ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2015

1. Aragón, junio 15

1. (3 puntos) a) (1,5 puntos) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y y z son números reales.

Determina x, y y z para que el vector $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $MA=B$.

b) (1,5 puntos) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a + b = 0$, $c = a$.
Determine si el sistema $NX = B$ es compatible determinado.

Solución:

a) Para los vectores dados:

$$MA=B \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z+3x=0 \\ z+2x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}.$$

Sistema que puede resolverse aplicando Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3-2E1 \end{matrix}\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -5y-7z=-3 \\ -y-5z=-1 \end{cases} \Rightarrow E2-5E3\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 18z=2 \\ -y-5z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ z=1/9 \\ -y-5z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \to x+8/9+3/9=1 \to x=-2/9 \\ z=1/9 \\ -y-5/9=-1 \to y=4/9 \end{cases}$$

b) Si $a \neq 0$, $a + b = 0 \to b = -a$, $c = a$, con la matriz y los vectores dados se tiene:

$$NX=B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema será compatible determinado si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Par ello es necesario que su determinante sea distinto de 0.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-2=-4$, es sistema será compatible determinado.

<u>**2**. Asturias, junio 15</u>

Dados los números reales *a, b, c, x,* se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de *x* para los cuales el determinante de *A* es nulo para cualesquiera valores de *a, b, c*. (0,75 puntos)
b) Si *x* = 1 y *b* = *c* = 2, halla los valores de *a* para los cuales *A* tiene inversa. (0,75 puntos)
c) Halla, si es posible, la inversa de *A* cuando *x* = 0 y *b* = *c* = *a* =1. (1 punto)
<u>Solución</u>:
a) Aplicando las propiedades de los determinantes se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a\cdot(x-b)\cdot(x-c)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a\cdot(x-b)\cdot(x-c) = 0 \Rightarrow a = 0; x = b; x = c$$

Luego, los valores de *x* para los cuales el determinante de *A* es nulo para cualesquiera valores de *a, b, c,* son: *x* = *b* o *x* = *c*. (En el supuesto de *a* = 0, *x* podría tomar cualquier valor).

b) Si *x* = 1 y *b* = *c* = 2 $\Rightarrow$ $|A| = a\cdot(1-2)\cdot(1-2) = a$.
Por tanto, si *x* = 1 y *b* = *c* = 2, la matriz *A* tendrá inversa siempre que *a* ≠ 0.

c) Cuando *x* = 0 y *b* = *c* = *a* =1, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; el valor de $|A| = 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$.

La matriz inversa será: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Baleares, junio 15

1. a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} a\cdot x+y+z &= a^2,\\ x-y+z &= 1,\\ 3x-y-z &= 1,\\ 6x-y+z &= 3a \end{aligned}\right\} \qquad \text{(7 punts)}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

Solución:

a) El sistema será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes, A, sea igual al rango de la matriz ampliada, M.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{array}\right)=M$$

Haciendo el determinante de M se tiene:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix}=\begin{matrix} \\ \\ F3-F2\\ F4-F2 \end{matrix}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} a & 1 & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=4(3a-1)-2\left(a(-3a+1)-(3a-1-5)+5a^2\right)=-4(a-2)^2$$

Por tanto:

- Si $a\neq 2$, el rango de M es 4 $\Rightarrow$ El sistema será incompatible, pues r(A) ≤ 3 siempre.
- Si $a = 2$, las matrices quedan:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)=M \to \begin{matrix} F2+F1\\ F3+F1\\ F4+F1 \end{matrix} \to A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 2 & 5\\ 5 & 0 & 0 & 5\\ 8 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)=M$$

Puede observarse que $F4 = F2 + F3$, y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=10\neq 0$ $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 3.

