-2x+1)$ se obtiene dividiendo por Ruffini.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+4x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+1}{x+2}=\left[\dfrac{9}{0}\right]=\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}=\dfrac{0}{9}=0$.

5. Resuelve los siguientes límites:

a) $\underset{x\to -2}{lím}\dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$ b) $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ c) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}$

Solución:

a) $\underset{x\to -2}{lím}\dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\underset{x\to -2}{lím}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x+2)}(x^3+2x^2+x+2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (Se repite el proceso) $=\underset{x\to -2}{lím}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}=\underset{x\to -2}{lím}\dfrac{x+3}{x^2+1}=\dfrac{1}{5}$.

Las descomposiciones factoriales se hacen dividiendo sucesivamente por $x+2$.

b) $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=12$.

c) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{x(3x^3-x^2-x)}{x(x^2-4x+5)}=\dfrac{0}{5}=0$.

6. Halla, en función de los valores de p, los siguientes límites:

a) $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}$ b) $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^3-8}{x^2-p}$

Solución:

a) $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{4-2p}{0}\right]$. En consecuencia, si $p\neq 2$ el límite será infinito: no existe el límite.

Pero, si p = 2, se tiene: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{1} = 2$.

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - p} = \left[\frac{0}{4-p}\right]$. En consecuencia, si $p \neq 4$ el límite valdrá 0.

Pero, si p = 4, se tiene: $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = 3$.

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}$ c) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1} - 1}$

Solución:

a) Es una indeterminación: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Puede resolverse transformando la función inicial, multiplicando los términos de la expresión por el conjugado del numerador. Así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} - 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

b) Es similar al anterior. Para resolverlo hay que multiplicar por la expresión conjugada del denominador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(4+x) - (4-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x} = \lim_{x \to 0} 2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) = 2 \cdot (2+2) = 8.$$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{2x-1-1} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{2x-1} + 1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

8. Calcula:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 10x}{x^3 - 3x + 4}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x - 5x^2}$ c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 12x}$

Solución:

Mediante la comparación de grados los tres límites pueden hacerse directamente, resultando:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 10x}{x^3 - 3x + 4} = 0$. b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x - 5x^2} = -\frac{3}{5}$. c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 12x} = \infty$.

9. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3x}}$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{2x - 1}$ c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3 - 2x}}$

Solución:

a) Se escribe como una sola raíz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

b) Se escribe como una sola raíz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x}{(2x-1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x}{4x^2-4x+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

c) Se divide el numerador y el denominador por x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^3-2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^3+5x-3}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{x^3+5x-3}{x^2}}}=\left[\frac{3}{\infty}\right]=0.$$

10. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-5}{\sqrt{3x+4}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$

<u>Solución</u>:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+5x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+5x-3}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^3+5x-3}{x^4}}}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{3x+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-5}{x}}{\sqrt{\frac{3x+4}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$ = (dividiendo numerador y denominador por x) =

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}-\left(\frac{x-2}{x}\right)}{\frac{x-2}{x}}=\frac{\sqrt{1}-1}{1}=0.$$

11. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to2}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)$

<u>Solución</u>:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^2+3x}{x+2}\right)=\log\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x+2}\right)\right]=\log[\infty]=\infty.$$

b) $$\lim_{x\to2}\log\left(\frac{x^2+3x}{x+2}\right)=\log\left[\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+3x}{x+2}\right)\right]=\log\frac{10}{4}=\log\frac{5}{2}.$$

c) $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+2}{x^2+2}\right) = \log\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+2}\right)\right] = \log 0 = -\infty$.

d) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right) = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)\right] = \ln e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x+2}\right)} = \ln e^3 = 3$.

También: $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+2}(\ln e) = 3$.

12. Calcula:

a) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{2}{x+1}\right)$ b) $\lim_{x\to1} \cos\left(\frac{\pi}{x+1}\right)$ c) $\lim_{x\to1} \tan\left(\frac{\pi}{x+1}\right)$ d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{2}{x+1}\right) = \sin\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)\right] = \sin 0 = 0$.

b) $\lim_{x\to1} \cos\left(\frac{\pi}{x+1}\right) = \cos\left[\lim_{x\to1}\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

c) $\lim_{x\to1} \tan\left(\frac{\pi}{x+1}\right) = \tan\left[\lim_{x\to1}\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\right] = \tan\frac{\pi}{2} = [\infty]$ $\to$ No existe.

d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$.

