TEMA 7. Representación gráfica de funciones y Optimización
Problemas Resueltos

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión

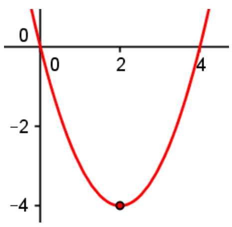
1. Halla, aplicando derivadas, los vértices de las parábolas:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$

Comprueba su crecimiento y curvatura.

Solución:

El vértice de una parábola es siempre un mínimo o un máximo. Un mínimo cuando la parábola es convexa (∪); un máximo cuando es cóncava (∩).

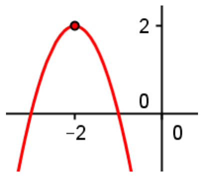


a) Si $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f´(x) = 2x - 4 \to$ se anula en x = 2. Punto (2, –4).

- Si $x < 2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Como $f´´(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.

b) Si $f(x) = -2x^2 - 8x - 6 \Rightarrow f´(x) = -4x - 8 \to$ se anula en x = –2. Punto (–2, 2).



- Si $x < -2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > -2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Como $f´´(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava.

2. Representa gráficamente en el intervalo [–2, 2], estudiando sus máximos y mínimos, la función $f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Nota. Esta función es derivable en todo **R**. Se vio en el problema 17 del Tema 6).

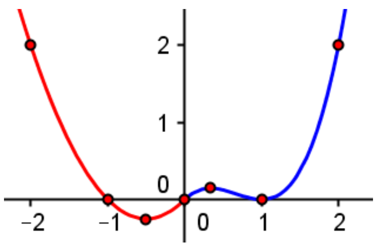
Solución:

Operando:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \le 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Su derivada es: $f´(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f´(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 0, & \text{si } x \le 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 = 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ x = 1/3; x = 1 \end{cases}$$



Como $f´´(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x - 4, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y se cumple que:

$f´´(-1/2) = 2 > 0$, $f´´(1/3) = -2 < 0$, $f´´(1) = 2 > 0$

Se deduce que en los puntos x = –1/ y x = 1 la función tiene mínimos relativos; y en x = 1/3 tiene un máximo.

La función $f_1(x) = x(x+1)$ decrece en el intervalo (–∞, –1/2); crece en (–1/2, 0).

La función $f_2(x) = x(x-1)^2$ crece cuando $x \in$ (0, 1/3) ∪ (1, +∞); decrece en (0, 1/3).

Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:

(–2, 2); (–1/2, 1/4) y (1, 0), mínimos; (1/3, 4/27), máximo; (2, 2).

3. Dada la función $f(x) = x^3 - 21x^2 + 72x + 60$, calcula sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.
Solución:
Derivando:

$f´(x) = 3x^2 - 42x + 72$; $f´´(x) = 6x - 42$

$3x^2 - 42x + 72 = 0 \Rightarrow x = 2$ o $x = 12$.

Como $f´´(2) = -30$, para $x = 2$ se da el máximo de $f(x)$. Punto (2, 128).
Como $f´´(12) = 30 > 0$, en $x = 12$ se da el mínimo de $f(x)$. Punto (12, –372).
Como $f´´(x) = 6x - 42 = 0 \Rightarrow x = 7$, y $f´´´(x) = 6 \neq 0$, en $x = 7$ se tiene un punto de inflexión. Punto (7, –122).

4. Demuestra que la función $f(x) = x - e^{-3x}$ es estrictamente creciente en todo **R**.
Solución:
La función exponencial está definida siempre que lo esté su exponente. Por tanto, el dominio de $f(x) = x - e^{-3x}$ es: Dom(*f*) = **R**.
Derivando:

$f´(x) = 1 - (-3)e^{-3x} = 1 + 3e^{-3x}$

Como $e^{-3x} > 0$ siempre, $f´(x) > 0$ para todo valor de $x \in$ **R**.
En consecuencia, la función siempre es creciente.

5. a) Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ tiene un máximo relativo.
b) Comprueba que función $f(x) = x^2 - 2e^{-x}$ tiene un punto de inflexión.
Solución:

a) Derivando $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x\left(1-x\right)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

La derivada se anula en $x = 1$.

Como $f´´(x) = \dfrac{-e^x - (1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x\left(x-2\right)}{e^{2x}} = \dfrac{x-2}{e^x} \Rightarrow f´´(1) < 0$; luego en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Haciendo las dos primeras derivadas:

$f´(x) = 2x + 2e^{-x} \Rightarrow f´´(x) = 2 - 2e^{-x} \Rightarrow 2 - 2e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$.

Como $f´´´(x) = 2e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da una inflexión.

6. Comprueba que la función $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ tiene en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.
Solución:
Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente valdrá 0: $f´(1) = 0$.
Si en $x = 1$ hay un punto de inflexión, entonces $f´´(1) = 0$.
Derivando:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{12x-4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Como $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$ y $f'''(1) \neq 0$, en $x = 1$ hay un punto de inflexión

7. Dada la función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$, determina:
a) Los puntos de corte con el eje *OX*; y su signo.
b) Sus máximos y mínimo.
c) Sus puntos de inflexión.
<u>Solución</u>:
a) Cortes con el eje *OX*:
Son las soluciones de la ecuación $f(x) = (x+3)(x-2)^4 = 0 \Rightarrow x = -3$; $x = 2$.
El signo sólo depende del factor $x + 3$. Por tanto: la función toma valores negativos si $x < -3$; y positivos, en caso contrario.

b) Derivando:

$$f'(x) = (x-2)^4 + 4(x+3)(x-2)^3 = 5(x-2)^3(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 15(x-2)^2(x+2) + 5(x-2)^3 = 20(x-2)^2(x+1)$$

La derivada primera se anula en $x = -2$ y $x = 2$.
Como $f''(-2) = -80 < 0$, en $x = -2$ se da un máximo. Punto (–2, 256).
Como $f''(2) = 0$, en $x = 2$ no puede afirmarse que haya máximo o mínimo; puede darse un punto de inflexión.

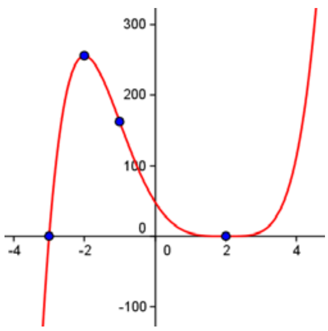
c) La derivada segunda se anula en $x = -1$ y $x = 2$. Estos dos puntos pueden ser de inflexión. Para asegurarlo hay que hacer la derivada tercera y comprobar que es distinta de cero.

$$f'''(x) = 40(x-2)(x+1) + 20(x-2)^2 = 60x^2 - 120x$$

Como $f'''(-1) = 180 \neq 0$, en $x = -1$ se da un punto de inflexión: (–1, 162).
Como $f'''(2) = 0$, todavía no puede determinarse qué pasa en $x = 2$. Hay que seguir derivando:

$$f^{(4}(x) = 120x - 120$$

Al ser $f^{(4}(2) = 120 > 0$, en $x = 2$ se da un mínimo relativo.
(Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta).



8. Comprueba que la función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ es decreciente en todo su dominio.

<u>Solución</u>:

Dominio de definición: intervalo (0, 2] → Los valores de x tales que $\frac{2}{x} - 1 > 0$.

