ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU– O COMO SE LLAME LA SELECTIVIDAD DE 2017

1. Andalucía, junio 17

Ejercicio 2B. (2,5 puntos) Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t=\sqrt[4]{x}$).

Solución:

Si $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow t^2=\sqrt{x} \Rightarrow 2tdt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx=4t\sqrt{x}dt \to dx=4t^3dt$.

Además, si $x = 1 \Rightarrow t = 1$; y si $x = 16 \Rightarrow t = 2$.

Con esto:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{4t^2}{t+1}dt \to \text{(dividiendo: } \frac{4t^2}{t+1}=4t-4+\frac{4}{t+1}\text{)} \to$$

$$\int_1^2 \left(4t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt = \left(2t^2-4t+4\ln(t+1)\right)\Big|_1^2 = 8-8+4\ln 3-\left(2-4+4\ln 2\right)=2+4\ln\frac{3}{2}.$$

2. Andalucía, septiembre 17

Ejercicio 2A. (2,5 puntos) determina la función f: **R** → **R** tal que $f''(x)=xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Solución:

Habrá que integrar dos veces, por partes.

$$f'(x)=\int f''(x)dx \Rightarrow f'(x)=\int xe^x dx$$

Tomando:

$$u=x \text{ y } dv=e^x dx \Rightarrow du=dx \text{ y } v=e^x$$

Luego,

$$f'(x)=xe^x-\int e^x dx = xe^x-e^x+c'$$

Como tiene un extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1)=0 \to f'(1)=e-e+c'=0 \to c'=0$.

Por tanto:

$$f(x)=\int\left(xe^x-e^x\right)dx=\int xe^x dx-\int e^x dx = \left(xe^x-e^x\right)-e^x+c \Rightarrow f(x)=xe^x-2e^x+c.$$

Como pasa por el punto (0, 0), se cumple que $f(0)=0$, luego $0=-2+c \to c=2$.

La función buscada es $f(x)=xe^x-2e^x+2$.

3. Aragón, junio 2017

a) (3 puntos) Considere la función de variable real x siguiente:

$$f(x)=x\left(\ln(x)\right)^2$$

a.1) (0,5 puntos) Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) (1 punto) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\frac{5}{3}$$

Solución:
a.1) El logaritmo está definido solo para valores de $x > 0$: Dom(f) = $\mathbf{R}^+$.

a.2) Derivando:

$$f'(x)=\left(\ln(x)\right)^2+2x\left(\ln(x)\right)\cdot\frac{1}{x}=\ln(x)\cdot\left(\ln(x)+2\right)$$

La derivada se anula cuando $\begin{cases}\ln x=0\Rightarrow x=1\\ \ln x=-2\Rightarrow x=e^{-2}\end{cases}$. Con esto:

- Si $0<x<e^{-2}$, $f'(x) > 0$ (los factores $\ln(x)$ y $\left(\ln(x)+2\right)$ son negativos) $\Rightarrow$ f crece.
- Si $e^{-2}<x<1$, $f'(x) < 0$ ($\ln(x) < 0$; $\left(\ln(x)+2\right) > 0$) $\Rightarrow$ f decrece.
- Si $x>1$, $f'(x) > 0$ (los factores $\ln(x)$ y $\left(\ln(x)+2\right)$ son positivos) $\Rightarrow$ f crece.

a. 3) por la información anterior:

- En $x=e^{-2}$ la función tiene un máximo relativo: punto $\left(e^{-2},4e^{-2}\right)$.
- En x = 1 la función tienen un mínimo: punto (1, 0).

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\left[\infty-\infty\right]$ = (Puede resolverse como sigue) =

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}=$$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(k+2)x-12}{\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}=\frac{k+2}{2}$. (Basta con dividir numerador y denominador por x).

Si se sabe que $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{k+2}{2}=\frac{5}{3}\Rightarrow k=\frac{4}{3}$.