Los límites laterales valen:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = +\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\tan x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = -\infty$

13. Calcula:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x+3}{x-2}\right)$ c) $\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$

Solución:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \left[\frac{\infty}{\sin(\infty)}\right] = \pm\infty$ (El límite no existe) $\to$ Debe observarse que $-1 \le \sin x \le 1$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x+3}{x-2}\right) = \left[\frac{k}{\infty}\right] = 0$ $\to$ Debe observarse que $2 \le \sin x + 3 \le 4$; se hace $\sin x + 3 \to k$

c) $\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = \frac{\pi/4}{\tan(\pi/4)} = \frac{\pi}{4}$. (Recuerda que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = \left[\frac{\infty}{\tan(\infty)}\right] = [?]$ $\to$ Debe observarse que $\lim_{x\to\infty} \tan x$ no existe.

14. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{1/(x-2)}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{x/(x+2)}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)$

<u>Solución</u>:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{1/(x-2)} = \left[3^{1/0}\right]$, que no existe. Puede ser de interés hacer los límites laterales.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} 3^{1/(x-2)} = \left[3^{1/0^-}\right] = \left[3^{-\infty}\right] = 0$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} 3^{1/(x-2)} = \left[3^{1/0^+}\right] = \left[3^{+\infty}\right] = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{x/(x+2)} = 3^{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)} = 3^1 = 3$.

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3^x}{3^{x+1}} - \dfrac{9}{3^{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{9}{3^{x+1}}\right) = \dfrac{1}{3}$.

15. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{1+x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

<u>Solución</u>:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/2}}{1+x} = \dfrac{e^0}{1} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{e^{x/2}}{1+x} = \dfrac{e^{-1/2}}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{x/2}}{1+x} = \dfrac{e^{-\infty}}{-\infty} = \dfrac{0}{-\infty} = 0 \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x/2}}{1+x} = \dfrac{e^{+\infty}}{+\infty} = +\infty$.

→ Aunque a este nivel no se tienen instrumentos para afirmarlo, con la calculadora es evidente: basta con dar a x un valor alto. Por ejemplo si $x = 100$, $f(100) = \dfrac{e^{50}}{101} = 5{,}13 \cdot 10^{19}$.

16. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3} - \dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3} - \dfrac{x^3+3}{x^2}\right)$

<u>Solución</u>:

Surgen indeterminaciones del tipo $[\infty - \infty]$. Para transformarlas se hace la resta inicial.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2)^2}\right) = \left[\dfrac{-1}{0}\right] = \infty$.

b) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x-3}{x-3}-\frac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(2x-3)(x+3)}{x^2-9}-\frac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)=$

$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x-3}-\frac{x^3+3}{x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-1)x^2-(x^3+3)(x-3)}{x^3-3x^2}\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2-3x+9}{x^3-3x^2}=3$

17. Calcula los límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

Solución:

Ambos límites dan lugar a la indeterminación de la forma [∞ – ∞]. Para resolverla se multiplica y divide por la expresión conjugada.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ (dividiendo por $\sqrt{x}$) =

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x+2\sqrt{x}}{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{2}{1+1}=1.$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2+3x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$ (dividiendo por x) = $\frac{5}{2}$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ (Ahora puede dividirse por x)

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(-5x+4)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+4}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{5x+4}{x^2}}+1}=-\frac{5}{2}.$

Asíntotas de una función

18. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$. Halla sus asíntotas y la posición de la curva respecta de ellas.

Solución:

Dom(*f*) = **R** – {–1} ⇒ en *x* = –1 puede tener una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0}\right]=\infty$, *x* = –1 es A.V.

Por la izquierda de *x* = –1, como $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0^-}\right]=+\infty$ ⇒ la rama de la asíntota se va hacia +∞.

Por la derecha de *x* = –1, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0^+}\right]=-\infty$ ⇒ la rama de la asíntota se va hacia –∞.

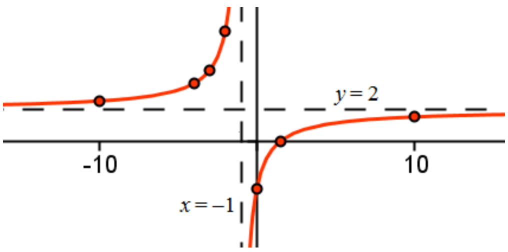
También tiene una asíntota horizontal, la recta *y* = 2, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

Hacia +∞ la función toma valores menores que 2, pues $\dfrac{2x-3}{x+1}<\dfrac{2x}{x+1}<2$. (Compruébalo con la calculadora).

