ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU– O COMO SE LLAME LA SELECTIVIDAD DE 2017

1. Andalucía, junio 17

Ejercicio 3.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Determina los valores de λ para que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (*I* es la matriz identidad).
b) [1,5 puntos] Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con *x* = 1.
Solución:

a) $A+\lambda I=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$.

Esta matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0.

$$|A+\lambda I|=\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix}=(-2+\lambda)\cdot\left[(-2+\lambda)(1+\lambda)-4\right]=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-2+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda=-2;\ \lambda=2;\ \lambda=3.$

b) $AX=-3X \Rightarrow AX+3X=O \Rightarrow (A+3I)X=O$. Da lugar al sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → Sistema homogéneo con infinitas soluciones: la matriz de coeficientes es la correspondiente a λ = 3, que hace que $A+\lambda I$ no tenga inversa.
Queda el sistema equivalente:

$\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ → Su solución es: $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

2. Aragón, junio 17

B.1. a) (2 puntos) Sea *A* una matriz de dimensión 3 × 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) (1 punto) Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|$ = 1, calcule el determinante de *A*, es decir: $|A|$.

a.2) (1 punto) Si $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$, determine los valores de *x* para los que se cumple que $|B|$ = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) (1 punto) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 × 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donde *M´* representa la matriz traspuesta de *M*.

<u>Solución</u>:

a.1) Para una matriz cuadrada, *A*, de orden *n* se cumple: $|kA| = k^n |A|$.

Por tanto, si *A* es de orden 3, se tiene que:

$$|B| = \left| \left(\frac{1}{2} \right) A \right| = \frac{1}{2^3} |A| \Rightarrow 1 = \frac{1}{2^3} |A| \Rightarrow |A| = 8.$$

a.2) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow 4x - 2(x-1) + (x-1)^2 - 4 = 8 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3.$

b) $MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$

<u>**3**. Asturias, junio 17</u>

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores *reales* de *k*, si la matriz *B* · *A* tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para *k* = 1. (1,5 puntos)

a) Estudia, en función de los valores *reales* de *k*, si la matriz *A* · *B* poses inversa. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$ → Tendrá inversa cuando $|B \cdot A| \neq 0$.

Como $|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3 \neq 0$ para todo valor de *k*, la matriz *B* · *A* siempre tendrá inversa.

Para *k* = 1, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Su inversa será: $(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ → Tendrá inversa cuando $|A \cdot B| \neq 0$.

Como $|A\cdot B|=\begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=k\cdot(2k+2-2k)-2k=0$ para todo valor de *k*, la matriz $A\cdot B$ no es invertible.

<u>**4**. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 1)</u>
Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial $A\cdot M=B$, donde $A=\begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuantas filas y columnas debe tener la matriz *M*?
2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de *t* es la matriz *A* invertible?
3) [1,5 PUNTOS] En el caso *t* = –1, despeje la matriz *M* en función de las matrices *A* y *B* y calcule su valor.

<u>Solución</u>:
1) El producto de matrices puede hacerse cuando el número de columnas de la matriz de la izquierda, *A*, es igual al número de filas de la otra matriz, *M*. La matriz producto, *B*, tiene el mismo número de filas que *A* y el mismo número de columnas que *M*.
En esquema: $A_{n\times m}\cdot M_{m\times p}=B_{n\times p}$. Aquí, $A_{3\times 3}\cdot M_{m\times p}=B_{3\times 2}\Rightarrow m=3;\ p=2$.
Por tanto, en este caso, *M* deberá tener 3 filas y 2 columnas.

2) La matriz *A* es inversible cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(C1+C3)\to\begin{vmatrix} t+2 & 2t & 2 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(t+2)\cdot(t-1)$$

La matriz *A* es inversible cuando $t\neq -2$ y $t\neq 1$.

3) $A\cdot M=B\Rightarrow M=A^{-1}\cdot B$.

Para *t* = –1, $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A|=-2$. Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de *A*.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $A^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix}$$

<u>**5**. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 2)</u>

Ejercicio 1

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso a = 3.

<u>Solución</u>:

1) Empezamos estudiando el rango de la matriz de coeficientes; para ellos calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = (F2 - F1) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = (a-1) \cdot a$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ y rango de A = 3. En este caso el sistema será compatible determinado. (Como existe la matriz inversa de A, la solución puede calcularse despejando la matriz X de las incógnitas).

Si a = 0 el sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$ → Evidentemente es incompatible.

Si a = 1 el sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ (Transformaciones de Gauss) → $\begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = t \\ z = 5 - t \end{cases}$.

2) El sistema es compatible indeterminado en el caso a = 1. Su solución es la indicada más arriba.