Luego, si $a = 2$ el sistema será compatible determinado, pues el rango es igual al número de incógnitas.

b) Si $a = 2$, el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} 2x+y+z=4\\ 3x+2z=5\\ 5x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1\\ z=1\\ x=1 \end{cases}$

4. Cantabria, junio 15

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}$.

a) Calcula los vectores $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tales que $A\vec{v}=\vec{v}$.

b) Calcula la matriz inversa de *A*.

Solución:

a) $A\vec{v}=\vec{v} \Rightarrow A\vec{v}-\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow (A-I)\vec{v}=\vec{0}$.

Esto es:

$$\left(\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & 5 & 3\\ 6 & -7 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Se trata del sistema homogéneo: $\begin{cases}-2x+3y+z=0\\ -4x+5y+3z=0\\ 6x-7y-5z=0\end{cases}$.

Se transforma por Gauss como sigue:

$$\begin{cases}-2x+3y+z=0\\ -4x+5y+3z=0\\ 6x-7y-5z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\\ E2-2E1\\ E3+3E1\end{matrix}\begin{cases}-2x+3y+z=0\\ -y+z=0\\ 2y-2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2z+3y+z=0\\ y=z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$$

Luego, los vectores que cumplen la condición pedida son: $\vec{v}=t\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

b) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}Adj(A)^t \to |A|=-1\cdot(-3)-3\cdot(-2)+1\cdot(-8)=1$; $AdjA=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -8\\ 5 & -2 & 11\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3\\ 2 & -2 & -1\\ -8 & 11 & 6\end{pmatrix}$$

5. Cantabria, septiembre 15

Considere el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro *a*

$$\begin{cases}ax+2ay+az=a+1\\ x+(a+1)y+(2-a)z=2a\end{cases}$$

a) (1,75 puntos) Calcule los valores de *a* para que el sistema tenga solución.

b) (1,5 puntos) Calcule todas las soluciones cuando *a* = 1 y cuando *a* = –1.

Solución:

a) El sistema será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes, *A*, sea igual al rango de la matriz ampliada, *M*.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a & a & a+1 \\ 1 & a+1 & 2-a & 2a \end{array}\right)=M$$

Para determinar el rango de *A* pueden elegirse los menores $|A_1|=\begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}=a^2-a$ y

$|A_2|=\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 2-a \end{vmatrix}=-a^2+a$.

Ambos se anulan cuando a = 0 o a = 1. En esos dos casos el rango de *A* es 1; en caso contrario, el rango valdrá 2.

Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y 2, el rango de *A* es 2; y lo mismo sucede con el rango de $M \Rightarrow$ El sistema será compatible indeterminado, con un grado de indeterminación.
- Si a = 0, las matrices quedan: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)=M$.

Resulta evidente que: r(*A*) = 1 y r(*M*) = 2. En este caso, el sistema será incompatible.

- Si a = 1, las matrices quedan: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=M$.

Resulta evidente que: r(*A*) = 1 y r(*M*) = 1. En este caso, el sistema será compatible con dos grados de indeterminación.

b) Para a = 1, el sistema queda: $\{x+2y+z=2$. Su solución puede escribirse también en la forma $\begin{cases} x=2-2y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$, o bien: $\begin{cases} x=2-2h-t \\ y=h \\ z=t \end{cases}$. (Es un plano de soluciones).

Para a = –1, el sistema queda:

$$\begin{cases} -x-2y-z=0 \\ x+3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1+E2 \\ \end{matrix} \begin{cases} -2y+2z=-2 \\ x+3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ x=-2-3z \end{cases} \to \text{(Si } z=t) \to \begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

6. <u>Cantabria, septiembre 15</u>

El precio de 1 kilo de manzanas, 2 de peras y una docena de huevos es de 5 euros. El precio de 2 kilos de manzanas, 4 kilos de peras y tres docenas de huevos es de 12 euros. El precio de 5 docenas de huevos y 2 kilos de peras es de 11 euros y 50 céntimos.

a) [2 PUNTOS] Calcule el precio del kilo de peras, el kilo de manzanas y la docena de huevos.

b) [1,25 PUNTOS] Pedro ha comprado dos kilos de manzanas y tres kilos de peras. Carmen ha comprado un kilo de manzanas, una docena de huevos y dos kilos de peras. ¿Quién ha gastado más dinero?