Derivando:

$$y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

Como el numerador es negativo y el denominador siempre es positivo $\Rightarrow$ $y' < 0$ para todo x del dominio. En consecuencia, la función es decreciente en (0, 2].

9. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ en el intervalo [0, 2π].

Solución:
Derivada:

$$f'(x)=\frac{\cos x(2-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$$

Se anula en $x = \pi/3$ y en $x = 5\pi/3$, que son las soluciones de $2\cos x-1=0$.
Derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-2\sin x(2-\cos x)^2-(2\cos x-1)\cdot 2(2-\cos x)\cdot\sin x}{(2-\cos x)^4}=$$

$$=\frac{-2\sin x(2-\cos x)-(2\cos x-1)\cdot 2\cdot\sin x}{(2-\cos x)^3}=\frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

Como $f''(\pi/3)<0$, en $x = \pi/3$ se da un máximo.
Como $f''(5\pi/3)>0$, en $x = 5\pi/3$ se da un mínimo.

10. Halla los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.
Solución:

$$f(x)=x-\ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

La derivada segunda se anula en $x = \pm 1$. Ambos son puntos de inflexión. Para cerciorarse puede verse que la derivada segunda toma signos distintos a izquierda y derecha de $x = 1$ y de $x = -1$. También puede hacerse la derivada tercera: $f'''(x)=\dfrac{12x-4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$, y comprobar que no se anula en ninguno de esos puntos.

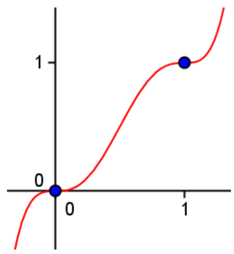
11. Demuestra que la función $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$ nunca es decreciente. ¿Es posible que, a pesar de lo anterior, tenga puntos de inflexión?
Solución:
Derivadas: $f'(x)=30x^4-60x^3+30x^2 \Rightarrow f''(x)=120x^3-180x^2+60x$
Puntos singulares:

$$f'(x)=30x^4-60x^3+30x^2=30x^2(x^2-2x+1)=30x^2(x-1)^2=0\Rightarrow x=0,\ x=1.$$

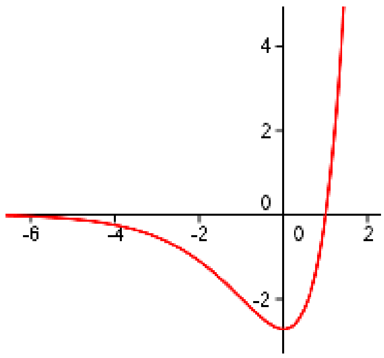
La derivada nunca toma valores negativos, pues es producto de dos expresiones de potencia par. En consecuencia, nunca es decreciente.
Como $f''(0)=0$ y $f''(1)=0$, en $x = 0$ y $x = 1$ puede haber puntos de inflexión. Para determinarlo hay que estudiar la derivada tercera, que es:

$$f'''(x)=360x^2-360x+60$$

Como $f'''(0)=60\neq 0$ y $f'''(1)=60\neq 0$, en $x = 0$ y en $x = 1$ se tienen sendos puntos de inflexión (con tangente horizontal). Otra consecuencia es que esta función no tiene máximos ni mínimos.
La función es como se indica.



12. Dada la función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, halla:
a) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
b) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.
Solución:
a) Derivada primera: $f'(x) = xe^{x+1}$.
Esta derivada se anula en $x = 0$.
A la izquierda de $x = 0$, como $f'(x) < 0$, la función es decreciente. A su derecha, es creciente, pues $f'(x) > 0$.
b) Derivada segunda: $f''(x) = (x+1)e^{x+1}$.
Se anula en $x = –1$.
Para $x < –1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$).
Para $x > –1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ e es convexa ($\cup$).
Por tanto, en $x = –1$, como cambia de curvatura, la función tiene un punto de inflexión.
(Aunque no se pide, se da su gráfica).



13. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión.
Solución:
Cálculo del punto de inflexión:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

La tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - 2 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 1$$

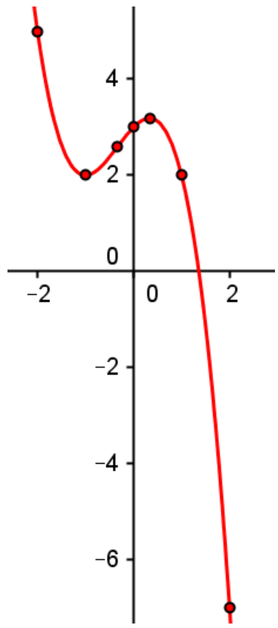
Estudio de una función dependiente de uno o más parámetros

14. a) Dada la función: $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$, calcula los valores de b y d para que la función $f(x)$ tenga un mínimo relativo en el punto (–1, 2).
b) Para los valores hallados haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2], determinando su máximo y su punto de inflexión.
Solución:
a) Si $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$ tiene un mínimo relativo en el punto (–1, 2) debe cumplirse que: $f(-1) = 2$ y $f'(-1) = 0$.
De $f(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 1 + b - 1 + d \Rightarrow 2 = b + d$.
Derivando: $f'(x) = -3x^2 + 2bx + 1$.
Si $f'(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$.
Sustituyendo en la ecuación anterior $\Rightarrow d = 3$.
Por tanto, la función será $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 3$.
Como $f''(x) = -6x - 2$ y $f''(-1) = 4 > 0$, en $x = –1$ se da el mínimo indicado.
b) Se tiene que:

$$f(x) = -x^3 - x^2 + x + 3;$$

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1;\quad f''(x) = -6x - 2$$

La derivada primera, $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$, se anula también cuando $x = 1/3$.



Como $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -4 < 0 \Rightarrow$ en x = 1/3 hay un máximo.

La derivada segunda, $f''(x) = -6x - 2$, se anula en x = –1/3.

Como $f'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ en x = –1/3 se tiene una inflexión.

Dando algunos valores puede trazarse su gráfica.

Puntos: (–2, 5), (–1, 2), (–1/3, 70/27), (0, 3), (1/3, 86/27), (1, 2), (2, –7).

15. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un punto de inflexión de coordenadas (2, 32). Para esos valores halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas e investiga si hay un punto singular entre ellos.

Solución:

Si $f(x) = ax^3 + bx^2$ tiene un punto de inflexión en (2, 32) significa que $f(2) = 32$ y $f''(2) = 0$.

Derivadas: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx \to f''(x) = 6ax + 2b$.

De $f(2) = 32 \Rightarrow 8a + 4b = 32$. De $f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 8a + 4b = 32 \\ 12a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 8 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2;\ b = 12.$

La función es $f(x) = -2x^3 + 12x^2$.

Los puntos de corte con el eje *OX* son las soluciones de

$f(x) = -2x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(-x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 6$.

Derivando e igualando a 0:

$f'(x) = -6x^2 + 24x \Rightarrow -6x^2 + 24x = 6x(-x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$.

Como $f''(x) = -12x + 24 < 0$ cuando x = 4, para ese valor se obtiene el máximo pedido.

El valor x = 0, corresponde a un mínimo, pues $f''(0) = 24 > 0$.

16. Halla el valor de *a* para que la función $f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1}$ tenga un extremo en el punto x = 1. En ese caso, determina si se trata de un máximo o de un mínimo.