4. Aragón, junio 2017

a) (2 puntos) Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.
b) (2 puntos) Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Solución:
a) Sean x e y dichos números. Deben cumplir que $2x+3y=24$.
Se pretende que el producto $P=x\cdot y$ sea máximo.

Despejando y en la igualdad inicial, $y=8-\frac{2}{3}x$, y sustituyendo en P, se tiene:

$$P=x\cdot y\ \Rightarrow\ P=x\cdot\left(8-\frac{2}{3}x\right)\ \Rightarrow\ P(x)=8x-\frac{2}{3}x^2$$

El máximo de P se da en la solución de $P'=0$ que haga negativa a P''.

$$P'(x) = 8 - \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow x = 6.$$

Como $P''(x) = -\frac{4}{3} < 0$, para ese valor de x = 6 se obtiene el máximo buscado.

Los números serán x = 6 e y = 4.

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty]$.

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{x+1}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x+1}{1+\sin x}\right)\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{1+\sin x}\right)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\ln(1+\sin x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \text{Aplicando L´Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{\cos x}{1+\sin x}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-1-(-1)}{2} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

5. Asturias, junio 17

2. Sean las funciones $f : R \longrightarrow R$ y $g : [0; +\infty) \to R$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

Solución:

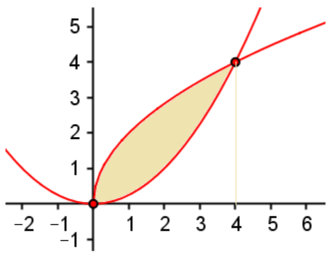
a) Los puntos de corte son las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$\frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 8\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = 64x \Rightarrow x^4 - 64x = 0 \Rightarrow x(x^3-64) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 4.$$

Los puntos de corte serán (0, 0) y (4, 4).

b) Como cada una de las gráficas es una parábola, pueden dibujarse dando algunos de sus puntos.

El recinto es el sombreado en la figura adjunta.



El área pedida vale:

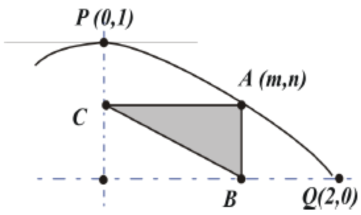
$$A = \int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{4}x^2\right)dx = \left[2\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{4}{3}8-\frac{64}{12} = \frac{16}{3}\ \text{u}^2$$

6. Asturias, junio 17

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,1)$ y $Q(2,0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX.

a) Calcula los valores de a, b y c. (1 punto)

b) Con $a = 1, b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m,n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



Solución:

a) La función $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$ y tiene un máximo en el punto (0, 1). Por tanto: $y(0) = 1$; $y(2) = 0$; $y'(0) = 0 \to y' = b + 2cx$.

$1 = a$; $0 = a + 2b + 4c$; $0 = b$

Se obtiene: $a = 1$; $b = 0$ y $c = -\frac{1}{4}$. La función es $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$.

b) Para $x = m$ se obtiene $y = n = 1 - \frac{1}{4}m^2$.

El área del triángulo será $S = \frac{m \cdot n}{2} = \frac{m\left(1 - \frac{1}{4}m^2\right)}{2} = \frac{m}{2} - \frac{m^3}{8}$.

El área del triángulo es máxima en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.

Derivando:

$$S' = \frac{1}{2} - \frac{3m^2}{8} ;\ S'' = -\frac{6m}{8}$$

$$S' = \frac{1}{2} - \frac{3m^2}{8} = 0 \Rightarrow 4 - 3m^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$$ → La solución $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ hace positiva a S''.

El punto A será: $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$.