Hacía –∞ toma valores mayores que 2, pues si $x<-1$, $\dfrac{2x-3}{x+1}>\dfrac{2x}{x+1}>2$. (Compruébalo con la calculadora).

Aunque no se pide, algunos de sus puntos son: (–10, 23/9); (–4, 11/3); (–3, 9/2); (–2, 7); (0, –3); (3/2, 0); (2, 1/3); (5, 7/6); (10, 17/11).

Su gráfica es la adjunta.



19. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Indica también la posición de la gráfica de $f(x)$ respecto de sus asíntotas.

Solución:

La función no está definida en *x* = 2. En ese punto tiene una asíntota vertical, pues

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0}=\infty$ → La asíntota es la recta *x* = 2.

Si $x\to 2^-$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty$. Si $x\to 2^+$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=2$ ⇒ la recta *y* = 2 es asíntota horizontal de la función.

Hacia –∞, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=2^-$ ⇒ la curva va por debajo de la asíntota. (Compruébalo con la calculadora).

Hacía +∞, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=2^+$ ⇒ la curva va por encima de la asíntota.

20. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$, halla con detalle sus asíntotas; e indica la posición de la curva respecto a ellas.

Solución:

La función no está definida cuando $x^2-5x+6=0$; esto es, si $x = 2$ o $x = 3$.
Por tanto, Dom(f) = **R** – {2, 3}.
La función tiene dos asíntotas verticales. Las rectas $x = 2$ y $x = 3$, pues:

$$\underset{x\to 2}{lím}\frac{2}{x^2-5x+6}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty \text{ y } \underset{x\to 3}{lím}\frac{2}{x^2-5x+6}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues $\underset{x\to\infty}{lím}\dfrac{2}{x^2-5x+6}=\left[\dfrac{2}{\infty}\right]=0$.

Tiene tres asíntotas, las rectas: $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$.

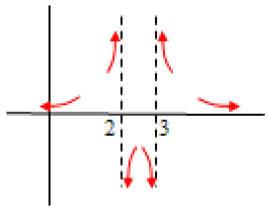
Posición de la curva respecto de las asíntotas.

Si $x\to 2^-$, $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}\to\dfrac{2}{0^+}\to +\infty$.

Si $x\to 2^+$, $f(x)\to\dfrac{2}{0^-}\to -\infty$.

Si $x\to 3^-$, $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}\to\dfrac{2}{0^-}\to -\infty$.

Si $x\to 3^+$, $f(x)\to\dfrac{2}{0^+}\to +\infty$.



Tanto hacia –∞ como hacia +∞ la función se acerca al eje OX por arriba, pues la función toma valores positivos cuando x es grande.

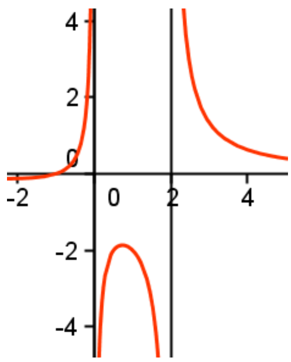
21. Determina las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$.

Solución:

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ no está definida en los ceros del denominador: en las soluciones de $x^2-2x=0$, que son $x = 2$ y $x = 0$. Por tanto, el dominio de la función es **R** – {0, 2}.
Tiene dos asíntotas verticales, pues

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-2x}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty. \text{ La asíntota es } x = 2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-2x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty. \text{ La asíntota es } x = 0.$$



También tiene asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2x}=0$,
(El grado del denominador es mayor que el del denominador).
La asíntota es la recta $y = 0$.

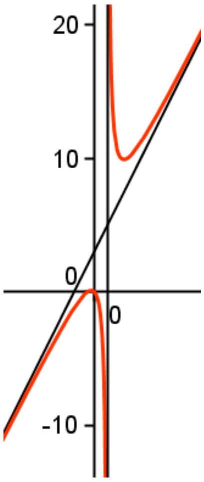
22. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$. Indica la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

Solución:

La función no está definida en x = 1. En ese punto hay una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x}{x-1}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty$$

Cuando $x\to 1^-$, $f(x)\to\dfrac{3}{0^-}\to-\infty$. Y cuando $x\to 1^+$, $f(x)\to\dfrac{3}{0^+}\to+\infty$.