Solución:

Derivando:

$$f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(ax + 1) - 2x^2 \cdot a}{(ax + 1)^2} = \frac{2x(ax + 2)}{(ax + 1)^2}$$

Los extremos relativos se dan cuando $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(ax + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$; $ax + 2 = 0$, $x = -\frac{2}{a}$.

Si se pide que la función *f* tenga un extremo en $x = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{a} \Rightarrow a = -2$.

Por tanto: $f(x) = \frac{2x^2}{-2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x}{(-2x + 1)^2}$

Para determinar si es máximo o mínimo puede hacerse la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{(-8x+4)(-2x+1)^2-(-4x^2+4x)\cdot 2(-2x+1)\cdot(-2)}{(-2x+1)^4}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(-8x+4)(-2x+1)+4(-4x^2+4x)}{(-2x+1)^3}=\frac{4}{(-2x+1)^3}$$

Como $f''(1)=-4$, en el punto x = 1 la función tendrá un máximo.

17. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-a}$:

a) ¿Puede tener un mínimo para algún valor de a?
b) ¿Tiene siempre una asíntota vertical?
Solución:
a) Para tener un mínimo es necesario que la derivada se anule en algún punto.

Derivando, $f'(x)=\dfrac{3(x-a)-3x+1}{(x-a)^2}=\dfrac{1-3a}{(x-a)^2}\Rightarrow f'(x)=0$ si a = 1/3.

Pero si a = 1/3, la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1/3}$ y, por tanto, la función no está definida en ese caso ⇒ no hay ni máximo ni mínimo.

b) La respuesta está implícita en el apartado anterior.

Para a = 1/3, $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1/3}$ no tiene asíntotas verticales, pues

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{3x-1}{x-1/3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1/3}\frac{3(x-1/3)}{x-1/3}=3$$ → La función tiene una discontinuidad evitable, pero no una asíntota vertical.

18. Halla el valor que debe tomar a para que la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en x = 2.

Solución:

Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en x = 2 debe cumplirse que: $f'(2)=0$ y $f''(2)>0$

$$f'(x)=\frac{(6x-a)(x+2)-(3x^2-ax)}{(x+2)^2}=\frac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}$$

Si $f'(2)=\dfrac{12+24-2a}{16}=0\Rightarrow a=18$.

Puede verse que, para ese valor de a = 18, $f''(2)>0$.

En efecto:

$$f''(x)=\frac{96}{(x+2)^3}\rightarrow f''(2)=\frac{96}{64}>0.$$

19. Halla el valor de a para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en x = 2.

Solución:

Se deriva dos veces:

$$f(x)=ax^2+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=2ax-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=2a+\frac{2}{x^3}.$$

Para que se tenga un punto de inflexión en $x = 2$ debe cumplirse que $f''(2) = 2a + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$ $a = -\frac{1}{8}$.

La función será $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{x}$.

20. Comprueba que la función $f(x) = e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ para cualquier valor de p. ¿Tendrá algún punto de inflexión?

Solución:

$f'(x) = 2xe^{p+x^2} \Rightarrow x = 0$ es punto singular.

Como $f''(x) = (2+4x^2)e^{p+x^2} \Rightarrow f''(0) > 0$. Por tanto en $x = 0$ tiene un mínimo; su valor es $f(0) = e^p$.

Como la derivada segunda no se anula en ningún punto, la función no tiene puntos de inflexión.

21. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10$, $a \neq 0$.

a) Halla los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcula los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$.

Solución:

a) Para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$ es necesario que $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.

Derivando:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Rightarrow f''(x) = \frac{6x}{a} - 2a$$

Si $f'(1) = 0$, entonces:

$$\frac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 5a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ o } a = 3.$$

- Si $a = -\frac{1}{2}$, $f''(x) = -12x + 1$ y $f''(1) = -11$.
- Si $a = 3$, $f''(x) = 2x - 6$ y $f''(1) = -4$

Por tanto, la función tiene un máximo en $x = 1$ en los dos casos.

Obsérvese que las funciones serían, respectivamente,

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 5x + 10 \text{ y } f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$$

b) Para $a = 3$ la función y sus derivadas son:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f''(x) = 2x - 6$$

La derivada primera se anula en: $x = 1$ y $x = 5$.

Como $f''(1) = -4$, en $x = 1$ hay un máximo relativo; punto (1, 35/3)

Como $f''(5) = 4$, en $x = 5$ hay un mínimo relativo; punto (5, 5/3).

22. Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje *OY* en el punto (0, –1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje *OX*.
Representa gráficamente la función obtenida dando algunos de sus puntos.

Solución:

Se deriva dos veces:

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6x + 2b$$

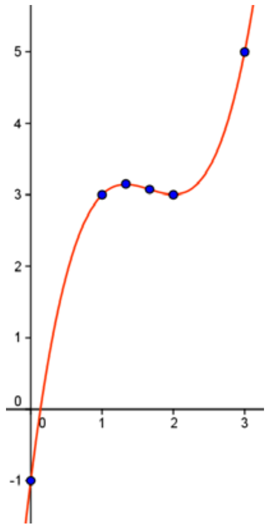
Que la tangente en el punto (2, 3) sea horizontal significa que su pendiente es 0, que $y'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 12 + 4b + c$

Por pasar por (0, –1) $\Rightarrow -1 = \qquad d$

Por pasar por (2, 3) $\Rightarrow 3 = 8 + 4b + 2c + d$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones se obtiene: $b = -5$; $c = 8$; $d = -1$.

La función será: $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$



Sus derivadas son: $y' = 3x^2 - 10x + 8$; $y'' = 6x - 10$

$y' = 0$ en $x = 2$ y $x = 4/3$

Como $y''(2) = 2 > 0$ e $y''(4/3) = -2 < 0$, en $x = 2$ hay un máximo y en $x = 4/3$, un mínimo.

La derivada segunda se anula en $x = 5/3$, y como $y''' = 6 \neq 0$, en ese punto se da una inflexión.

Algunos puntos de la curva son:

(0, –1); (1, 3); (4/3, 3,15), máximo relativo; (5/3, 3,07), PI;
(2, 3), mínimo relativo; (3, 5)

Representación gráfica de una función

23. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, estudiando su domino, asíntotas y crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Dominio: **R** – {2}.

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x-2} = \left[\dfrac{5}{0}\right] = \pm\infty \to$ recta $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = \left[\frac{5^-}{0^-}\right] = -\infty\,; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = \left[\frac{5^+}{0^+}\right] = +\infty$$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2 \to$ recta $y = 2$.

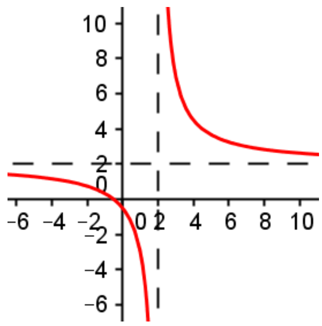
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2^- \to$ la curva va por debajo de la recta.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2^+ \to$ la curva va por encima de la recta.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Como la derivada es negativa en todo su dominio, la función es siempre decreciente. Su gráfica es la adjunta.



24. Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$, estudiando su domino, asíntotas y crecimiento y decrecimiento. Determina también su curvatura.