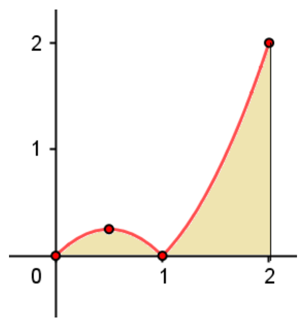
7. Baleares, septiembre 17

Consideremos la función $f(x) = x \cdot |x - 1|$. Hacer un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [0, 2]. (6 puntos). Hallar el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

Solución:

Como $|x-1| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x(x-1) & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases} = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



Su gráfica está compuesta por dos trozos de parábola. Es la adjunta.

El área pedida, que es la sombreada en la figura, viene dada por:

$$S = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1 \text{ u}^2.$$

8. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 1)

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) [2,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f*. Compruebe la solución obtenida.
2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por *f* y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

1) Para hallar una primitiva de la función dada puede convenir hacer un cambio de variable. Por ejemplo, $1+x=t^2 \to \sqrt{1+x}=t$.

Así:

$$x=t^2-1 \Rightarrow dx=2tdt$$

Haciendo el cambio en la expresión inicial:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\int \frac{\left(t^2-1\right)}{t}\cdot 2tdt=\int\left(2t^2-2\right)dt = \frac{2}{3}t^3-2t+c\,.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}-2\sqrt{1+x}+c\,.$$

Para comprobar el resultado hay que derivar la solución hallada. Se obtiene:

$$\left(\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}-2\sqrt{1+x}+c\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{1/2}-\frac{2}{2\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,.$$

2) El área pedida viene dada por:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}-2\sqrt{1+x}\right]_0^4=\left(\frac{2}{3}5\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{4\sqrt{5}+4}{3}\,.$$

9. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 2)

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x} & \text{si } x<0\\ 2x^3-15x^2+36x+3 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en **R** – {0} y determine los máximos y mínimos relativos.
2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.
3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

Solución:

1) Derivando cada función por separado se tiene:

- Para $x < 0$, $g'(x)=\dfrac{x-(x+1)}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

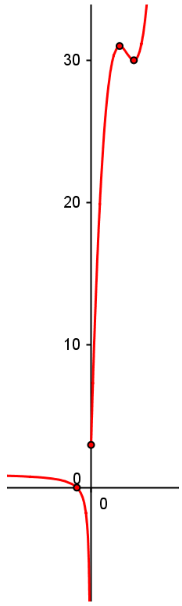
Como $g'(x)<0$, la función es decreciente para $x < 0$.

- Para $x > 0$, $g'(x)=6x^2-30x+36 \Rightarrow g'(x)=6\left(x^2-5x+6\right)=6(x-2)(x-3)$

$g'(x)=0$ si $x = 2$ o $x = 3$; $g'(x)<0$ si $x \in (2, 3)$; $g'(x)>0$ si $x \in (0, 2) \cup (3, +\infty)$.

Por tanto:

La función decrece también en el intervalo (2, 3); y crece en los intervalos (0, 2) y (3, +∞).

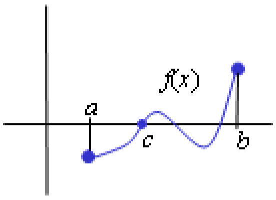


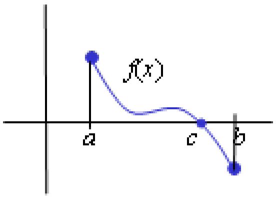
En el punto $x = 2$ tiene un máximo, pues decrece a su izquierda y crece a su derecha.
En $x = 3$ de da un mínimo; la función crece a su izquierda y decrece a su derecha.

2) Como en $x = 0$ la función no tiene límite, pues $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$, no es continua en dicho punto.

3) La consideración anterior indica que la función tiene una asíntota vertical: en $x = 0$, por su izquierda. También tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$:
$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.
Dando algunos valores: $g(0) = 3$; $g(-1) = 0$; $g(2) = 31$, máximo relativo; $g(3) = 30$, mínimo relativo.
Se puede trazar la gráfica adjunta.