Como el grado del numerador es igual al grado del denominado más 1, también tiene una asíntota oblicua.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-x}=2;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1}=3$$

La asíntota es la recta $y=2x+3$.

Si se hace la resta "curva menos la asíntota" se tiene:

$$f(x)-y=\frac{2x^2+x}{x-1}-(2x+3)=\frac{3}{x-1}$$

Cuando $x\to+\infty$, esa diferencia tiende a 0^+ $\Rightarrow$ la curva va por encima de la recta.
Cuando $x\to-\infty$, esa diferencia tiende a 0^- $\Rightarrow$ la curva va por debajo de la recta.

23. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

Solución:

La función no está definida en x = 0. En ese punto tiene una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2}{x}=0 \quad\Rightarrow \text{la recta } x=0 \text{ es AV.}$$

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al del denominador más 1. La asíntota oblicua es la recta $y = mx + n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2}=1;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)=2$$

La recta $y=x+2$ es la ecuación de la asíntota oblicua.

De otra manera. Descomponiendo (dividiendo) la expresión dada:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x}=x+2+\frac{1}{x}$$ → La asíntota es la recta $y=x+2$, pues para valores de x muy grandes (cuando $x\to+\infty$) $\Rightarrow$ $f(x)\to x+2+0^+$, pues el término $\dfrac{1}{x}$ se hace cada vez más pequeño, aunque positivo, lo que indica que la curva va por encima de la asíntota. De manera análoga, cuando $x\to-\infty$ $\Rightarrow$ $f(x)\to x+2+0^-$, lo que indica que la curva va por debajo de la asíntota.

24. Sea $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}$. Halla su dominio y sus asíntotas.

Solución:

La función dada está definida para todo valor de x distinto de 0.

La curva tiene por asíntota vertical la recta $x = 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-2x^2}{x}=\infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al del denominador más 1.

Como $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}=\dfrac{4}{x}-\dfrac{2x^2}{x}-2x+\dfrac{4}{x}$, la asíntota oblicua es $y=-2x$.

Nota: También podría obtenerse mediante límites.

La asíntota oblicua es $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x^2}=-2 \text{ y } n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x^2}{x}+2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$$

25. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x-2}$ b) $f(x)=2+e^x$ c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ d) $f(x)=e^{-2x}$

Solución:

a) $f(x)=e^{x-2}$ tiene una asíntota horizontal hacia –∞, pues $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-2}=\left[e^{-\infty}\right]=0$. La asíntota es el eje de abscisas.

No tiene más asíntotas.

b) $f(x)=2+e^x$ tiene una asíntota horizontal hacia –∞, pues $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+e^x\right)=\left[2+e^{-\infty}\right]=2$. La asíntota es la recta $y=2$.

c) La función $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$. La asíntota es el eje de abscisas.

d) $f(x)=e^{-2x}$ tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0$. La asíntota es el eje de abscisas.

26. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x-3)$ b) $f(x)=\log\dfrac{1}{x}$ c) $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$

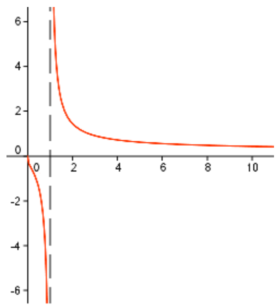
Solución:

a) La función $f(x)=\log(x-3)$ está definida para $x > 3$. Tiene una asíntota vertical en $x = 3$, por la derecha, pues $\lim\limits_{x\to 3^+}\log(x-3)=-\infty$.

b) La función $f(x)=\log\dfrac{1}{x}$ está definida para $x > 0$. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por la derecha, pues $\lim\limits_{x\to 0^+}\log\dfrac{1}{x}=+\infty$. Puede verse que $f(x)=\log\dfrac{1}{x}=\log 1-\log x=-\log x$.

c) La función $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ está definida si $x < -2$ o $x > 2$. Tiene dos asíntota verticales; una a la izquierda de $x = -2$, otra a la derecha de $x = 2$, pues:
$\lim\limits_{x\to -2^-} \log\left(x^2-4\right)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \log\left(x^2-4\right)=-\infty$.

d) La función $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$ está definida para $x > 0$, menos en $x = 1$.



En $x = 1$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\log x}=\infty$.

Recuerda que $\log 1 = 0$.

También tiene otra asíntota horizontal hacia $+\infty$, pues $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\log x}=0$.