Solución:

Esta función se estudió en el Tema 5 (Ejercicio n. 18). Allí se vio que:

Dom(f) = **R** – {–1}.

Como $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0}\right]=\infty$, $x = -1$ es AV.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0^-}\right]=+\infty \Rightarrow$ la rama de la asíntota se va hacia +∞.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{-5}{0^+}\right]=-\infty \Rightarrow$ la rama de la asíntota se va hacia –∞.

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 2$, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

Hacia +∞ la función toma valores menores que 2, pues $\dfrac{2x-3}{x+1}<\dfrac{2x}{x+1}<2$.

Hacía –∞ toma valores mayores que 2, pues si $x < -1$, $\dfrac{2x-3}{x+1}>\dfrac{2x}{x+1}>2$.

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}$$

Como la derivada es positiva en todo su dominio, la función es siempre creciente.

Concavidad y convexidad.

$$f''(x)=\frac{-10}{(x+1)^3}$$

La derivada segunda cambia de signo en el punto $x = -1$.

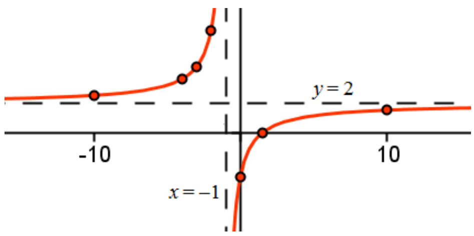
Para $x < -1$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la curva es convexa.

Para $x > -1$, $f''(x)<0 \Rightarrow$ la curva es cóncava.

Algunos de sus puntos son:

(–10, 23/9); (–4, 11/3); (–3, 9/2); (–2, 7); (0, –3); (3/2, 0); (2, 1/3); (5, 7/6); (10, 17/11).

Su gráfica es la adjunta.



25. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$. Determina su crecimiento y decrecimiento, ¿Tiene algún máximo? Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

Esta función se estudió en el Tema 5 (Ejercicio n. 21). Allí se vio que:

El dominio de la función es **R** – {0, 2}.

Tiene dos asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = 0$; y una vertical, la recta $y = 0$

Posición de la curva respecto de $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x(x-2)}=\left[\frac{1}{(-)\cdot(-)}=\frac{1}{0^+}\right]=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x(x-2)}=\left[\frac{1}{(+)\cdot(-)}=\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

Posición de la curva respecto de $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-2x}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty\,;\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x^2-2x}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

Posición de la curva respecto de $y = 0$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2-2x}=0^- \to \text{curva por debajo el eje } OX.$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x^2-2x}=0^+ \to \text{curva por encima el eje } OX.$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)-(x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

La derivada se anula cuando $x^2+2x-2=0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{3}$ y $x=-1+\sqrt{3}$.

Para determinar su crecimiento y decrecimiento también hay que tener en cuenta que la función no está definida ene los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

- Si $x<-1-\sqrt{3}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-1-\sqrt{3}<x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

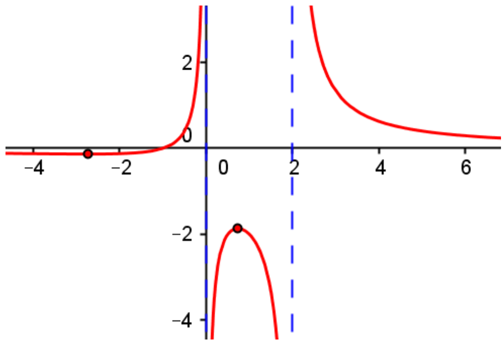
Por tanto, en $x=-1-\sqrt{3}$ hay un mínimo.

- Si $0<x<-1+\sqrt{3}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-1+\sqrt{3}<x<2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Por tanto, en $x=-1+\sqrt{3}$ hay un máximo.

- Si $x>2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

La gráfica de la función es la adjunta.



26. Dada la función $f(x)=x^5-5x^3$:

a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos relativos.
b) Determina sus intervalos de concavidad y convexidad; y sus puntos de inflexión.
c) Traza su gráfica.

<u>Solución</u>:

a) Derivando se tiene:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2 \Rightarrow f''(x)=20x^3-30x$$

$\to f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pm\sqrt{3}$.

- Si $x<-\sqrt{3}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-\sqrt{3}<x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

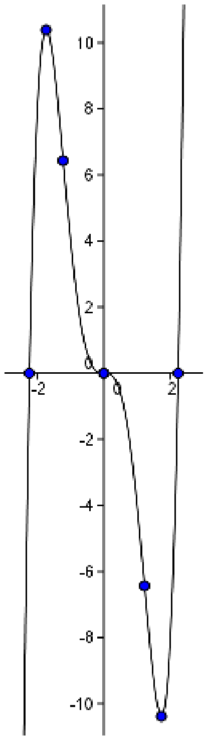
Por tanto, en $x=-\sqrt{3}$ hay un máximo.

- Si $0<x<\sqrt{3}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x>\sqrt{3}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Por tanto, en $x=\sqrt{3}$ hay un mínimo.

La confirmación de máximo y mínimo podría verse, además, con la derivada segunda:

Como: $f''(-\sqrt{3}) < 0$, en $x = -\sqrt{3}$ se tiene un máximo;
$f''(+\sqrt{3}) > 0$, en $x = +\sqrt{3}$ se tiene un mínimo.



b) La derivada segunda $f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x\left(2x^2 - 3\right)$ se anula en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/2}$.
Esos tres puntos son de inflexión, pues $f'''(x) = 60x^2 - 30 \neq 0$ en los tres valores.

c) Dando algunos valores puede trazarse su gráfica.
Puntos:
(–2,24, 0); (–1,73, 10,39); (–1,22, 6,43); (0, 0); (1,22, –6,43); (1,73, –10,39) (2,24, 0).

27. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:
a) Su dominio, posibles simetrías y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sus máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.
d) Su representación gráfica.

Solución:
a) Dominio: **R** – {–1, 1}. Es simétrica respecto del origen (impar), pues $f(x) = -f(-x)$.
En los puntos $x = -1$ y $x = 1$ puede tener asíntotas.
Como:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \Rightarrow$$ La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \Rightarrow$$ La recta $x = 1$ también es una asíntota vertical.

Tiene otra asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \text{ y}$$

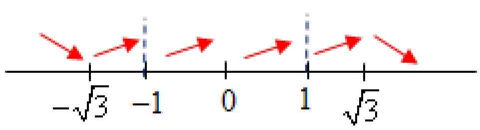
$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

La asíntota es la recta $y = -x$.

b) $$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(3x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$f'(x) = 0$ en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

- Si $x < -\sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-\sqrt{3} < x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.



Por tanto, en $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo.
- Si $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

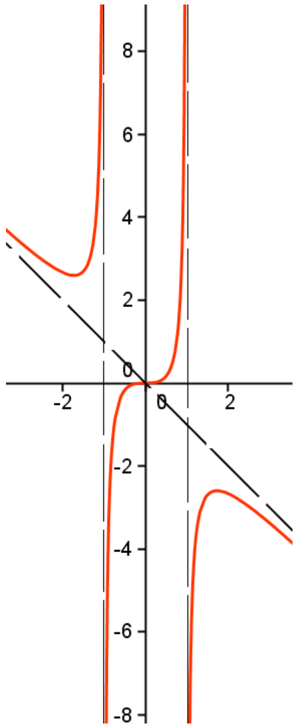
- Si $1 < x < \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = \sqrt{3}$ hay un máximo.