<u>**10**. Castilla y León, junio 17</u>
E3. a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. (1 punto)
b) Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz. (1,25 puntos)
<u>Solución</u>:
a) El teorema de Bolzano asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje en algún punto de ese intervalo. Dice así: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".
Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en un punto c entre a y b.
(Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)

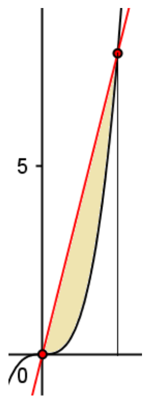




b) Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución, una raíz, entre a y b.
En este caso, para $P(x) = x^6 + x^4 - 1$, como $P(0) = -1$ y $P(1) = 1$, el polinomio tendrá una raíz en el intervalo (0, 1).

<u>**11**. Castilla y León, junio 17</u>
E4. a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$. (1,25 puntos)
<u>Solución</u>:
a) La tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.
En este caso, para $f(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow f(1) = 4e^{1-1} = 4$; $f'(x) = 4e^{x-1} \to f'(1) = 4$. Luego, la recta tangente será:

$y-4=4\cdot(x-1)\Rightarrow y=4x$



b) Las funciones se cortan en las soluciones de $4x=x^3 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow$ $x=-2$, $x=0$, $x=2$.
Por tanto, en el primer cuadrante, el área de la región que de limitan ambas gráficas viene dada por:

$$A=\int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8-4=4\ \text{u}^2$$

12. Castilla y León, junio 17

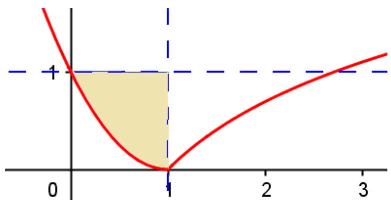
E4. Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ a+\ln x & \text{si } x>1\end{cases}$.

a) Encontrar a para que la función sea continua. (1 punto)
b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1$, $y=1$. (1,25 puntos)

Solución:
a) Cada una de las funciones dadas es continua en su dominio de definición. Habrá que ver qué pasa en $x=1$. Será continua si los límites laterales coinciden.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=0;\ \ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a+\ln x)=a \Rightarrow a=0.$$

b) Para $a=0$, la función es $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}$.



Su representación gráfica es sencilla.
El área pedida es la sombreada. Su valor es

$$S=1-\int_0^1(x-1)^2dx=1-\left(\frac{(x-1)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ \text{u}^2.$$

13. Castilla–La Mancha, junio 17

1A. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2+a & \text{si } x\le 2\\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**. (1,5 puntos)
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo [–2, 6]. (1 punto)

Solución:
a) El único punto que presenta dudas es $x=2$.
Continuidad: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a;\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+bx-9\right)=-13+2b$$

Derivabilidad: las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x)=4;\qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(-2x+b)=-4+b$$

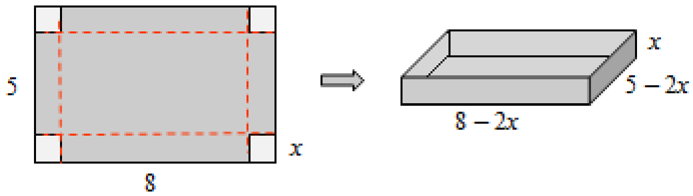
De $4=-4+b\Rightarrow b=8$.

Sustituyendo en $4+a=-13+2b \Rightarrow 4+a=3 \Rightarrow a=-1$.

La función debe ser: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) El teorema de Rolle dice:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)=0$.
La función anterior es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–2, 6].
Como $f(-2)=3$ y $f(6)=-36+48-9=3$, la función verifica las hipótesis de Rolle, luego existe un punto $c \in (-2, 6)$ tal que $f'(c)=0$.

<u>**14**. Castilla–La Mancha, junio 17</u>
2A. Con una chapa metálica de 8 × 5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. (2,5 puntos)
<u>Solución</u>:
La situación es la que se muestra en la figura.