<u>Solución</u>:

a) Si *m*, *p* y *h* son los precios de un kilo de manzanas, un kilo de peras y de una docena de huevos, respectivamente, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} m+2p+h=5 \\ 2m+4p+3h=12 \\ 2p+5h=11,50 \end{cases}.$$

Aplicando transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} m+2p+h=5 \\ 2m+4p+3h=12 \\ 2p+5h=11,50 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ \end{matrix} \begin{cases} m+2p+h=5 \\ h=2 \\ 2p+5h=11,50 \end{cases} \Rightarrow \text{(Sustituyendo)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2p+h=5 \to m+1,50+2=5 \to m=1,50 \\ h=2 \\ 2p+10=11,50 \to p=0,75 \end{cases}$$

b) Pedro gasta 2 · 1,50 + 3 · 0,75 = 5,25 €.
Carmen gasta 1,50 + 2 + 2 · 0,75 = 5 €.

<u>7. Castilla–La Mancha, junio 15</u>
a) Despeja *X* en la ecuación matricial $X\cdot A+B=X$, donde *A*, *B* y *X* son matrices cuadradas de orden 3. (1 punto)

b) Calcula *X*, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $X\cdot A+B=X \Rightarrow X\cdot A-X=-B \Rightarrow X\cdot A-X\cdot I=-B \Rightarrow X\cdot(A-I)=-B \Rightarrow X=-B\cdot(A-I)^{-1}$.

Esta solución supone que existe $(A-I)^{-1}$, lo que exige que $|A-I|\neq 0$.

Si la condición anterior no se cumpliera, el valor de la matriz *X* habría que determinarlo planteando un sistema de ecuaciones.

b) Para las matrices dadas: $(A-I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $|A-I|=-1$, la matriz tiene inversa.

La inversa es: $(A-I)^{-1}=\dfrac{1}{|A-I|}\cdot\left((A-I)_{ij}\right)^t=\dfrac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X=-B\cdot(A-I)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=-\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Castilla–La Mancha, junio 15

He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es *x*, la de las decenas *y*, y la de las unidades *z*, puede expresarse como 100*x* + 10*y* + *z*. (1,5 puntos)

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. (1 punto)

Solución:

Si el número buscad se escribe como "*xyz*" y se entiende que invertir el orden de sus cifras es escribirlo como "*zyx*", entonces los datos se pueden expresar como sigue:

$$y = \frac{x+z}{2};\quad "xyz" - "zyx" = 198;\quad x+y+z=12$$

Esto genera el sistema: $\begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 100x+10y+z-(100z+10y+x)=198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 99x-99z=198 \end{cases}$

Por Gauss:

$$\begin{matrix} \\ E2-E1 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y=-12 \\ 99x-99z=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ y=4 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2+E3 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ x-z=2 \to z=3 \end{cases}$$

El número buscado es 543.

9. Castilla–La Mancha, septiembre 15

a) Despeja *X* en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde *A* y *X* son matrices cuadradas de orden 3. (1 punto)

b) Calcula *X*, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 punto)

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}. (0,5 puntos)

Solución:

a) $A \cdot X - A = 2A^2 \Rightarrow A \cdot (X - I) = 2A^2 \to$ (Si *A* tiene inversa) $\Rightarrow X - I = 2A \Rightarrow X = 2A + I$

b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, pues $|A| = -1 \neq 0$.