(También puede verse que Si $f''(-\sqrt{3}) > 0$ y $f''(\sqrt{3}) < 0$, lo que confirma que en $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo y en $x = \sqrt{3}$ hay un máximo).

Como a la izquierda y derecha de $x = 0$ la función es creciente, en ese punto se da una inflexión. También puede verse que $f''(0) = 0$.
El valor de la función en los puntos críticos es:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(0) = 0,\ f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Crecimiento: $(-\sqrt{3},\ -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \sqrt{3})$.
Decrecimiento: $(-\infty,\ -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\ \infty)$



c) $f''(x) = 0$ si $x = 0$. En $x = 0$ hay punto de inflexión; punto (0, 0).
Se confirma viendo que la derivada segunda cambia de signo en ese punto.
Efectivamente:
Si $x < -1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
Si $-1 < x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
Si $0 < x < 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
Si $x > 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

d) Con la información obtenida y calculando algunos puntos más se puede trazar su gráfica.

28. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$.

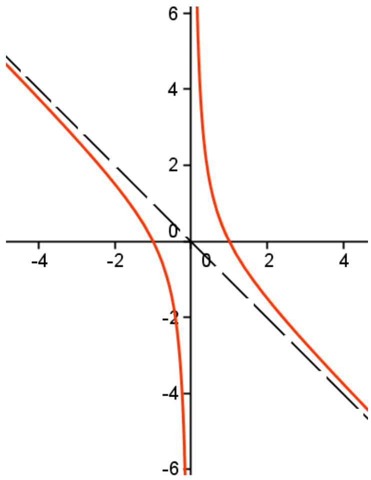
Solución:
– Dominio = **R** – {0}. Es evidente que en $x = 0$ tiene una asíntota vertical.
– La función es impar: $f(-x) = -f(x)$.
– Como $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua. También puede verse que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = -1 = m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = n$$

Derivadas:

$f'(x) = \dfrac{-1 - x^2}{x^2} < 0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'' < 0$ si x < 0: cóncava ($\cap$);
$f'' > 0$ si $x > 0$: convexa ($\cup$).



Algunos valores:
(–1, 0); (1, 0); (–2, 3/2); (2, –3/2); (–3, 8/3); (3, –8/3)

29. Representa gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando: asíntotas; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Solución:

Como la función está definida en todo **R**, no tiene asíntotas verticales.

Para ver si tiene una asíntota horizontal se hace $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = [-\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0 \Rightarrow$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (hacia menos infinito).

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = [\infty\cdot\infty] = \infty$, hacia $+\infty$ no hay asíntota.

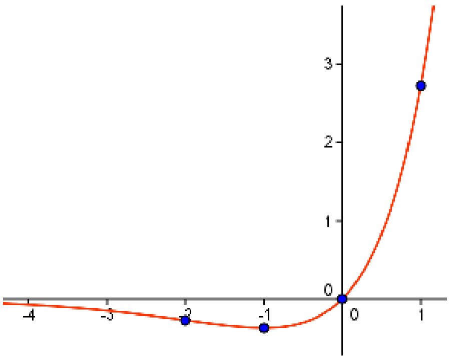
Se deriva:

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

La derivada se anula en $x = -1$.

- Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece: intervalo $(-\infty, -1)$
- Si $x > -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece: intervalo $(-1, +\infty)$.

Es evidente que en $x = -1$ hay un mínimo.



La derivada segunda se anula en $x = -2$.

- Si $x < -2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Si $x > -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).

En $x = -2$ hay un punto de inflexión.

Con la información obtenida y dando algunos valores se puede trazar su gráfica; que es la adjunta.

$(-2, -2e^{-2}) \approx (-2, -0{,}27)$; $(-1, -e^{-1}) \approx (-1, -0{,}37)$; $(0, 0)$; $(1, e)$.

30. Representa gráficamente la función $f(x) = \ln(1 - x^2)$, estudiando: dominio de definición; asíntotas; máximos y mínimos; y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

La función logarítmica está definida sólo para valores positivos: $1 - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Por tanto, Dom $(f) = (-1, 1)$.

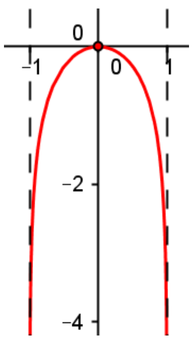
En los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tiene asíntotas verticales; por la derecha en $x = -1$; por la izquierda en $x = 1$.

En efecto, se cumple que:

$$\lim_{x\to-1^+} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right) = -\infty;\quad \lim_{x\to 1^-} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right) = -\infty$$

Crecimiento y decrecimiento. Derivando:

$$f(x) = \ln(1-x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$ → La derivada se anula para $x = 0$.



Luego:

- Si $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ y $f(x)$ es creciente.
- Si $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ y $f(x)$ es decreciente.

En consecuencia, la función tiene un máximo en el punto $x = 0$; su valor es $f(0) = \ln(1 - 0^2) = 0$, punto $(0, 0)$.

Su gráfica es la adjunta.

Observación: Aunque no es necesario, para confirmar que en $x = 0$ se tiene un máximo se podría haber hecho la derivada segunda y comprobar que es negativa en ese punto.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = -2$$

31. Dada la función $f(x) = \ln\frac{3x}{x+1}$, determina su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento. Haz un esbozo gráfico de ella.

Solución:

Dominio: **R** – [–1, 0]. Hay que descartar los valores de x tales que $\frac{3x}{x+1} \leq 0$

Asíntotas:

En $x = -1$ (por la izquierda) y en $x = 0$ (por la derecha) la función tiene sendas asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to -1^-} \ln\frac{3x}{x+1} = \left[\ln\left(\frac{-3}{0^-}\right)\right] = +\infty \; ; \; \lim_{x\to 0^+} \ln\frac{3x}{x+1} = \left[\ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln 0^+\right] = -\infty$$

Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{3x}{x+1} = \ln 3$. La asíntota es $y = \ln 3$.

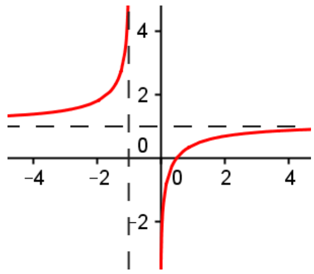
Hacía $-\infty$, la curva va por encima de la asíntota, pues $\frac{3x}{x+1} > 3$; hacia $+\infty$, sucede al revés.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f(x) = \ln\frac{3x}{x+1} = \ln 3x - \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

El valor de la derivada es positivo en todo su dominio, luego la función siempre es creciente.

Atendiendo a lo dicho, su gráfica es la adjunta.



32. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su gráfica.

Solución:

Derivadas primera y segunda:

$$f(x) = e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = (4x^2-2)e^{1-x^2}$$

Posibles extremos relativos: $f'(x) = -2xe^{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

- Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.
- Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$ hay un máximo.

Posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = (4x^2-2)e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\; x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

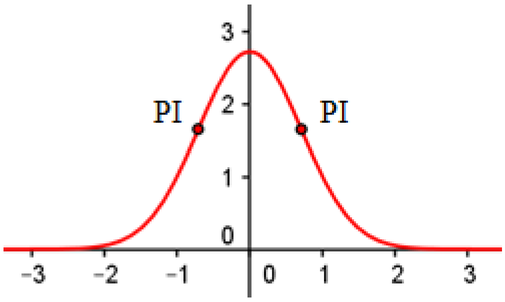
Como $f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{1-x^2}$ es distinto de 0 para esos dos valores, se confirma que ambos son puntos de inflexión.

Asíntotas:

Como $\lim_{x\to\pm\infty} e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow$ la recta $y = 0$ (el eje OX) es asíntota horizontal de la curva.

La curva va siempre por encima de la asíntota, pues $f(x) = e^{1-x^2} > 0$, para todo x.

La gráfica de f es una "campana de Gauss" (tiene un máximo en $x = 0$; es simétrica; tiende a 0 tanto hacia infinito como hacia menos infinito; tiene dos puntos de inflexión).
Su representación aproximada es:



33. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 8]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y de los cortes con los ejes.

a) $f(x) = \sin(2x)$ b) $g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

<u>Solución</u>:

a) La función $f(x) = \sin(nx)$ es periódica de periodo $\dfrac{2\pi}{n}$. Por tanto, las funciones dadas son periódicas de periodo $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ y $\dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, respectivamente.

- $f(x) = \sin(2x)$ corta al eje OX cuando $2x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k}{2}\pi$

$\Rightarrow$ si $k = 0$, $x = 0$; si $k = 1$, $x = \pi/2$; si $k = 2$, $x = \pi$. (A continuación se repite).
Al eje OY lo corta en $y = 0$.

Los posibles máximos y mínimos de la función se presentan en los puntos que anulan la derivada primera.

- $f(x) = \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$

Como $f''(x) = -4\sin(2x)$ es negativa en $x = \pi/4$ y positiva en $x = 3\pi/4$, para el primer valor se obtiene un máximo; para el segundo, un mínimo.

b) $g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ corta al eje OX cuando $\dfrac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow$

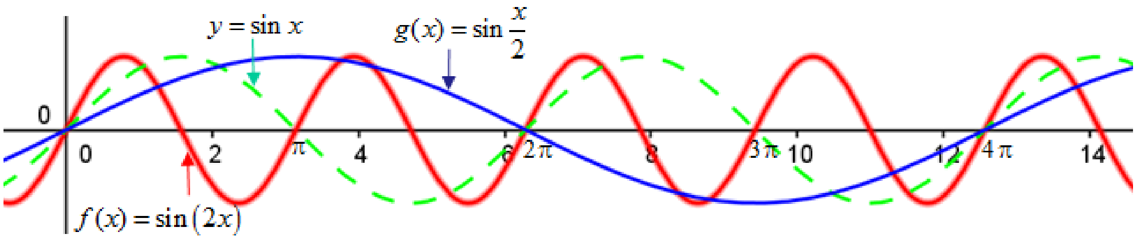
$\Rightarrow$ si $k = 0$, $x = 0$; si $k = 1$, $x = 2\pi$; si $k = 2$, $x = 4\pi$. (A continuación se repite).
Al eje OY lo corta en $y = 0$.
Máximos y mínimos:

- $g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \pi$, $x = 3\pi$, $x = 5\pi$….

Como $g''(x) = -\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ es negativa en $x = \pi$ y positiva en $x = 3\pi$, para el primer valor se tiene un máximo; para el segundo, un mínimo.

Un esbozo de ambas gráficas, comparadas con la de $y = \sin x$, es el siguiente.
Algunos puntos:

Para *f*: (0, 0); (π/4, 1); (π/2, 0) ; (3π/4, –1); (π, 0)…
Para *g*: (0, 0); (π, 1); (2π, 0) ; (3π, –1); (4π, 0)…



Problemas de optimización

34. Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

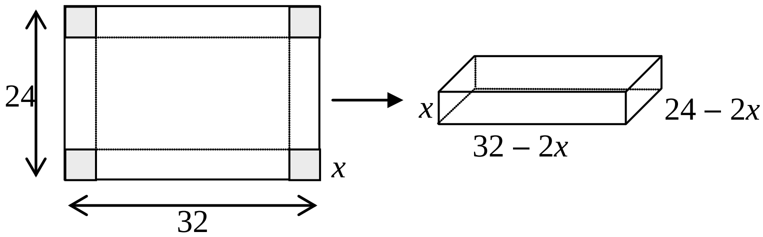
Solución:

A partir del enunciado y siguiendo el proceso aplicado en el ejemplo anterior se tiene:

1) El objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*

La caja es un prisma rectangular, cuyo volumen = área de la base por la altura.

2) Para obtener la función conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado *x*, el volumen de la caja obtenida será:

$$V(x) = (32-2x)(24-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

3) Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.

$$V'(x) = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \text{ (se ha simplificado)}$$

Se obtienen $x \approx 4{,}53$ y $x \approx 14{,}14$.

4) Para ver para qué valor se obtiene el máximo se hace $V''(x) = 24x - 224$ y se evalúa en esas soluciones.

Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para *x* = 4,53. Esta es la solución buscada.

El valor *x* = 14,14 no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de ese tamaño.

35. (Propuesto en Selectividad 2012)
Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde *x* representa la cantidad invertida en miles de euros. ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?
Solución:
El máximo de $R(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{5x}$ se obtiene cuando $R'(x)=0$ y $R''(x)<0$.
Derivando:

$$R'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 5x-\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot 5}{(5x)^2}=\frac{5x-2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot 5}{2\sqrt{x}\cdot(5x)^2}=\frac{-x+2\sqrt{x}}{10x^2\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{x}+2}{10x^2}$$

$$R'(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{x}+2=0\Rightarrow x=4.$$

Derivada segunda:

$$R''(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 10x^2-\left(-\sqrt{x}+2\right)\cdot 20x}{100x^4}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\left(-\sqrt{x}+2\right)\cdot 2}{10x^3}=\frac{3\sqrt{x}-8}{20x^3}$$

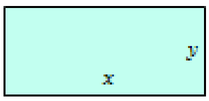
Como $R''(4)=\frac{-2}{160}<0$), se deduce que para *x* = 4 se da el máximo buscado.
El máximo se obtiene invirtiendo 4000 euros.

36. La suma de dos números positivos es 36; encuentra aquellos cuya suma de cuadrados sea mínima.
Solución:
Sean *x* e *y* los números. Deben cumplir que $x+y=36$.
Se desea que $S=x^2+y^2$ sea mínima.
Sustituyendo $y=36-x$ en *S* se tiene:

$$S(x)=x^2+(36-x)^2 \Rightarrow S(x)=2x^2-72x+1296.$$

El mínimo de *S* se da en la solución de $S'=0$ que hace positiva a S''.
Derivando: $S'(x)=4x-72=0 \Rightarrow x=18$.
Como $S''=4>0$, para el valor *x* = 18 se tiene la suma de cuadrados mínima.
Por tanto, ambos números deben ser iguales a 18.

37. (Propuesto en Selectividad)
Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.
Solución:
Sean *x* e *y* los lados del rectángulo.
Se desea que la suma $S=x+x+y=2x+y$ sea mínima, con la condición de que $A=xy=1$.



