EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 12 a 15

1. Ocho personas, con similar destreza en mecanografía, teclearon 20 líneas de texto en un ordenador. El tiempo empleado, en minutos, y el número de errores cometidos, fueron:

Tiempo (X)	6	7	8	9	9	10	12	12
Errores (Y)	22	15	12	17	21	13	9	6

a) (0,5 puntos) Dibuja la nube de puntos asociada. ¿Qué tipo de correlación se da entre las variables estudiadas?

b) (1,8 puntos) Calcula, indicando todos los pasos intermedios, el coeficiente de correlación y la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

Algunas fórmulas: $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$; $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{xy}$; $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

$\rightarrow$ Si utilizas exclusivamente la calculadora debes especificar todos los parámetros que intervienen en las soluciones. En este caso, la puntuación será de 1,5 puntos como máximo.

c) (0,2 punto) ¿Cuántos errores deben esperarse para una persona que tarda 14 minutos en teclear las 20 líneas de texto?

2. (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que al tirar simultáneamente dos dados (con forma cúbica) la suma de las puntuaciones obtenidas sea igual a 3.

3. (1,5 puntos) Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(\overline{A}) = 0,4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de *A*. Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(B),\quad P(A/B),\quad P(A \cap \overline{B}),\quad P(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

4. El 42% de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16% de los hombres están en el paro.

a) (0,5 puntos) Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en el paro y sea hombre.

b) (0,7 puntos) Halla la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar sea hombre.

5. (0,5 puntos) En un Centro Comercial el 35% de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

6. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

a) (0,6 puntos) No acierte ninguna respuesta correcta.

b) (1,2 puntos) Acierte 6 o más preguntas.

7. Los envases de cartón de una determinada marca de leche contienen 1 litro de media, siendo la desviación típica de 5 ml.

a) (0,7 puntos) ¿Qué porcentaje de envases contiene menos de 991 ml.

b) (1,3 puntos) Si el control de calidad rechaza los envases que contengan menos de 990 ml y más de 1010 ml, ¿qué porcentaje de envases habrá que rechazar?

Alcalá de Henares, 12 de junio de 2017

Soluciones:

1. Ocho personas, con similar destreza en mecanografía, teclearon 20 líneas de texto en un ordenador. El tiempo empleado, en minutos, y el número de errores cometidos, fueron:

Tiempo (X)	6	7	8	9	9	10	12	12
Errores (Y)	22	15	12	17	21	13	9	6

a) (0,5 puntos) Dibuja la nube de puntos asociada. ¿Qué tipo de correlación se da entre las variables estudiadas?

b) (1,8 puntos) Calcula, indicando todos los pasos intermedios, el coeficiente de correlación y la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

Algunas fórmulas: $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$; $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{xy}$; $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

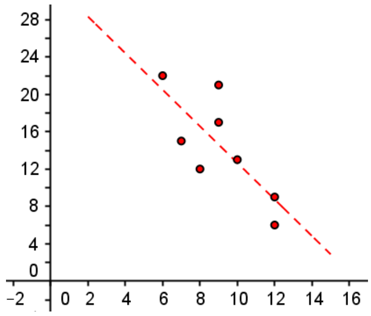
→ Si utilizas exclusivamente la calculadora debes especificar todos los parámetros que intervienen en las soluciones. En este caso, la puntuación será de 1,5 puntos como máximo.

c) (0,2 punto) ¿Cuántos errores deben esperarse para una persona que tarda 14 minutos en teclear las 20 líneas de texto?

Solución**:**

a) A partir de la lectura de los valores de la tabla se observa una correlación negativa (el número de errores tiende a disminuir al aumentar el tiempo). Esto se confirma representando los pares de valores: (6, 22), (7, 15),.., (12, 9), (12, 6).

La nube de puntos, alargada y con tendencia decreciente, sugiere una correlación lineal inversa y fuerte: los puntos se ajustan bien a una recta. Por tanto, puede deducirse que el tiempo empleado determina de alguna manera el número de errores: a menos tiempo más errores.



b) De acuerdo con las fórmulas de los parámetros hay que hacer sumas, sumas de cuadrados y sumas de productos; para ello resulta eficaz la siguiente tabla:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
6	22	36	484	132
7	15	49	225	175
8	12	64	144	96
9	17	81	289	171
9	21	81	441	189
10	13	10	169	130
12	9	144	81	108
12	6	144	36	72
$\sum x_i = 73$	$\sum y_i = 115$	$\sum x_i^2 = 699$	$\sum y_i^2 = 1869$	$\sum x_i y_i = 985$

Con esto:

$$\overline{x} = \frac{73}{8} = 9{,}125 ; \quad \overline{y} = \frac{115}{8} = 14{,}375$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{699}{8} - 9{,}12^2} = 2{,}027 ; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1869}{8} - 14{,}375^2} = 5{,}195 ; \quad \sigma_{xy} = \frac{985}{8} - 9{,}125 \cdot 14{,}375 = -8{,}047$$

Por último,

$$r = \frac{-8{,}047}{2{,}027 \cdot 5{,}195} = -0{,}764 .$$

La correlación es inversa y fuerte: si se teclea más deprisa se comenten más errores.

La recta de regresión es

$$y-14,375=\frac{-8,047}{2,027^2}(x-9,125) \Leftrightarrow y=-1,959x+32,251$$

(Es la que se ha trazado anteriormente).
→En todos los casos se ha redondeado a las milésimas.

c) Si x = 14, $y=-1,959 \cdot 14+32,251=4,825$ → 5 errores.