El volumen que se desea maximizar viene dado por la función:

$$f(x)=(8-2x)\cdot(5-2x)\cdot x \to f(x)=4x^3-26x^2+40x$$

El máximo se obtiene en la solución de $f'(x)=0$ que haga negativa a $f''(x)$
Derivando:

$$f'(x)=12x^2-52x+40=0 \Rightarrow x=\frac{10}{3} \text{ o } x=1.$$

$$f''(x)=24x-52 \to f''(10/3)>0;\ f''(1)=-28<0.$$

El volumen máximo se obtiene cortando un cuadrado de lado 1 m en cada esquina. Las dimensiones de la caja serán 6 × 3 × 1 metros.

<u>**15**. Castilla–La Mancha, junio 17</u>
1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ (1,25 puntos por límite)

Nota: ln denota logaritmo neperiano.
<u>Solución</u>:
Ambos límites pueden hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to -2}\frac{6x+6}{6x+10}=\frac{-6}{-2}=3$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{x+1}}{2\cos x} = \frac{2}{2} = 1.$$

<u>**16**. Castilla–La Mancha, junio 17</u>

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. (1,5 puntos)

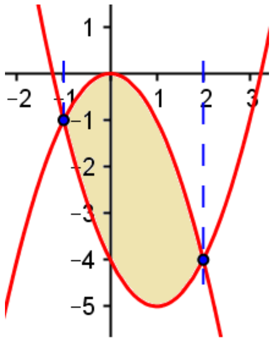
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Las gráficas se cortan en los puntos solución de la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$-x^2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 2$$

Las funciones pueden representarse dando algunos valores, siendo el recinto el sombreado en la figura adjunta.

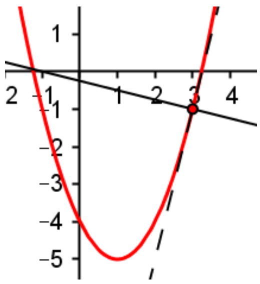


Como la función $g(x)$ va por debajo de $f(x)$ en el intervalo considerado, el área pedida es:

$$\int_{-1}^{2}\left(-x^2-\left(-x^2-2x-4\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2} = -\frac{16}{3}+4+8-\left(\frac{2}{3}+1-4\right) = 9 \text{ u}^2.$$

b) La pendiente de la recta normal (perpendicular a la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$) es $m = -\dfrac{1}{g´(3)}$



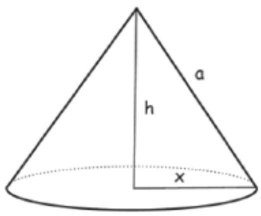
De $g´(x) = 2x - 2 \Rightarrow g´(3) = 4$.

Como $g(3) = -1$, la recta pedida es:

$$y-(-1) = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

<u>**17**. Cataluña, junio 17</u>

6. Considereu un con de 120 cm³ de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \dfrac{360}{\pi}\cdot\dfrac{1}{h} + h^2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

[1 punt]

NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

<u>Solución</u>:

a) El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = 120 \Rightarrow x^2 = \frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}$.

Como $a^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = \frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2$.

b) La arista puede darse en función de la altura, $a = \sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2}$; y será mínima cuando lo sea a^2: $a^2 = f(h) = \frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2$.

Derivando:

$$f'(h) = -\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h^2} + 2h \rightarrow f'(h) = 0 \Rightarrow \frac{360}{\pi h^2} = 2h \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}.$$

$f''(h) = \frac{720}{\pi}\cdot\frac{1}{h^3} + 2 \rightarrow$ Como $f''(h) > 0$ si $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}$, para ese valor de h se obtiene el mínimo de a.

<u>**18**. Comunidad Valenciana, junio 17</u>

Problema A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

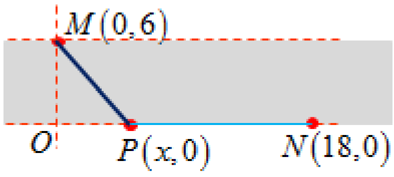
a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. (3 *puntos*)

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 *puntos*)

c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) Una representación gráfica del problema es la que se da a continuación.