Despejando y sustituyendo: $y=\frac{1}{x} \to S(x)=2x+\frac{1}{x}$
Para que *S* sea mínima: $S'=0$, $S''>0$.

$$S'(x)=2-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $S''(x) = \frac{2}{x^3}$, cumple que $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, para ese valor se da el mínimo buscado.

Por tanto, las medidas de los lados serán: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.

38. (Propuesto en Selectividad, Aragón 2012)
Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.
Solución:
Sean *x* e *y* los números buscados.
Se desea que el producto $P = x \cdot y^2$ sea máximo.
Como se cumple que $x + y = 12 \Rightarrow x = 12 - y$.
Sustituyendo en *P* se tiene: $P = (12 - y) \cdot y^2$; que es una función en *y*:

$$P(y) = 12y^2 - y^3.$$

El máximo de *P* se obtiene en las soluciones de $P'(y) = 0$ que hagan negativa a $P''(y)$.
Derivando dos veces:

$$P'(y) = 24y - 3y^2; \quad P''(y) = 24 - 6y$$

La derivada primera se anula cuando $y = 0$ o $y = 8$.
Como $P''(0) = 24 > 0$ y $P''(8) = -24 < 0$, el valor máximo del producto se alcanza cuando $y = 8$.

Los números pedidos son $x = 4$ e $y = 8$.

39. El coste de fabricación de *x* unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,02x^2 + 4x + 80$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x) = 200 - x$ ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?
Solución:
a) El coste por unidad se halla dividiendo el coste total, $C(x)$, entre las unidades producidas, *x*:

$$M(x) = 0,02x + 4 + \frac{80}{x}$$

Para que $M(x)$ sea mínimo, su derivada debe ser 0: $M'(x) = 0,02 - \frac{80}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{4000}$

Como $M''(x) = \frac{160}{x^3} > 0$, el mínimo se da en ese punto: $x = \sqrt{4000} \approx 63,2$.

El precio unitario mínimo será $M\left(\sqrt{4000}\right) \approx 6,53$ u.m.

b) El objetivo es maximizar los beneficios obtenidos por la fabricación y venta de *x* unidades de producto.
Estos beneficios, $B(x)$, se hallan restando los costes a los ingresos:

$B(x)$ = Ingresos totales – Costes totales.

Los ingresos, $I(x)$, se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio por unidad.

Por tanto,

$$I(x) = x \cdot p(x) = x(200 - x) = 200x - x^2$$

De donde,

$$B(x) = I(x) - C(x) = (200x - x^2) - (0,02x^2 + 4x + 80) \Rightarrow B(x) = -1,02x^2 + 196x - 80$$

Para que $B(x)$ sea máximo, $B'(x) = 0$: $B'(x) = -2,04x + 196 = 0 \Rightarrow x = 96,08$.

Como $B''(x) = -2,04 < 0$, el punto hallado da el máximo beneficio, que asciende a $B(96,08)$ = 9336 u.m.

40. (Propuesto en Selectividad)

El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0,01x^2 + 3,6x - 180$

a) Determina los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

b) Determina los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

<u>Solución</u>:

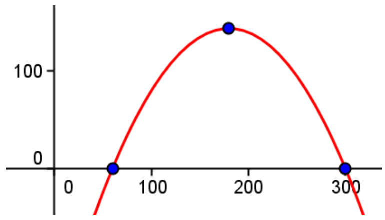
a) El beneficio es máximo cuando $B'(x) = 0 \rightarrow$ en el vértice de la parábola.

Derivando:

$$B'(x) = -0,02x + 3,6 = 0 \Rightarrow x = 180.$$

Como $B''(x) = -0,02 < 0$, para ese valor se tiene el máximo buscado.

Hay que producir 180 kg; el beneficio será de $B(180) = 144$ u.m.



b) La empresa no tiene perdidas si $B(x) = -0,01x^2 + 3,6x - 180 \geq 0$. Se trata de una inecuación cuya solución es $x \in [60,\ 300]$. Por tanto, como máximo podrá producir 300 kilos.

<u>Otros problemas</u>

41. Demuestra que las siguientes funciones son crecientes siempre:

a) $f(x) = e^x + 2x$ b) $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

<u>Solución</u>:

a) $f(x) = e^x + 2x \Rightarrow f'(x) = e^x + 2 > 0$, pues e^x siempre es positiva. Por tanto, la función es siempre creciente.

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ para todo x, pues la ecuación $3x^2 + 2x + 1 = 0$ no tiene raíces reales. En consecuencia, la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ es siempre creciente.

42. Determina si la función $f(x) = \dfrac{m}{1+x^2}$ tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión. ¿Depende del valor que tome m?

<u>Solución</u>:

$$f(x) = \frac{m}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2mx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2m(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

- La derivada primera se anula si $x = 0$, independientemente del valor de m.

Si $m > 0$, $f''(0) < 0 \to$ se tendría un máximo.
Si $m < 0$, $f''(0) > 0 \to$ se tendría un mínimo.

- Si $m \neq 0$, la derivada segunda se anula en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos

puntos de inflexión, pues la derivada tercera es distinta de cero en ambos puntos:

$$f'''(x) = \frac{24mx(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

- Si $m = 0$, la función es $f(x) = 0$, que representa el eje OX.

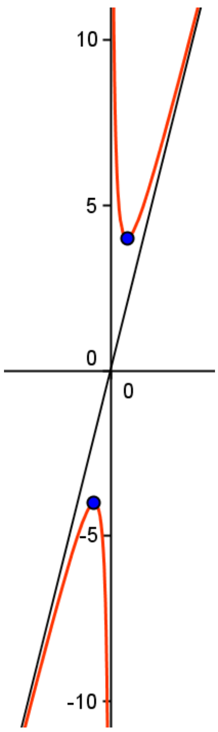
43. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).
b) Para esos valores de a y b, calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Esboza su gráfica.
<u>Solución</u>:
a) Por pasar por (1/2, 4) $\Rightarrow$ $f(1/2) = 4 \to 4 = a\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{1/2} \Rightarrow a + 4b = 8$

Por tener un mínimo en $x = 1/2$, $f'(1/2) = 0$.

Como $f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1/2) = 0 = a - \dfrac{b}{1/4} \Rightarrow a - 4b = 0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + 4b = 8 \\ a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4;\ b = 1$

La función es $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.



b) La función no está definida en $x = 0$, punto en el que tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, la recta $y = 4x$, pues

$$\lim_{x\to\infty}\left(4x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}(4x)$$

La derivada $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$ se anula cuando $x = \pm 1/2$.

Por tanto:

- Si $x < -1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1/2 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -1/2$ hay un máximo. Punto $(-1/2, -4)$.

- Si $0 < x < 1/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = 1/2$ hay un mínimo. Punto (1/2, 4).
Puede observarse que la función es impar.

44. (Propuesto en Selectividad 2012)

Dada la función $y=(x+2)(x-1)^2$ halla:

a) Dominio y cortes con los ejes. b) Máximos y mínimos.
c) Crecimiento y decrecimiento. d) Concavidad y convexidad.
e) Dibujar su gráfica.

<u>Solución</u>:

a) Su dominio es **R**.

Corte con eje *OX*, se hace $y = 0 \Rightarrow 0=(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow x=-2; x=1$. Puntos (–2, 0); (1, 0).