La adjunta de *A* es:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto: $X = 2A + I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Como $\left|A\right| = -1$ y $\left|A^n\right| = \left|A\right|^n \Rightarrow \left|A^{101}\right| = \left|A\right|^{101} = (-1)^{101} = -1$ y $\left|A^{1000}\right| = \left|A\right|^{1000} = (-1)^{1000} = 1$

<u>**10**. Castilla y León, junio 15</u>

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla los valores de *m* para que la matriz A^{10} tenga inversa.
b) Para *m* = 0, calcula, si es posible, la matriz inversa de *A*.
<u>Solución</u>:
a) La matriz A^{10} tendrá inversa cuando $\left|A^{10}\right| \neq 0$. Esto es, cuando $\left|A\right| \neq 0$, pues $\left|A^{10}\right| = \left|A\right|^{10}$.

Como $\left|A\right| = \begin{vmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m+1)(m-1) \Rightarrow \left|A\right| \neq 0$ si $m \neq -2; -1; 1$

Luego la matriz tendrá inversa siempre que $m \neq -2$, –1 y 1.

b) Para *m* = 0, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, siendo $\left|A\right| = -2$.

La matriz de los adjuntos es: $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|} \cdot \left(A_{ij}\right)^t = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>**11**. Castilla y León, junio 15</u>

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = -1 \\ (1-2m)x - y = m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro *m*. (1,25 puntos)
b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única. (0,75 puntos)
c) Calcular los valores de *m* para que *x* = –3, *y* = 2 sea solución. (0,5 puntos)
<u>Solución</u>:
a) Voy a aplicar el método de reducción (Gauss).

$$\begin{cases} x + my = -1 \\ (1-2m)x - y = m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ m \cdot E2 \end{matrix} \begin{cases} x + my = -1 \\ m(1-2m)x - my = m^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + my = -1 \\ m(1-2m)x + x = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + my = -1 \\ \left(-2m^2 + m + 1\right)x = m^2 - 1 \end{cases} \rightarrow$$

La segunda ecuación:

$$\left(-2m^2 + m + 1\right)x = m^2 - 1 \Leftrightarrow -2(m-1)(m+1/2)x = (m+1)(m-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{(m+1)(m-1)}{-2(m-1)(m+1/2)}$$

Si se observa la solución obtenida se concluye:

- Si $m\neq 1$ y $m\neq -1/2$ no hay ninguna dificultad para calcular *x*: el sistema será compatible determinado.
- Si $m=1$, el valor de *x* queda indeterminado: la segunda ecuación quedaría $0x=0$, que es cierto para cualquier valor de *x*.
- Si $m = -1/2$, el valor de *x* no tiene sentido: la segunda ecuación quedaría $0x=-3/4$, que es absurdo.

<u>Observación</u>: Aplicando Rouché se llega a lo mismo.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{array}\right)=M$

$$\to\ |A|=\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix}=-1-m+2m^2=2(m-1)(m+1/2)$$

Por tanto:

- Si $m\neq 1$ y $m\neq -1/2$ $\Rightarrow$ r(A) = 2 = r(M): el sistema será compatible determinado.
- Si $m=1$, las matrices quedan:

  $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=M\Rightarrow$ r(A) = 1 = r(M): el sistema es compatible indeterminado.
- Si $m = -1/2$, $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -1 \\ 2 & -1 & -1/2 \end{array}\right)=M\Rightarrow$ r(A) = 1, r(M) = 2: es sistema es incompatible.

b) La solución no es única cuando $m = 1$. En este caso, el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ -x-y=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=t \\ y=-1-t \end{cases}$$

c) Si los valores $x = -3$, $y = 2$ son solución del sistema, entonces:

$$\begin{cases} -3+2m=-1 \\ -(1-2m)3-2=m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2m=2 \\ 6m-5=m \end{cases}\Rightarrow m=1$$

Luego, $x = -3$, $y = 2$ es una de las infinitas soluciones el sistema, ya que cuando $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

<u>**12**. Castilla y León, septiembre 15</u>

Consideremos el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ (a+3)y=0 \\ (a+2)z=1 \end{cases}$.

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro *a*.

b) Resolverlo cuando sea posible.

