DISTRIBUCIÓN NORMAL

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea Z una variable normal estándar; halla las probabilidades:

a) $P(Z \leq 2{,}22)$ b) $P(Z \leq -2{,}22)$ c) $P(-1{,}5 < Z < 3)$

Solución:

a) Basta con buscar en la tabla $N(0, 1)$.

$P(Z \leq 2{,}22) = 0{,}9868$

b) $P(Z \leq -2{,}22) = 1 - P(Z \leq 2{,}22) = 1 - 0{,}9868 = 0{,}0132$.

c) $P(-1{,}5 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1{,}5) = 0{,}9987 - (1 - P(Z < 1{,}5) = 09987 - (1 - 0{,}9332) =$
$= 0{,}9319$

2. Siendo X una variable que se distribuye $N(4,\ 1{,}5)$, halla el valor tipificado de:

a) 7 b) 5,5 c) 1,5

Para esta distribución, calcula las probabilidades: $P(X < 7)$; $P(X < 5{,}5)$; $P(X < 1{,}5)$

Solución:

Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

a) $Z = \dfrac{7-4}{1,5} = 2 \Rightarrow P(X < 7) = P(Z < 2) = 0{,}9772$.

b) $Z = \dfrac{5,5-4}{1,5} = 1 \Rightarrow P(X < 5{,}5) = P(Z < 1) = 0{,}8413$.

c) $Z = \dfrac{1,5-4}{1,5} = -\dfrac{5}{3} \approx -1,67$: $P(X < 1{,}5) = P(Z < -1{,}67) = 1 - P(Z < 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$.

3. Si X es una variable continua $N(28, 5)$, halla:

a) $P(X > 31)$ b) $P(28 < X < 35{,}5)$ c) $P(20 < X < 38)$

Solución:

a) $P(X > 31) = P\left(Z > \dfrac{31-28}{5}\right) = P(Z > 0,6) = 1 - P(Z < 0,6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$.

b) $P(28 < X < 35,5) = P\left(\dfrac{28-28}{5} < Z < \dfrac{35,5-28}{5}\right) = P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - 0,5 =$
$= 0{,}9332 - 0{,}5 = 0{,}4332$

c) $P(20 < X < 38) = P\left(\dfrac{20-28}{5} < Z < \dfrac{38-28}{5}\right) = P(-1,6 < Z < 2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1,6)) =$
$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}9452) = 0{,}9224$

4. Si X es variable $N(\mu, \sigma)$ y se tiene que $P(X < 2) = 0{,}5987$ y $P(X < 6) = 0{,}6915$, halla los valores de μ y σ.

Solución:

Tipificando se tiene:

$P\left(Z < \dfrac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0,2546 \Rightarrow \dfrac{4-\mu}{\sigma} = -0,66 \rightarrow$ (Se corresponde con un valor de Z negativo).

En la tabla se busca $1 - 0{,}2546 = 0{,}7454$. El valor de Z correspondiente es 0,66.

$$P\left(Z<\frac{7-\mu}{\sigma}\right)=0,9082 \Rightarrow \frac{7-\mu}{\sigma}=1,33.$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases}\mu-0,66\sigma=4\\ \mu+1,33\sigma=7\end{cases}$. Su solución es: μ = 5 y σ = 3/2

5. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(Z<k)=0,9115$ b) $P(Z<k)=0,9452$

c) $P(Z<k)=0,1587$ d) $P(Z<k)=0,95$

Solución:

a) El valor 0,9115 de la tabla se corresponde con Z = 1,29. Por tanto, k = 1,29.

b) El valor 0,9452 de la tabla se corresponde con Z = 1,6. Por tanto, k = 1,6.

c) Como 0,1587 es menor que 0,5 hay que buscar el valor de Z que deja por debajo 1 – 0,1587 = 0,8413. Ese valor es Z = 1. Por tanto, k = –1.

d) El valor 0,95 no aparece en la tabla. Como está entre 0,9495, correspondiente a Z = 1,64, y 0,9505, correspondiente a Z = 1,65, el valor de k buscado es k = 1,645.

6. En una distribución normal, halla el porcentaje de valores que distan de la media:

a) Menos de 1,2 desviaciones típicas. b) Entre 0,5 y 1 desviación típica.

Solución:

a) Se pide calcular X tal que $|X-\mu|<1,2\sigma \Rightarrow -1,2<\frac{X-\mu}{\sigma}<1,2$.