Corte con eje *OY*, se hace $x = 0 \Rightarrow y=2$. Punto (0, 2).

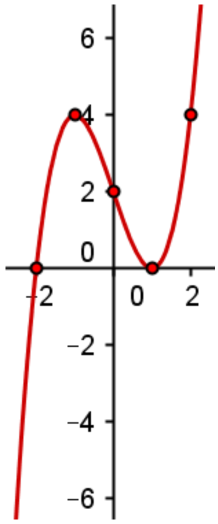
b) Derivando:

$$y=(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow y=x^3-3x+2 \Rightarrow y'=f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow y''=f''(x)=6x$$

La derivada primera se anula en $x = -1$ y $x = 1$.

Como $y''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ en $x = -1$ hay un máximo.

Como $y''(1)=6>0 \Rightarrow$ en $x = -1$ hay un mínimo.



c) Si $x<-1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $-1<x<1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Si $x>1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

d) La derivada segunda se anula en $x = 0$.

Si $x<0$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

Si $x>0$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).

e) Su gráfica es la adjunta.

Otros puntos: (–3, –4); (–1, 4); (2, 4).

45. (Propuesto en Selectividad 2016, La Rioja)

Sea la función $f(x)=\dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$, donde *a* es un cierto parámetro real.

a) ¿Cuál es el valor de *a* si sabemos que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal para la función dada? Justificar la respuesta.

b) Para $a = 1$, estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos.

<u>Solución</u>:

a) La recta $y = 4$ es una asíntota horizontal de la función si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)}=4$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{x^2-3x+2}=a$, pues el numerador y el denominador son del mismo grado, se deduce que $a = 4$.

b) Para $a = 1$ la función es $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$, que no está definida en $x = 1$ y $x = 2$.

Su derivada, $f´(x)=\dfrac{-3x^2+4x}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=\dfrac{x(-3x+4)}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$, se anula en los puntos $x = 0$ y $x=\dfrac{4}{3}$.

Con esto:
Si $x < 0$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
Si $0 < x < 1$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. Por tanto, en $x = 0$ hay un mínimo relativo.
Si $1 < x < 4/3$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Si $4/3 < x < 2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. Por tanto, en $x = 4/3$ hay un máximo.
Si $x > 2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

46. El coste de fabricación de *x* unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=0{,}1x^2+3x+100$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x)=25-0{,}3x$. ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.).
Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?
Solución:
El nivel de producción es el número de unidades que hay que producir para alcanzar un determinado fin.
a) El objetivo es determinar el número de unidades que hay que producir para que el coste medio por unidad, $M(x)$, sea mínimo.
El coste por unidad se halla dividiendo el coste total, $C(x)$, entre las unidades producidas, x:

$$M(x)=0{,}1x+3+\frac{100}{x}$$

Para que $M(x)$ sea mínimo, su derivada debe ser 0: $M´(x)=0{,}1-\dfrac{100}{x^2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{1000}\approx 31{,}6$.

Como $M´´(x)=\dfrac{200}{x^3} \Rightarrow M´´(\sqrt{1000})>0$. Luego, el mínimo se da cuando $x=\sqrt{1000}$.

El precio unitario mínimo será $M\left(\sqrt{1000}\right)\approx 9{,}3246$ u.m.

Observación: En este caso, la variable es discreta y sólo puede tomar valores enteros (de hecho, en el contexto del problema, la función considerada no es continua, y, por ende, tampoco derivable), por ello, la solución $x=\sqrt{1000}=31{,}6$ no es posible; la respuesta debe ser $x = 31$ o $x = 32$. Como $M(31) = 9{,}3258$ y $M(32) = 9{,}325$, debe elegirse $x = 32$.

b) El objetivo es maximizar los beneficios obtenidos por la fabricación y venta de *x* unidades de producto.
Estos beneficios, $B(x)$, se hallan restando los costes a los ingresos:
$B(x)$ = Ingresos totales – Costes totales.
Los ingresos, $I(x)$, se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio por unidad.
Por tanto, $I(x)=x\cdot p(x)=x\left(25-0{,}3x\right)=25x-0{,}3x^2$
De donde,

$$B(x)=I(x)-C(x)=\left(25x-0{,}3x^2\right)-\left(0{,}1x^2+3x+100\right) \Rightarrow B(x)=-0{,}4x^2+22x-100$$

Para que $B(x)$ sea máximo, $B´(x)=0$: $B´(x)=-0{,}8x+22=0 \Rightarrow x = 27{,}5$.

Como $B''(x) = -0,8 < 0$, el punto hallado da el máximo beneficio, que asciende a $B(27,5)$ = 202,5 u.m.
Nota: Como en el apartado a), la respuesta debe ser x = 27 o x = 28. En este caso es indiferente, pues $B(27) = B(28) = 202,4$.

47. Estudia los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ dependiendo de los valores de a.
Solución:
Derivando: $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$
La derivada se anula cuando $x = 0$ o $x = -2a/3$. En esos puntos pueden darse máximos o mínimos.
Como $f''(x) = 6x + 2a$,

- Para $x = 0$, $f''(0) = 2a \neq 0$ si $a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay máximo si $a < 0$, y mínimo si $a > 0$.
- Para $x = -2a/3$, $f''(-2a/3) = -2a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = -2a/3$ hay mínimo si $a < 0$, y máximo si $a > 0$.

Resulta evidente que si $a = 0$, $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$. En este caso la función tendía un punto de inflexión en $x = 0$.

48. El coste de producir q unidades de un producto es $C(q) = 1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2$. Si cada unidad se vende a un precio $p = 400 - 0,1q$
a) Calcula la función de beneficios. ¿Cuántas unidades deberá producirse para obtener el beneficio máximo?; cuál es dicho beneficio?
b) Cuál es el precio al que se obtiene el máximo beneficio.
c) Si el gobierno impone un impuesto que es un coste adicional de 10 euros por unidad. ¿Cuántas unidades maximizan ahora el beneficio?
Solución:
a) Beneficio = Ingresos menos Costes. Por tanto, la función de Beneficios será:
$B(q) = I(q) - C(q)$
Los ingresos son el producto de la unidades vendidas (q) por el precio por unidad, p.

$$B(q) = q \cdot (400 - 0,1q) - \left(1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2\right) \Rightarrow B(q) = -0,15q^2 + 100q - 1000$$

El beneficio máximo se obtiene en las soluciones de $B'(q) = 0$ que hagan positiva a la derivada segunda.

$$B'(q) = -0,3q + 100 = 0 \Rightarrow q = \frac{1000}{3} \approx 333$$

Como $B''(q) = -0,3 < 0$, para esa cantidad se obtiene el máximo buscado.

El beneficio máximo será: $B\left(\frac{1000}{3}\right) = 15700$ €.

b) Para $q = \frac{1000}{3}$, el precio será $p = 400 - 0,1 \cdot q = 400 - 0,1 \cdot \frac{1000}{3} \approx 367$ €.

c) La nueva función de costes es $C_1(q) = 1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2 + 10q = 000 + 310q + \frac{1}{20}q^2$, y la nueva función de beneficios $B(q) = -0,15q^2 + 90q - 1000$.
Con esto: $B'(q) = -0,3q + 90 = 0 \Rightarrow q = 300$ unidades.