Su gráfica, que no es necesario hacer, es la adjunta

Continuidad

27. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=x^3+8$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

i) $f(x)=e^{x-2}$ j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ k) $f(x)=\log(5x-6)$ l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$

m) $f(x)=\tan 2x$ n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ o) $f(x)=\cos(2x-1)$ p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$

Solución:
Las funciones dadas son continuas en todos los puntos de su dominio de definición. Por tanto, en los casos dados, hay que excluir los puntos en los que no están definidas, que son:

a) $f(x)=x^3+8$ es continua en todo **R**. Los polinomios son funciones continuas siempre.

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ es continua en **R** – {–2}. Puede observarse que en $x = -2$ se anula el denominador.
Las funciones racionales son continuas siempre, menos en los ceros del denominador.

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ es continua en **R** – $\left\{-\sqrt{8},\sqrt{8}\right\}$.

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ es continua para todo $x \geq 2$. Estas funciones están definidas cuando el radicando no es negativo.

f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$ es continua cuando $x^2-2x>0$; esto es, cuando $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.
Si no recuerdas cómo se resuelve $x^2-2x>0$, pincha AQUÍ.
i) $f(x)=e^{x-2}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.
j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ es continua en **R** – {0}.
k) $f(x)=\log(5x-6)$ es continua para todo $x > 6/5$. Para valores de $x \le 6/5$ la función no está definida.
l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.
m) $f(x)=\tan 2x$ es continua para todo $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2}$. Recuérdese que la tangente, tan α, no está definida cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. En este caso, $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2}$.
n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ es continua en **R** – {1}.
o) $f(x)=\cos(2x-1)$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.
p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

28. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{si } x\le 0\\ x+1, & \text{si } x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0\\ \sin x, & \text{si } x>0\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x\le 1\\ \ln(2-x) & \text{si } x>1\end{cases}$

Solución:
Las funciones definidas a trozos son continuas cuando lo son en cada intervalo y, además, sus límites laterales son iguales en los puntos de división del dominio.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ → Cada función es continua en su intervalo de definición respectivo; pero es discontinua en $x = 1$, pues en ese punto los límites laterales no son iguales:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$.

b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ → En este caso, la función es continua en todo **R**, pues en $x = 1$ los límites laterales coinciden.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)=0$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$.

c) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{si } x\le 0\\ x+1, & \text{si } x>0\end{cases}$ → La función está definida en todo **R**. La única dificultad para su continuidad se da en $x = 0$.
Como los límites laterales coinciden, la función también es continua en $x = 0$.
En efecto:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0\\ \sin x, & \text{si } x>0\end{cases}$ → La función está definida en todo **R**. La función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$, pero ese punto está en el segundo “trozo”.
En $x = 0$, los límites laterales valen:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$.
Como no coinciden, la función no es continua en $x = 0$.

e) $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1\end{cases}$ → La función no está definida en $x = 2$. Por tanto, en ese punto es discontinua.
El otro punto conflictivo es $x = 1$. Hay que estudiar los límites laterales.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1}=e^0=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x-2}=1$.
Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

f) $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x\le 1\\ \ln(2-x) & \text{si } x>1\end{cases}$ → La función no está definida para $x \ge 2$. Por tanto, sólo puede ser continua si $x < 2$. Por otra parte, en $x = 1$ puede presentar dificultad: hay que estudiar los límites laterales en ese punto.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$.
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(2-x)=\ln 1=0$.
Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

29. a) ¿Cuántas discontinuidades tiene la función $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2-3x+2}$?
b) ¿Qué valor hay que dar a $f(2)$ para que la discontinuidad de pueda evitarse?
Solución:
a) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2-3x+2}$ no está definida en los puntos $x = 1$ y $x = 2$. En esos puntos es discontinua.
b) La discontinuidad puede evitarse cundo exista el límite en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\frac{-1}{1}=-1.$$

La discontinuidad puede evitarse definiendo $f(2)=-1$.

30. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$, calcula su límite en los puntos x = 0, x = 1, x = 2 y x = 3.
¿En qué puntos es discontinua la función? ¿Tiene alguna discontinuidad evitable?
Solución:
La función dada se puede expresar en la forma $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$; que podría simplificarse cuando $x \neq 0$ y 3.
Con esto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{-3}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\frac{-2}{0}\right]=\infty;\quad \lim_{x\to 2}\frac{x(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\frac{-2}{0}\right]=\infty.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{3}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

Es discontinua, por no estar definida, en los puntos x = 0, x = 1, x = 2 y x = 3.
En los puntos x = 0 y x = 3 se puede evitar la discontinuidad, pues existe el límite. Se evitaría definiendo $f(0)=f(3)=\dfrac{1}{2}$.

