EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 10 y 11

1. (1,5 puntos) La gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:

Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -4} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

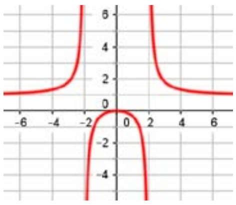
d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

¿En qué puntos es discontinua?

2. (1 punto) La gráfica de la función $f(x)$ es la adjunta.

A partir de su gráfica determina:

a) Su dominio y recorrido. b) Sus asíntotas. c) $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$



3. (2 puntos) Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{x^2+5x-6}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

4. (2 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-x$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

5. (2 puntos) Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) (0,5 puntos) $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) (0,5 puntos) $g(x)=4x^2(7x-2)^3$. ¿Cuánto vale $g'(0)$?

c) (0,6 puntos) $h(x)=\frac{2x}{x^2+4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

d) (0,4 puntos) $j(x)=\sqrt{x^3-2x+1}$.

6. (1,5 puntos) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$.

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2017

Soluciones:

1. (1,5 puntos) La gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:

Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -4} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$ e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ f) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

¿En qué puntos es discontinua?

Solución:

a) $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$. Aunque la función no está definida en $x = -4$, el valor de la función se acerca a 0 por ambos lados: por la izquierda y por la derecha.

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$. Cuando $x \to 0^-$, la función toma valores cada vez mayores.

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$.

Es obvio que en $x = 2$ la función no tiene límite: los límites laterales deben existir y ser iguales.

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe: no coinciden los límites laterales.

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

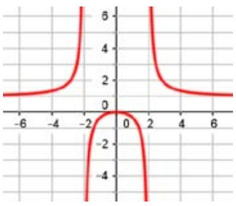
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La función se acerca cada vez más al eje *OX*.

- La función es discontinua en $x = -4$, por no estar definida; en $x = 0$ y en $x = 2$, por no existir límite.

2. (1 punto) La gráfica de la función $f(x)$ es la adjunta.

A partir de su gráfica determina:

a) Su dominio y recorrido. b) Sus asíntotas. c) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$



Solución:

a) Dom(f) = **R** – {–2, 2}. Im(f) = **R** – (0, 1].

b) Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.
La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

c) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. Es lo que justifica que $y = 1$ sea asíntota horizontal, tato por la izquierda como por la derecha.

3. (2 puntos) Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}$ b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}=\frac{3-3}{1+5-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{x+6}=\frac{3}{7}.$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

4. (2 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-x$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

Solución:

La ecuación de la recta tangente es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

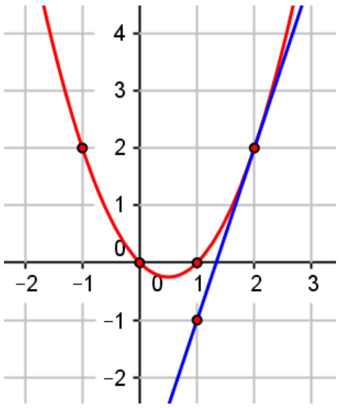
$$f(x)=x^2-x \Rightarrow f'(x)=2x-1 \Rightarrow f(2)=2;\ f'(2)=3$$

Luego, la recta es: $y-2=3(x-2)\Rightarrow y=3x-4$.

Dando valores se pueden obtener algunos puntos y representar tanto la curva como la recta.

Para la curva: (0, 0); (1, 0); (2, 2); (3, 6); (–1, 2).

Para la recta: (2, 3); (1, –1).



5. (2 puntos) Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) (0,5 puntos) $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) (0,5 puntos) $g(x)=4x^2(7x-2)^3$. ¿Cuánto vale $g'(0)$?

c) (0,6 puntos) $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

d) (0,4 puntos) $j(x)=\sqrt{x^3-2x+1}$.

Solución:

a) (0,5 puntos) $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-x-2$.

$$3x^2-x-2=2\Rightarrow 3x^2-x-4=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm 7}{6}=\begin{cases}4/3\\ -1\end{cases}.$$

b) (0,5 puntos) $g(x)=4x^2(7x-2)^3 \Rightarrow g'(x)=8x(7x-2)^3+4x^2\cdot 3(7x-2)^2\cdot 7 \Rightarrow g'(0)=0$.

c) (0,6 puntos) $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+4} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{2\cdot\left(x^2+4\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2} \to$

$$\frac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \Rightarrow -2x^2+8=0 \Rightarrow x=\pm 2 .$$

d) (0,4 puntos) $j(x)=\sqrt{x^3-2x+1} \Rightarrow j'(x)=\dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+1}}$.

6. (1,5 puntos) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$.

<u>Solución</u>:

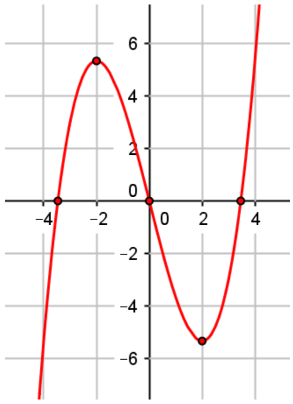
Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

Si $x < -2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $-2 < x < 2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. Además, en $x = -1$ se tiene un máximo.

Si $x > 2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. Además, en $x = 2$ se tiene un mínimo.



- Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.

Alcalá de Henares, 15 de mayo de 2017