2. (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que al tirar simultáneamente dos dados (con forma cúbica) la suma de las puntuaciones obtenidas sea igual a 3.
Solución:
Hay 36 resultados posibles: (1, 1), (1, 2),…, (6, 5), (6, 6)
Hay solo dos casos en los que la suma de las puntuaciones sea 3: (1, 2) y (2, 1).
Por tanto, $P(+3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

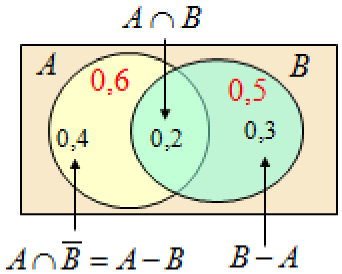
3. (1,5 puntos) Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A\cup B)=0,9$, $P(A\cap B)=0,2$, $P(\overline{A})=0,4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de *A*. Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(B),\quad P(A/B),\quad P(A\cap\overline{B}),\quad P(\overline{A}\cup\overline{B}).$$

Solución:
Si $P(\overline{A})=0,4 \Rightarrow P(A)=0,6$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow$ (teniendo en cuenta los datos):
$0,9=0,6+P(B)-0,2 \Rightarrow P(B)=0,5$

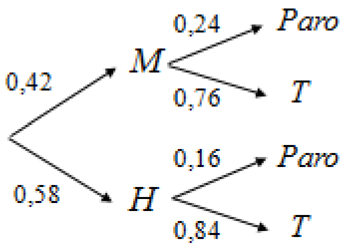
- $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,5}=0,4$.
- $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$ = 0,6 – 0,2 = 0,4.
- Por una de las leyes de Morgan:
$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$ = 1 – 0,2 = 0,8.



Para una mejor comprensión de este problema conviene hacer un diagrama de Venn.

4. El 42% de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16% de los hombres están en el paro.
a) (0,5 puntos) Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en el paro y sea hombre.
b) (0,7 puntos) Halla la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar sea hombre.
Solución:
Para la población activa considerada, sean los sucesos:
M : mujer; *H*: hombre; *Paro*: estar en paro.

Con los datos del problema puede hacerse un diagrama de árbol como el siguiente.



a) $P\left(Paro \cap H\right) = P(H) \cdot P\left(Paro / H\right)$ = 0,58 · 0,16 = 0,0928.

b) La probabilidad total de estar en paro es:

$$P\left(Paro\right) = P(M) \cdot P\left(Paro / M\right) + P(H) \cdot P\left(Paro / H\right) \Rightarrow$$

$$P\left(Paro\right) = 0,42 \cdot 0,24 + 0,58 \cdot 0,16 = 0,1936 .$$

Por Bayes:

$$P\left(H / Paro\right) = \frac{P(H) \cdot P(Pa\ o / H)}{P(Paro)} = \frac{0,58 \cdot 0,16}{0,1936} = \frac{0,0928}{0,1936} \approx 0,48$$

→ Sin necesidad de utilizar la fórmula de Bayes: por cada 0,1936 parados, 0,0928 son hombres.

→ También puede hacerse una tabla de contingencia, partiendo, por ejemplo, de 10000 personas activas.

Personas Activas (10000)		En paro
Mujeres	42% → 4200	24% → 1008
Hombres	58% → 5800	16% → 928
Total	10000	1936

a) $P\left(Paro \cap H\right) = \dfrac{928}{10000} = 0,0928$.

b) $P\left(H / Paro\right) = \dfrac{928}{1936} \approx 0,48$.

5. (0,5 puntos) En un Centro Comercial el 35% de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

<u>Solución</u>:

El número de de los usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial *B*(7, 0,35).

$$P\left(X = 3\right) = \binom{7}{3} 0,35^3 \cdot 0,65^4 = 35 \cdot 0,00765... \approx 0,2679 .$$

6. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

a) (0,6 puntos) No acierte ninguna respuesta correcta.

b) (1,2 puntos) Acierte 6 o más preguntas.

<u>Solución</u>:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p = \dfrac{1}{3}$; la de fallar, $q = \dfrac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8,\ \dfrac{1}{3}\right)$.

a) $P\left(X = 0\right) = \binom{8}{0} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 = \dfrac{256}{6561} = 0,039$.

b) $P\left(X \geq 6\right) = P\left(X = 6\right) + \mathrm{P}\left(X = 7\right) + P\left(X = 8\right)$ =

$$= \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 28 \cdot \frac{4}{6561} + 8 \cdot \frac{2}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{129}{6561} = 0,0197$$

7. Los envases de cartón de una determinada marca de leche contienen 1 litro de media, siendo la desviación típica de 5 ml.
a) (0,7 puntos) ¿Qué porcentaje de envases contiene menos de 991 ml.
b) (1,3 puntos) Si el control de calidad rechaza los envases que contengan menos de 990 ml y más de 1010 ml, ¿qué porcentaje de envases habrá que rechazar?
<u>Solución</u>:

El contenido de los envases se ajusta la normal *N*(1000, 5). Se tipifica haciendo $Z=\dfrac{X-1000}{5}$.

a) $P\left(X<991\right)=P\left(Z<\dfrac{991-1000}{5}\right)=P\left(Z<-1,8\right)=1-P(Z<1,8)=1-0,9641=0,0359$.

El 3,59% de los envases contiene menos de 991 ml.

b) Los envases que se aceptan son los que contienen entre 990 y 1010 ml.

$$P\left(990<X<1010\right)=P\left(\dfrac{990-1000}{5}Z<\dfrac{1010-1000}{5}\right)=P\left(-2<Z<2\right)=$$

$$=P\left(Z<2\right)-P\left(Z<-2\right)=0,9772-\left(1-0,9772\right)=0,9544\ \rightarrow 95,44\%$$

Hay que rechazar el 4,56% de los envases.

Alcalá de Henares, 12 de junio de 2017