31. Estudia la continuidad de función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$. ¿Si tuviese alguna discontinuidad evitable cómo podría evitarse?
Solución:
La función es discontinua cuando $1-x^6=0 \Rightarrow x=-1$ o $x=1$.
La discontinuidad puede evitarse si existe el límite.
En $x = -1$, como $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\dfrac{-2}{0}\right]=\infty$, la discontinuidad no puede evitarse (es de salto infinito). La función tiene una asíntota vertical: x = –1.
En x = 1, como $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1+x^3)(1-x^3)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5}{(1+x^3)}=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, en x = 1, la discontinuidad puede evitarse definiendo $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

32. Determina el tipo de discontinuidades que presenta la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$.
Solución:
Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2+7x-8=0 \Rightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\begin{cases}-8\\ 1\end{cases}$.
En x = 1 la discontinuidad es evitable, pues existe el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+7x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+8)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+8}=\frac{2}{9}$$

En x = –8 la discontinuidad es inevitable, pues no existe el límite:

$$\underset{x\to -8}{lím} \frac{x^2-1}{x^2+7x-8} = \left[\frac{63}{0}\right] = \infty$$

33. La función $f(x) = \dfrac{x^2+kx+4}{x^2-4}$ es discontinua en los puntos x = –2 y x = 2. Podría evitarse alguna discontinuidad para algún valor de k?

Solución:

La función no está definida cuando x = ±2; en esos puntos se anula el denominador. Pero si el numerador de la función fuese 0 es posible que la discontinuidad pueda evitarse en algún caso. Para ello es necesario que los valores x = –2 o x = 2 sean raíz del numerador.

- El valor x = –2 es raíz de x^2+kx+4 si $4-2k+4=0 \Rightarrow$ Si k = 4.

En este caso, $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \dfrac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x-2} = 0$. Por tanto, la discontinuidad puede evitarse en x = –2. (No se puede evitar en x = 2).

- El valor x = 2 es raíz de x^2+kx+4 si $4+2k+4=0 \Rightarrow$ Si k = –4.

En este caso, $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$. La discontinuidad puede evitarse en x = 2. (No puede evitarse en x = –2).

34. ¿Para qué valores de a es continua en x = 1 la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 2x+a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$?

Solución:

En el punto x = 1 deben ser iguales los límites laterales.

Por la izquierda:

$$\underset{x\to 1^-}{lím} f(x) = \underset{x\to a^-}{lím} x^2 = 1$$

Por la derecha:

$$\underset{x\to 1^+}{lím} f(x) = \underset{x\to 1^+}{lím}(2x+a) = 2+a$$

Como deben ser iguales: $1 = 2+a \Rightarrow a = -1$.

35. Determina los valores de a para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \le 0 \\ 2a+\sin x & 0 < x \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

Solución:

Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. El único punto conflictivo es x = 0, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

En ese punto la función está definida, siendo $f(0) = e^{a\cdot 0} = 1$; para que sea continua, además, debe tener límite en x = 0 y coincidir con su valor de definición.

Por la izquierda: Si $x \to 0^-$, $f(x) = e^{ax} \to 1$.

Por la derecha: Si $x \to 0^+$, $f(x) = 2a + \sin x \to 2a$.

Como ambos límites deben ser iguales: 1 = 2a ⇒ a = 1/2.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} e^{x/2} & x \le 0 \\ 1+\sin x & 0 < x \end{cases}$.

36. ¿Puede la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x}, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ ser continua en toda la recta real para algún valor de *a*?

Solución:

Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. (Observa que $\ln(1-x)$ está definida para valores de $x < 1$).

Será continua en $x = 0$ cuando los límites laterales sean iguales.

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(a+\ln(1-x)\right)=a+\ln 1=a$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2e^{-x}=0\cdot 1=0$$

Luego, si $a = 0$ la función dada será continua en toda la recta real.

37. Halla para qué valores de *a* la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq a \\ a+2 & x>a \end{cases}$ es continua en todo **R**.

Solución:

En el punto $x = a$ deben ser iguales los límites laterales.

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} x^2=a^2$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\left(a+2\right)=a+2$$

Como deben ser iguales:

$$a^2=a+2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=-1; a=2 .$$

La función es continua cuando $a = –1$ o $a = 2$.