Para a = 3 el sistema es compatible determinado: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 3z = 2 \\ 9x + 6y + 6z = 1 \end{cases}$

→ (Transformaciones de Gauss) → $\begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - 6E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2z = 0 \\ 3x = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11/3 \\ y = 17/3 \\ z = 0 \end{cases}$.

6. Castilla La Mancha, junio 17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbf{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z=a-4 \\ 2x+y-az=a-1 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \qquad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) = M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\rightarrow$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\rightarrow$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a(-1+a)$$ $\rightarrow$ Este determinante vale 0 si $a = 0$ o $a = 1$.

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) = M$. (El rango de A es 2: $|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$).

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow$ rango de M es 3. Sistema incompatible.

- Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) = M$. . (El rango de A es 2).

El menor $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 12 \neq 0 \Rightarrow$ rango de M es 3. Sistema incompatible.

b) Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado. Puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=-5 \\ 2x+y+z=-2 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} E1+E3: \qquad -x=-8 \\ E2+E3: \rightarrow 2x+2y=-5 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E2+E3:\to \left.\begin{array}{r} x=8 \\ 2x+2y=-5 \\ y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=-21/2 \\ z=-15/2 \end{array}\right.$$

<u>7. Castilla La Mancha, junio 17</u>

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X+C=A-X\cdot B$. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>:

a) $2I_3+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $|2I_3+B|=1$, dicha matriz tiene inversa.

b) $2X+C=A-X\cdot B \Rightarrow 2X+X\cdot B=A-C \Rightarrow 2X\cdot I+X\cdot B=A-C \Rightarrow X(2I+B)=A-C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (multiplicando por $(2I+B)^{-1}$ por la derecha) $X=(A-C)\cdot(2I+B)^{-1}$.

Cálculo de $(2I+B)^{-1}$.

$$Adj(2I+B)=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (2I+B)^{-1}=\frac{[Adj(2I+B)]^t}{|2I+B|}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A-C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se tendrá que:

$$X=(A-C)\cdot(2I+B)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>8. Castilla–León, junio 17</u>

E1. a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases} \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=2-3\lambda+\lambda=2-2\lambda$$ $\to$ Este determinante vale 0 si $\lambda = 1$.

Con esto:

- Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $\lambda = 1$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\end{array}\right)=M$ $\to$ r(A) = r(M) =2: compatible indeterminado.

(Las dos primeras flas está repetidas).

b) Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado; queda:

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+4z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1-z\\ x+2y=2-4z\end{cases} \Rightarrow_{E2-E1} \begin{cases} x+y=1-z\\ y=1-3z\end{cases} \Rightarrow (z=t) \to \begin{cases} x=2t\\ y=1-3t\\ z=t\end{cases}$$

<u>**9**. Cataluña, junio 17</u>

4. Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x+ay=1\\ x+az=1\\ y+z=a\end{cases}$$

a) Comproveu que $a \neq 0$.
[1 punt]

b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre a.
[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) Si el sistema tiene solución única necesariamente la matriz de coeficientes debe ser de rango 3. Esto significa que $|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2a\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$.

b) Para $a \neq 0$ puede aplicarse la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-2a+a^3}{-2a}=\frac{2-a^2}{2};\; y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-a^2}{-2a}=\frac{a}{2};\; z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-a^2}{-2a}=\frac{a}{2}$$

Para a = 0 el sistema es $\begin{cases} x=1\\ y+z=0\end{cases}$. Su solución es: $\begin{cases} x=1\\ y=t\\ z=-t\end{cases}$.

10. Cataluña, junio 17

5. Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} x & -1\\ y^2+1 & x\end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

a) Comproveu que la matriu $\boldsymbol{M}$ és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y.

[1 punt]

b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt]

Solución:

a) Una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero.

Como $|M|=\begin{vmatrix} x & -1\\ y^2+1 & x\end{vmatrix}=x^2+y^2+1$ es siempre positivo, la matriz M es invertible para cualesquiera valores de x e y.

b) Si x = 1 e y = –1, la matriz es $M=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; con $|M|=3$.

Su adjunta es $Adj(M)=\begin{pmatrix} 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Por tanto, $M^{-1}=\frac{\left[Adj(M)\right]^t}{|M|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

11. Comunidad Valenciana, junio 17

Problema B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2=2C-I$, siendo $C=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, (2,5 *puntos*), y el cálculo de la matriz C^4. (2,5 *puntos*)

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale –1. (3 *puntos*)

c) La matriz *B* que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 *puntos*)
Solución:

a) $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

$$2C - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente se cumple que $C^2 = 2C - I$.

Como $C^4 = C^2 \cdot C^2 \Rightarrow C^4 = (2C - I)(2C - I) = 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 4C - 3I$.