<u>Solución</u>:

a) El sistema puede discutirse despejando en la segunda y tercera ecuación.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ (a+3)y=0 \\ (a+2)z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ y=\dfrac{0}{a+3} \\ z=\dfrac{1}{a+2} \end{cases}$$

En la segunda ecuación se observa que $y = 0$ siempre que $a \neq -3$.
En la tercera ecuación se observa que z no está definida cuando $a = -2$.
Por tanto:

- Si $a = -2$ el sistema no tiene solución: es incompatible.
- Si $a = -3$, la incógnita y queda indeterminada: $y = t$. El valor de z será, $z = -1$; mientras que de $x+2t-3=4 \Rightarrow x=7-2t$. El sistema resulta compatible indeterminado.
- Para cualquier otro valor, $a \neq -2$ y -3, el sistema será compatible determinado.

b) Por lo dicho más arriba, el sistema es compatible cuando $a \neq -2$.

En el caso particular de $a = -3$, la solución es la dada: $\begin{cases} x=7-2t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$.

Para cualquier otro valor, $a \neq -2$ y -3, sustituyendo en la primera ecuación, $x+2y+3z=4$, los valores $y=\dfrac{0}{a+3}=0$, $z=\dfrac{1}{a+2}$, se tendrá: $x+\dfrac{3}{a+2}=4 \Rightarrow x=\dfrac{4a+5}{a+2}$.

Observación: Es obvio que la discusión puede hacerse aplicando el teorema de Rouché. El lector podría intentarlo.

13. Castilla y León, septiembre 15

Consideremos la matriz $M=\begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$.

a) Calcular el rango de M en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, resolver la ecuación $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|M|=\begin{vmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{vmatrix}=a^2(a-4)^2-(a-4)^2=(a-4)^2(a^2-1)$.

El determinante vale 0 cuando $a = 4$, $a = -1$ o $a = 1$.

Para $a = 4$, la matriz es $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 0.

En los otros dos casos el rango de la matriz es 1.
Para $a \neq 4$, -1 y 1, el rango de M vale 2.

b) Para $a = 1$, la ecuación $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ queda: $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, que es equivalente a: $\begin{cases} -3x-3y=-6x \\ -3x-3y=-6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y=0$, cuya solución es $x = y$.

Esto es, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. <u>Cataluña, junio 15</u>

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu $\boldsymbol{A}^{-1}$ a partir de la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) Si $A^2 - A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$. Por tanto, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) De $A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A(A - I) = A^{-1} \cdot I \Rightarrow A - I = A^{-1}$.

Esto es: $A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculando la inversa directamente se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. <u>Comunidad Valencia, junio 15</u>

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha + 2 \\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Todas las soluciones del sistema cuando α = 1. (3 puntos)

b) La justificación razonada de si el sistema es compatible o incompatible cuando α = 2. (3 puntos)

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Si α = 1, el sistema queda: $\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$, que tiene dos ecuaciones iguales. Por tanto, será compatible indeterminado.

Equivalente a $\begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \end{cases}$ → (Se despeja *x* y *z* en función de *y*) ⇒ $\begin{cases} z=\dfrac{1-3y}{4} \\ x=4-y \end{cases}$.

Haciendo *y* = *t* se puede escribir: $\begin{cases} x=4-t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}t \end{cases}$

b) Si α = 2, el sistema queda: $\begin{cases} -x+5y+6z=2 \\ 2x+2y=6 \\ 2x+3y+z=9 \end{cases}$.

Si se transforma por Gauss:

$$\begin{cases} -x+5y+6z=2 \\ 2x+2y=6 \\ 2x+3y+z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} -x+5y+6z=2 \\ 12y+12z=10 \\ 13y+13z=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2/12 \\ E3/13 \end{matrix} \begin{cases} -x+5y+6z=2 \\ y+z=10/12 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Resulta un sistema incompatible, pues las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias.

c) El sistema será compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea 3; para ello su determinante debe ser distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (C2-C1) = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (C2-C3) = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha-2 & 2\alpha+2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

→ (Se han restando las columnas 2ª y 1ª; y 2ª y 3ª) → $=-\alpha(\alpha-2)(\alpha-1)$.