Las longitudes de cada tramo son: $|MP| = \sqrt{6^2 + x^2}$; $|PN| = 18 - x$

Por tanto, el coste C, en función de x, es: $C(x) = 10\sqrt{36 + x^2} + 5(18 - x)$.

b) El mínimo de C se da en la solución de $C'(x) = 0$ que hace positiva a $C''(x)$.

Derivando:

$$C'(x) = \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} - 5 = 0 \Rightarrow 10x = 5\sqrt{36 + x^2} \Rightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{12}.$$

Como para valores de $0 < x < \sqrt{12}$, $C'(x) < 0$ (lo que significa que C decrece) y para valores de $\sqrt{12} < x < 18$, $C'(x) > 0$ (lo que significa que C crece), se deduce que para ese valor de $x = \sqrt{12}$ se obtiene el mínimo buscado.

c) El coste mínimo será: $C\left(\sqrt{12}\right)=10\sqrt{36+12}+5\left(18-\sqrt{12}\right)=90+15\sqrt{12}$ euros.

<u>**19**. Comunidad Valenciana, junio 17</u>

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, (2 *puntos*), y los extremos relativos de la función f. (1 *punto*)

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 *puntos*)

c) El área de la región plana limitada por la curva $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos (1, 0) y (e, 0), y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 *puntos*)

<u>Solución</u>:

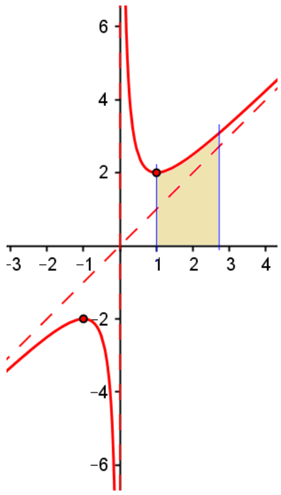
a) Derivando:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

Como $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1$, se tiene:

- Si $x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente. En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un máximo.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente. En consecuencia, en $x = 1$ se tiene un mínimo.

El máximo y mínimo pueden confirmarse con la derivada segunda, pues: $f''(-1)<0$ y $f''(1)>0$.



b) La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$.

En ese punto la función tiene asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

También tiene una asíntota oblicua, la recta $y = x$. [Para valores muy grandes de x, $\left(f(x)=x+\dfrac{1}{x}\right)\approx(y=x)$].

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.

c) El área pedida, que es la de la región sombreada, viene dada por:

$$S=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Bigg|_1^e=\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

<u>Observación</u>: Los dos primeros apartados de este ejercicio se han propuesto también en el examen de <u>Extremadura, junio 17</u>.

20. Extremadura, junio 17

A.4. Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0)=0$. (2 puntos)

Solución:

Si $1+x^2=t^2 \Rightarrow 2xdx=2tdt \Rightarrow xdx=tdt$; $x^2=t^2-1$. Con esto:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}xdx=\int \frac{t^2-1}{t}tdt=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+c \rightarrow \text{deshaciendo el}$$

cambio $\rightarrow F(x)=\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}{3}-\sqrt{1+x^2}+c \rightarrow F(0)=\frac{1}{3}-1+c=0 \Rightarrow c=\frac{2}{3}$

Luego $F(x)=\dfrac{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}{3}-\sqrt{1+x^2}+\dfrac{2}{3}$.

21. Extremadura, junio 17

B.3. Calcule, aplicando la regla de L´Hôpital, el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos x)}$ (2 puntos)

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2(1-x)}{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2(1-x)}{-\tan x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin(2x)+2}{-1-\tan^2 x}=\frac{2}{-1}=-2.$$

22. Islas Canarias, junio 17

Resolver las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{1/2}^{e/2}\frac{(\ln 2x)^2}{3x}dx$ (1,25 puntos) b) $\displaystyle\int\frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2}dx$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Si se hace el cambio de variable $\ln 2x=t \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx=dt \Rightarrow \dfrac{1}{3x}dx=\dfrac{1}{3}dt$.

