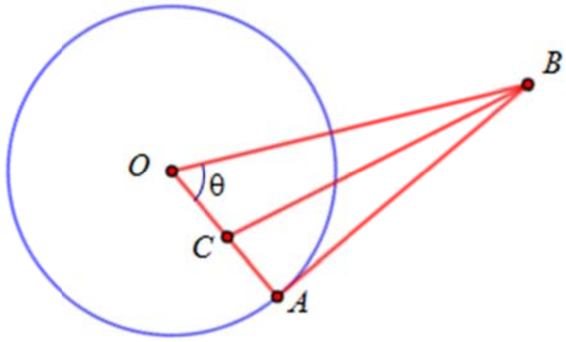
¿CUÁNTO MIDE *OC*?

https://www.concursoprimavera.es/resources/problemas/problemas-2003-fase2-nivel4.pdf

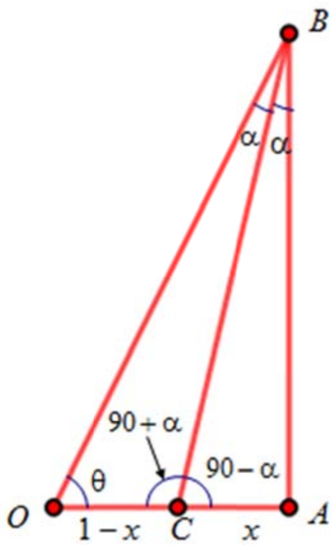
El problema que sigue puede plantearse a estudiantes de bachillerato. Así se hizo en el "Concurso de Primavera de 2003". Aquí he cambiado ligeramente el enunciado.
No me parece que sea un problema fácil, pero una vez visto el camino la solución sale de manera espontánea.
En la solución expondré dos formas de resolverlo: ambas emplean argumentos trigonométricos. La primera forma me parece la más fácil: aplico el teorema del seno y algo más; la segunda llega a partir de la semejanza de triángulos.

Problema
En la circunferencia de la figura, de centro *O* y radio 1, *BA* es tangente en *A* a la circunferencia. Si *BC* es bisectriz del ángulo *B*, ¿cuánto mide *OC* en función del ángulo tetha? ¿Cuál sería su valor si tetha vale 60º?



Solución:
1.ª forma
El triángulo *OAB* es rectángulo, con ángulo recto en *A* (recuérdese que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia).

La bisectriz determina dos triángulos: *ACB* y *CBO*; siendo sus ángulos los que se indican en la figura adjunta.
Además, como *OA* = 1, si *CA* = *x* ⇒ *OC* = 1 – *x*.



En el triángulo *CBA* se tiene: $\sin\alpha = \dfrac{x}{\overline{BC}}$.

En el triángulo OBC, aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = \frac{\overline{OC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{OB}}{\sin(90^\circ+\alpha)} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = \frac{1-x}{\sin\alpha}$$

Sustituyendo:

$$\overline{BC} = \frac{x}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{x}{\sin\alpha\cdot\sin\theta} = \frac{1-x}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{x}{\sin\theta} = 1-x \ (*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (1-x)\sin\theta \Rightarrow x + x\sin\theta = \sin\theta \Rightarrow x(1+\sin\theta) = \sin\theta \Rightarrow x = \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

Por tanto,

$$\overline{OC} = 1-x = 1-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{1+\sin\theta}.$$

Para el caso de $\theta = 60^{o} \Rightarrow \overline{OC} = \dfrac{1}{1+\sin 60^{o}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3}$.

2ª forma

El punto *C*, por ser de la bisectriz del ángulo *B*, equidista de los lados *BO* y *BA*.

Por tanto, si *D* es la proyección de *C* sobre *BO*, se obtiene otro triángulo, el *ODC*, que es equivalente a *OAB*. En consecuencia, sus lados son proporcionales, cumpliéndose:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{OD}}{1} = \frac{1-x}{\overline{OB}} = \frac{x}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{x}{1-x} = \sin\theta$$

Esta igualdad es la misma que la obtenida anteriormente (*).