Para que tal determinante sea distinto de 0 es necesario que α ≠ 0, α ≠ 1 y α = 2.

Por tanto, cuando α ≠ 0, 1, 2, el sistema será compatible determinado.

<u>**16**. Extremadura, junio 15</u>

Determina la relación que debe existir entre los parámetros *x* e *y* para que las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A\cdot B=B\cdot A$.

<u>Solución</u>:

$$A\cdot B=B\cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & x^2+1 \\ 1+y^2 & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 1+xy \\ yx+1 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2x; \quad x^2+1=1+xy \\ 1+y^2=xy+1; \quad x+y=2y \end{cases} \Rightarrow x=y$$

17. La Rioja, junio 15

Para cada número real *a*, la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ tiene determinante $|A|=(a-1)^3$.

A partir de este hecho, halla el determinante de las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & a & 1 & 1\\ 2 & 1 & a & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:
En los tres casos hay que aplicar alguna propiedad de los determinantes.

$\to$ En el caso de la matriz *B* se ha dado a *a* el valor 0, luego: $|B|=(0-1)^3=-1$.

$$\to |C|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & a & 1 & 1\\ 2 & 1 & a & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1\\ 1+1 & a & 1 & 1\\ 1+1 & 1 & a & 1\\ 1+1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=|A|+0=(a-1)^3$$

$$\to |D|=\begin{vmatrix} 2a & 2 & 2 & 2\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot|A|=2(a-1)^3$$

18. Madrid, junio 15

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula A^{15} y A^{20}.
b) Resolver la ecuación matricial $6X=B-3AX$, donde *X* es una matriz cuadrada de orden 3.
Solución:
a) Se calcula A^2, A^3...

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I \Rightarrow A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A;$$

$$\Rightarrow A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=I \ \ldots$$

Resulta evidente que: $A^{2n}=\left(A^2\right)^n=I^n=I$ y $A^{2n+1}=\left(A^2\right)^n\cdot A=I\cdot A=A$.

Por tanto:

$A^{15}=A$; $A^{20}=I$

b) $6X = B - 3AX \Rightarrow 6X + 3AX = B \Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow 3(2I + A)X = 3I \Rightarrow$

$\Rightarrow (2I + A)X = I \Rightarrow X = (2I + A)^{-1}$.

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \text{Su adjunta es: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = (2I + A)^{-1} = \frac{1}{|2I + A|} Ad\,(2I + A)^t \Rightarrow X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>**19**. Madrid, septiembre 15</u>

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto) $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ b) (1 punto) $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

<u>Solución</u>:

a) Si se extrae factor común 2 de la primera columna y 5 de la tercera, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} a - b & c & b \\ d - e & f & e \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{(sumando a la primera columna la tercera)} =$$

$= 10\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (Se intercambian las columnas 2ª y 3ª, lo que cambia el signo del determinante) $= -10\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\cdot3 = -30$.

b) Se extrae factor común 2 de la segunda fila; a continuación se sumará a la primera fila la segunda) $\to \begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \overset{F1+F2}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$

= (se extrae factor común 2 de la tercera columna; y se intercambian las filas 2ª y 3ª) =

$$= 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot3 = -12$$

20. Madrid, septiembre 15

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que conmutan con *A*, es decir que cumplen $AB = BA$.