Por tanto:

$$\int\frac{(\ln 2x)^2}{3x}dx=\int\frac{t^2}{3}dt=\frac{t^3}{9} \rightarrow \int\frac{(\ln 2x)^2}{3x}dx=\frac{(\ln 2x)^3}{9}$$

Luego:

$$\int_{1/2}^{e/2}\frac{(\ln 2x)^2}{3x}dx=\left.\frac{(\ln 2x)^3}{9}\right|_{1/2}^{e/2}=\frac{1}{9}$$

b) Si se opera resulta casi inmediata. Bastaría con ajustar constantes.

$$\int\frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\left(3x^2+5+x^{-3/2}\right)dx = x^3+5x+\frac{x^{-1/2}}{-1/2}+c=x^3+5x-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$$

23. Galicia, septiembre 17

2. a) Calcula: i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$; ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0,\infty)$, é $f'(x) = 1 + lnx$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1,4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

a) i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \left[\dfrac{-\infty+3e^{-\infty}}{-\infty+e^{-\infty}}\right] = \left[\dfrac{-\infty+0}{-\infty+0}\right](L´H) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12e^{2x}}{4e^{2x}} = 3$.

b) Si $f´(x) = 1+\ln x \Rightarrow f(x) = \int (1+\ln x)\,dx$. La segunda integral se hace por partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

De donde, $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$.

Luego,

$$f(x) = \int (1+\ln x)\,dx \Rightarrow f(x) = x + x\ln x - x + c \Rightarrow f(x) = x\ln x + c.$$

Como pasa por (1, 4), $f(1) = 1\cdot\ln 1 + c = 4 \to c = 4$.

Por tanto, $f(x) = x\ln x + 4$.

c) $f´(x) = 1+\ln x = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$.

Derivando otra vez, $f´´(x) = \dfrac{1}{x}$;

como $f´´(e^{-1}) = \dfrac{1}{e^{-1}} = e > 0$, la función tiene un mínimo en $x = e^{-1}$.

24. La Rioja, junio 17

4. (3 puntos) Sea la función $f(x) = \left(8-x^2\right)^{1/3}$. Para ella estudie:

I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.
II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.
III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de *f* destacando los elementos anteriores.

Solución:

I) La función $f(x) = \left(8-x^2\right)^{1/3}$ también se puede expresar como $f(x) = \sqrt[3]{8-x^2}$; que está definida para todo número real *x*: la raíz cúbica siempre está definida.

También es continua en todo **R**: para cualquier número *a*, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{8-x^2} = \sqrt[3]{8-a^2}$.

No tiene asíntotas verticales por estar definida siempre.

No tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8-x^2} = -\infty$.

No tiene asíntotas oblicuas, pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8-x^2}{x^3}} = 0$.

II) Derivando:

$$f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}}.$$

La derivada no existe cuando el denominador se anula, en las soluciones de $8-x^2=0$, que son $x=\pm\sqrt{8}$. (Conviene observar que en los demás casos el signo del denominador siempre es positivo, pues $\left(8-x^2\right)^2$ siempre es positivo).

Como la derivada se anula en $x = 0$, para estudiar su monotonía hay que considerar los intervalos: $\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$; $\left(-\sqrt{8},0\right)$, $\left(0,+\sqrt{8}\right)$; $\left(\sqrt{8},+\infty\right)$.