Por tanto:

$$C^4 = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Para una matriz *M*, cuadrada de orden *n* y no singular, se cumple:

1) $|M^k| = (|M|)^k$; 2) $(|M|)^{-1} = \dfrac{1}{|M|}$; 3) $|pM| = p^n |M|$; 4) $|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$.

Luego, si *A* es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale –1:

$$\left|\left(3A^4\right)\right| = 3^4 |A|^4 = 81 \cdot (-1)^4 = 81; \quad \left|\left(4A^2\right)^{-1}\right| = \left(4^4 |A|^2\right)^{-1} = \left(256 \cdot (-1)^2\right)^{-1} = \frac{1}{256}.$$

Por tanto:

$$\left|\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}\right| = 81 \cdot \frac{1}{256} = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

12. La Rioja, junio 17

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Halle, si existe, A^{-1}.

ii) Determine, si existe, la solución *X* e la ecuación matricial $A = AXA^{-1} + B$.

Solución:

i) La inversa de *A* es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de *A*.

La inversa existe si $|A| \neq 0$. Como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$, existe A^{-1}.

La matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) $A = AXA^{-1} + B \Rightarrow AXA^{-1} = A - B \Rightarrow A^{-1}\left(AXA^{-1}\right)A = A^{-1}(A - B)A \Rightarrow X = A^{-1}(A - B)A$.

Como $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}$$

13. Madrid, junio 17

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real *a*.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para *a* = 1.
c) (0,5 puntos) Resolver el sistema para *a* = 2.
Solución:
a) Hay que estudiar el rango de las matrices de coeficientes, *A*, y ampliada, *M*.

Estas matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)=M$

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}=-8+a^2+4=a^2-4$.

Este determinante vale 0 si $a = \pm 2$; y es distinto de 0 si $a \neq \pm 2$.
Con esto:

- Si $a \neq -2$ y $2 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = -2$ se tendrá, sustituyendo en las matrices: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)=M$

En este caso:

El rango de *A* es 2, pues $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-6$.

El rango de *M* es 3, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-24\neq 0$.

Como r(*A*) < r(*M*) el sistema será incompatible.

- Para $a = 2$ e tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)=M$. Como la columna 4ª es igual a la 1ª,

ambas matrices tienen rango 2. El sistema será compatible determinado.

b) Para a = 1 el sistema queda: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases}$. Como se ha dicho, es compatible determinado: con solución única.
Puede resolverse por Gauss:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4E1-E2 \\ E2+E3 \end{matrix} \begin{cases} 8x+5z=4 \\ x+z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4E1-5E2 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 3x=-1 \\ x+z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/3 \\ y=1/3 \\ z=4/3 \end{cases}$$

c) Para a = 2 el sistema queda $\begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ 4y-2z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Equivalente a: $\begin{cases} x-4y+3z=1 \\ 4y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+3z=1 \\ z=2y \end{cases} \to \begin{cases} x-4y+6y=1 \\ z=2y \end{cases} \to \begin{cases} x=1-2y \\ z=2y \end{cases}$.

Si se hace $y = t$ la solución es: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$.

14. Navarra, julio 17

B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A-A^7=BB^tX$, siendo

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

Solución:

Se hacen algunas potencias de A.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\ A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};\ A^7=A^3\cdot A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\to$ Aunque no se pide, se podría observar que $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto: $7A-A^7=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$$BB^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \text{Su inversa es: } \left(BB^t\right)^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $7A-A^7=BB^tX \Leftrightarrow \left(BB^t\right)^{-1}\left(7A-A^7\right)=X \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot X \Leftrightarrow \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=X \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

15. País Vasco, junio 17
Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

(Se trata de una matriz periódica de periodo 3).

Como $A^4=I \Rightarrow A^5=A$; $A^6=A^2$; $A^7=A^3$; $A^8=A^4=I$. Es evidente que $A^{4n}=I$.

Por tanto, como 2017 = 4 · 504 + 1 ⇒ $A^{2017}=A^{4\cdot 504}\cdot A=I\cdot A=A$.

16. País Vasco, junio 17
Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Solución:

Sean *x* los pasajeros que pagan el billete entero; *y*, los que pagan el 80%; *z*, los que pagan el 50%.

Por el enunciado se deduce que:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2\cdot x+(0,80\cdot 1,2)y+(0,50\cdot 1,2)z=46,56 \\ z=2(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2x+0,96y+0,6z=46,56 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

Se transforma el sistema:

$$\begin{matrix} \\ E2-1,2E1 \\ E3-2\cdot E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=60 \\ -0,24y-0,6z=-25,44 \\ -3z=-120 \to z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+40=60 \\ -0,24y-24=-25,44 \to y=6 \\ z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=6 \\ z=40 \end{cases}.$$