38. Determina los valores de *a* y *b* que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x-a & x<-\pi \\ \cos x+b & -\pi\leq x<0 \\ e^x-1 & x\geq 0 \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

Solución:

Hay que estudiar los límites laterales en los puntos $x = –\pi$ y $x = 0$. En cada caso esos límites deben ser iguales.

- En $x = \pi$:

Por la izquierda:

$$\underset{x\to\pi^-}{lím} f(x)=\underset{x\to\pi^-}{lím}\left(\sin x-a\right)=\sin\pi-a=-a$$

Por la derecha:

$$\underset{x\to\pi^+}{lím} f(x)=\underset{x\to\pi^+}{lím}\left(\cos x+b\right)=\cos\pi+b=-1+b$$

Como deben ser iguales: $-a=-1+b \Rightarrow a=1-b$.

- En $x = 0$:

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\cos x + b) = \cos 0 + b = 1 + b$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(e^x - 1) = e^0 - 1 = 0$$

Como deben ser iguales: $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} \sin x - 2 & x < -\pi \\ \cos x - 1 & -\pi \le x < 0 \\ e^x - 1 & x \ge 0 \end{cases}$

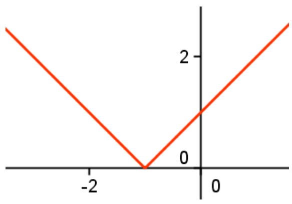
39. Determina la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = |x - 1|$ b) $f(x) = |x^2 - 2x|$

Solución:

Ambas funciones pueden definirse a trozos.

a) $f(x) = |x+1| = \begin{cases} -(x+1), & \text{si } x < -1 \\ x+1, & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ → El único punto conflictivo es $x = -1$.



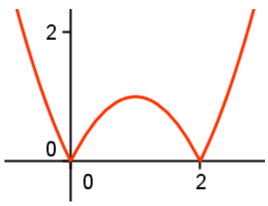
Se estudian los límites laterales en $x = -1$.

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(-(x+1)) = 0$, y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x+1) = 0$,

se deduce que la función es continua en $x = -1$.

Su gráfica es la adjunta.

b) $f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 2x, & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$. Hay que estudiar lo que pasa en $x = 0$ y $x = 2$.



En ambos casos coinciden los límites laterales y, en consecuencia, la función es continua en todo **R**. En efecto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2 - 2x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^2 + 2x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x^2 + 2x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2 - 2x) = 0$$

Otros problemas

40. ¿Existe algún valor de p para el que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - p^2}{x^2 + 3x + 2}$ tenga solamente una asíntota vertical?

Solución:

La función pueden tener asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador: en las soluciones de $x^2 + 3x + 2 = 0$, que son $x = -1$ y $x = -2$.

Como $f(x) = \dfrac{x^2 - p^2}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{(x-p)(x+p)}{(x+1)(x+2)}$:

• Si $p = -1$, $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - p^2}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2 \Rightarrow$ en $x = -1$ no habría asíntota.

Seguiría habiéndola en $x = -2$, pues $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 - p^2}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x-1}{x+2} = \infty$

• Si $p = -2$, habría una asíntota vertical en $x = -1$; pero no en $x = -2$. (El razonamiento es análogo).

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, pues $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2 - p^2}{x^2+3x+2} = 1$, cualquiera que sea el valor de p.

41. Aplicando alguno de los siguientes resultados:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{px} = e^p$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{px}\right)^{px} = e$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x} = e^p$

resuelve los límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x}$

Solución:

a) Es el caso 1), con $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}$

b) Ajustando constantes y aplicando el resultado 2) $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}} = \left[\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2} = e^{1/2}$$

c) Aplicando el resultado 3) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{(-4)}{x}\right)^{x} = e^{-4}$

42. Aplicando la transformación $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$, halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{2x-1} = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3}\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)} = e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1} = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = e^2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+5x-1}-1\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x+1}{x^2+5x-1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)} =$

$= e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^2+9x-1}{2x^2+10x-2}\right)\right)} = e^{-4}$

43. Comprueba que la función $f(x) = 2x + \sin x$ no tiene asíntotas.
Solución:
La función está definida para todo **R**. Por tanto no tiene asíntotas verticales.
Tampoco tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x+\sin x) = \pm\infty$.
Veamos si tiene oblicuas: $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x} = 2$; $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sin x)$, que no existe.

Por tanto, tampoco hay asíntota oblicua.

44. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

b) $f(x) = e^{-x^2}$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x) = e^{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$

Solución:
a) $f(x) = e^{-x^2}$ tiene una asíntota horizontal hacia ±∞, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \left[e^{-\infty}\right] = 0$. La asíntota es el eje de abscisas.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ no está definida en $x = 1$. En este caso conviene considerar los límites laterales, cumpliéndose:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{1/0^-}\right] = \left[e^{-\infty}\right] = 0$. Por la izquierda no hay asíntota vertical.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{1/0^+}\right] = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty$. La recta $x = 1$ es asíntota vertical por la derecha.

Además, tiene una asíntota horizontal hacía ±∞, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{0}\right] = 1$. La asíntota es la recta $y = 1$. Hacia –∞ la asíntota va por encima de la curva; hacia +∞, la asíntota va por debajo.

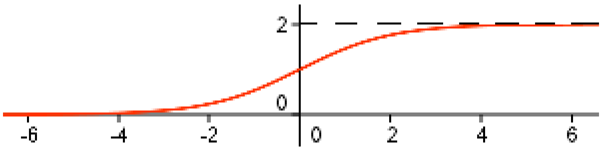
c) $f(x) = e^{x^2}$ no tiene asíntotas verticales, pues está definida en todo **R**. Tampoco tiene asíntotas horizontales ni oblicuas, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{x^2} = \left[e^{\infty}\right] = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x} = \infty$. (Para hacer este segundo límite se necesita aplicar L´Hôpital. Se verá en el Tema 8: problema 54d).

d) La función $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ se conoce con el nombre de función logística. Tiene dos asíntotas horizontales, una hacia –∞ y otra hacia +∞. En efecto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+e^{-x}}=\left[\frac{2}{1+e^{+\infty}}\right]=0 \Rightarrow$$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^{-x}}=\left[\frac{2}{1+e^{-\infty}}\right]=\left[\frac{2}{1}\right]=2 \Rightarrow$$ La recta $y = 2$ es también asíntota horizontal.

Su gráfica es la que se indica.



45. Dependiendo de los valores de *p*, ¿tiene la función $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-px+1}$ alguna discontinuidad? Si la tuviese, ¿podría evitarse en algún caso?

Solución:

Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2-px+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4}}{2}$.

Por tanto, si $p > 2$ o $p < -2$, la función tiene dos discontinuidades; si $p = \pm 2$, tiene una discontinuidad; en caso contrario es continua para todo *x*.

Para $p = 2$, la función es: $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+1}$, que es discontinua en $x = 1$.

Como $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^2-2x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x-1}=\infty$, la discontinuidad no puede evitarse.

En los demás casos (cuando $p > 2$ o $p \le -2$) la discontinuidad no puede evitarse, pues en todos ellos el límite en $x=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4}}{2}$ se hace infinito.

46. Sea $f(x)=\begin{cases} ax+x^2, & -2\le x<0 \\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\le 3\end{cases}$. Halla los valores de *a* y *b* para que $f(x)$ sea continua en el intervalo [–2, 3], sabiendo que también se cumple que $f(-2)=f(3)$.

Solución:

La función está definida mediante dos funciones, ambas continuas en sus respectivos intervalos de definición. Por tanto, el único punto que plantea dificultades es $x = 0$.

Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(ax+x^2\right)=0$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(b+\sqrt{x+1}\right)=b+1$

Por tanto: $b+1=0 \Rightarrow b = -1$.

La función será: $f(x)=\begin{cases} ax+x^2, & -2\le x<0 \\ -1+\sqrt{x+1}, & 0\le x\le 3\end{cases}$.

Si $f(-2)=f(3) \Rightarrow -2a+4=-1+\sqrt{4} \Rightarrow -2a=-3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

En consecuencia, la función pedida es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+x^2, & -2\le x<0 \\ -1+\sqrt{x+1}, & 0\le x\le 3 \end{cases}$.

47. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{si } x<0 \\ x^2+2x, & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ es continua en el punto $x = 0$.

Solución:

Para que sea continua deben coincidir los límites laterales en $x = 0$.

Si $x\to 0^-$, $f(x)=ax+b \to b$.

Si $x\to 0^+$, $f(x)=x^2+2x \to 0 \Rightarrow b = 0$.

El valor de *a* puede ser cualquiera. Esto es, las funciones $f(x)=\begin{cases} ax, & \text{si } x<0 \\ x^2+2x, & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ son todas continuas en $x = 0$.