Como

$$P\left(-1,2<\frac{X-\mu}{\sigma}<1,2\right)=P(-1,2<Z<1,2)=P(Z<1,2)-P(Z<-1,2)=2\cdot P(Z<1,2)-1=$$

= 2 · 0,8849 – 1 = 0,7698 ⇒ el 76,98% de valores de X distan de μ menos de 1,2σ

b) Hay que calcular: $P\left(0,5<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right)$.

$$P\left(0,5<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right)=P(0,5<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<0,5)=0,8413-0,6915=0,1498.$$

7. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media μ = 166 cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:

a) Superior a 175 cm. b) Inferior a 155 cm. c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

Solución:

La normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, (en este caso, para μ = 166 y σ = 9 → $Z=\frac{X-166}{9}$), se tendrá:

a) $P(X>175)=P\left(Z>\frac{175-166}{9}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0,8413=0,1587$.

b) $P(X<155)=P\left(Z<\dfrac{155-166}{9}\right)=P\left(Z<-1,22\right)=1-P(Z<1,22)=1-0,8888=0,1112$.

c) $P(155 < X < 175) = P(X < 175) – P(X < 155) = 0,8413 – 0,1112 = 0,7301$.

8. Las alturas de 500 estudiantes varones están distribuidas normalmente con media 172 cm y desviación típica 12 cm. Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes tienen una altura?:

a) Igual a 170 cm b) Menor que 170 cm b) Entre 175 y 1 90 cm

Solución:

a) $P\left(X=170\right)=0$. La probabilidad de un valor concreto (de un punto) siempre es 0.

b) Para un estudiante:

$$P\left(X<170\right)=P\left(Z<\frac{170-172}{12}\right)=P\left(Z<-0,166...\right)\approx P\left(Z<-0,17\right) = 1 – 0,5675 = 0,4325.$$

Para 500 estudiantes: $500 \cdot 0,4325 = 216,25 \rightarrow$ aproximadamente 216.

c) $P\left(175<X<190\right)=P\left(\dfrac{175-172}{12}<Z<\dfrac{190-172}{12}\right)=P\left(0,25<Z<1,5\right)=$

$= P\left(Z<1,5\right)-P\left(Z<0,25\right) = 0,9932 – 0,5987 = 0,3345 \rightarrow 0,3345 \cdot 500 = 167,25.$

Aproximadamente 167 estudiantes.

9. La longitud de cierto tipo de peces sigue una distribución normal de media 100 mm y desviación típica 9 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre 82 mm y 91 mm?

Solución:

La distribución es $N(100, 9)$. La variable X que mide la longitud de esos peces se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-100}{0}$. Luego:

$$P\left(X<91\right)=P\left(Z<\frac{91-100}{9}\right)=P(Z<-1) = 1 – P(Z < 1) = 1 – 0,8713 = 0,1587.$$

$$P\left(X<82\right)=P\left(Z<\frac{82-100}{9}\right)=P\left(Z<-2\right)=1-P\left(Z\le 2\right) = 1 – 0,9772 = 0,0228$$

$P(82 < X < 91) = P(X < 91) – P(X < 82) = 0,1587 – 0,0228 = 0,1359$.

10. El diámetro de las ciruelas de una determina variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

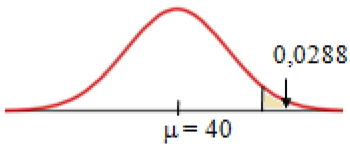
Solución:

La medida X de su diámetro se distribuye según la normal: $N(4,5,\ 0,3)$. Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-4,5}{0,3}$.

Se desea encontrar el valor d (de diámetro) tal que $P\left(X>d\right)=0,10 \Rightarrow$

$$P\left(Z>\frac{d-4,5}{0,3}\right)=0,10 \Rightarrow \frac{d-4,5}{0,3}=1,28\Rightarrow d=0,3\cdot 1,28+4,5=4,884 \text{ cm}$$

11. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.
a) ¿Cuál es la desviación típica?
b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?
Solución:
La distribución de edad de la población es como se indica en la figura adjunta.



a) Se sabe que $P(X > 60) = 0,0228$.
Como la normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 40 y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60-40}{\sigma}\right) = 0,0228 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{20}{\sigma}\right) = 0,0228 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0,0228 = 0,9772 \Rightarrow \frac{20}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 10.$$

Esto es, la desviación típica vale 10.