Solución:

$$A{\cdot}B = B{\cdot}A \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3a+c & 3b+d\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b & a\\ 3c+d & c\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases}3a+c=3a+b; \quad 3b+d=a\\ \quad a=3c+d \qquad\quad b=c\end{cases} \Rightarrow$ (la solución debe darse en función de dos parámetros, de *b* y de *d*) $\rightarrow \begin{cases}a=3b+d\\ b=b\\ c=b\\ d=d\end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}3b+d & b\\ b & d\end{pmatrix}$

21. Murcia, junio 15

a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases}x+y+az=1\\ x+ay+z=a\\ ax+y+z=1\end{cases}$$

b) [1 punto] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = -2$.

Solución:

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de *A* sea menor que el rango de *M*.

Las matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & a\\ a & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=M$

Como la columna de los términos independientes es igual a la de los coeficientes de la incógnita *y*, el sistema siempre será compatible, pues el rango de *M* no puede ser mayor que el de *A*.

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=-a^3+3a-2=-(a-1)^2\cdot(a+2)$

Este determinante vale 0 si $a = 1$ o $a = -2$.

Con esto:

- Si $a \neq 1$ y -2 $\Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 1$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=M$ $\Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 1. El sistema será compatible indeterminado con dos grados de indeterminación.

- Si $a = -2$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

b) En este caso, $a = -2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1+2z \\ x-2y=-2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=1+2z \\ -3y=-3-3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1+2z \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

22. <u>Navarra, junio 15</u>

Encuentra los valores de $t \in \mathbf{R}$ para los que el determinante de la matriz AB vale 0, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{pmatrix}$$ (2 puntos)

<u>Solución</u>:

Como $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, para que el determinante del producto valga 0 es necesario que $|A| = 0$ o $|B| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(3t-2-2t) = 2(t-2)$$, que se anula cuando $t = 2$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{vmatrix} = t\left(2t+t^2+1\right) = t(t+1)^2$$, que se anula cuando $t = 0$ o $t = -1$.

Por tanto, $|A \cdot B| = 0$ cuando $t = -1$, $t = 0$ o $t = 2$.

23. <u>País Vasco, junio 15</u>

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$.

Calcula, de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}$$

<u>Solución</u>:

Se aplicarán las transformaciones de Gauss, que se indican en cada caso:

$$A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$ = (se extrae el factor 2 de la primera fila) =

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$ = (se resta la fila 1ª a la 2ª y a la 3ª) = $$2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} =$$

= (se extrae el factor –1 de la 3ª fila) = $$2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 10 = -20\ .$$

$$B=\begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}$$ = (se extraen los factores 3, 2 y –1 de las filas 1ª, 2ª y 3ª, respectivamente)

$$= 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ = (se intercambian las filas 1ª y 2ª) =

$$= -3\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3\cdot 2\cdot(-1)\cdot 10 = 60$$

24. País Vasco, junio 15

Escribimos en orden creciente 250 múltiplos seguidos de 5 comenzando por el 50. Ahora suprimimos los 90 primeros. ¿Cuánto vale la suma de los restantes números?

Solución:

Los números forman una progresión aritmética de diferencia 5. El término general de esta progresión es: $a_n = 50+(n-1)\cdot 5 \Rightarrow a_n = 45+5n$

Los números son:

$50,\ 55,\ 60,\ldots,\ a_{90} = 495,\ a_{91} = 500,\ldots,\ a_{250} = 1295$

Se pide la suma de 160 términos: 500 + 505 + 510 +…+ 1295.

Su valor es: $S = \dfrac{(500+1295)\cdot 160}{2} = 143600$

25. País Vasco, junio 15

Con los dígitos 2 y 3, ¿cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar?

Solución:

Se trata de un problema de combinatoria, relativamente fácil.

La primera respuesta, inmediata, es decir que su número son las variaciones con repetición de 2 elementos (2 y 3) tomados 5 a5. Esto es: $VR_{2,5} = 2^5 = 32$.

La misma respuesta se obtiene haciendo un diagrama de árbol: del primer nudo pueden salir dos ramas: 2 o 3; de cada uno de los nuevos nudos salen dos nuevas ramas; y así sucesivamente. Por tanto, las posibilidades totales son 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 32.