- Si $x\in\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)$, $f'(x)\equiv\frac{(+)}{(+)}\equiv(+) \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x\in\left(-\sqrt{8},0\right)$, $f'(x)\equiv\frac{(+)}{(+)}\equiv(+) \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x\in\left(0,+\sqrt{8}\right)$, $f'(x)\equiv\frac{(-)}{(+)}\equiv(-) \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En consecuencia, en el punto $x = 0$ la función tiene un máximo.
- Si $x\in\left(\sqrt{8},\infty\right)$, $f'(x)\equiv\frac{(-)}{(+)}\equiv(-) \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

II) Derivando de nuevo:

$$f''(x)=-\frac{2}{9}\left(8-x^2\right)^{-5/3}\cdot(-2x)^2-\frac{2}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}=-\frac{2}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}\cdot\left(\frac{4x^2}{3}\cdot\left(8-x^2\right)^{-1}+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}\left(\frac{x^2+24}{3\left(8-x^2\right)}\right)=-\frac{2\left(x^2+24\right)}{9\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^5}}.$$

Como la derivada segunda no se anula en ningún punto, la función no tiene puntos de inflexión.

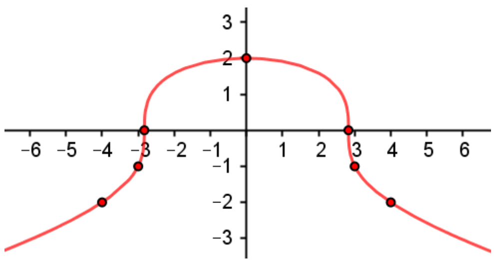
El signo de la derivada segunda viene determinado por el término $8-x^2$.

Como $8-x^2>0$ si $x\in\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right) \to f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es cóncava para ese intervalo; y será convexa cuando $x\in\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(+\sqrt{8},+\infty\right)$.

Para representar esta función, además de lo ya visto, pueden hallarse algunos de sus puntos:

(–4, –2); (–3, –1); $\left(-\sqrt{8},0\right)$; (0, 2), máximo; $\left(\sqrt{8},0\right)$; (3, –1); (4,–2)

Su gráfica es la siguiente.



25. Madrid, junio 17
Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2 puntos.
Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.
Solución:
Derivando

$$c(t)=te^{-t/2} \Rightarrow c'(t)=e^{-t/2}-\frac{t}{2}e^{-t/2}=e^{-t/2}\left(1-\frac{t}{2}\right).$$

La derivada se anula en el instante $t = 2$.
En el intervalo (0, 2) la derivada $c'(t)>0 \Rightarrow c(t)$ es creciente.
A partir de $t = 2$, $c'(t)<0 \Rightarrow c(t)$ es decreciente.
Por tanto, en el instante $t = 2$ se da el máximo de $c(t)$.
Ese máximo vale $c(2)=2e^{-1}=\frac{2}{e}$, que es menor que 1; no hay riesgo para el paciente en ningún momento.

26. Madrid, junio 17
Ejercicio B1: **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas las funciones $f(x)=\frac{2}{x}$ y $g(x)=\sin(x)$, se pide:
a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)$.
b) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (1/2, 4).
c) (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.
Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\sin x}\right)=[\infty-\infty] \to$ (Operando) $\to \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x-2x}{x\cdot\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Aplicando L´Hôpital;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x-2x}{x\cdot\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

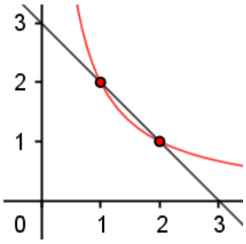
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

b) La ecuación de la recta tangente pedida es $y-4=f'(1/2)\cdot(x-1/2)$.
Como $f'(x)=-\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(1/2)=-8$.
La recta tangente será:

$$y-4=-8(x-1/2) \Rightarrow y=-8x+8.$$

c) La curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x+3$ se cortan cuando

$$\frac{2}{x} = -x+3 \Rightarrow \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 2$$



El área pedida viene dada por: $\int_1^2 \left(-x+3-\frac{2}{x}\right)dx =$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x\right)\Big|_1^2 = (-2+6-2\ln 2) - \left(-\frac{1}{2}+3\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \text{ u}^2.$$

27. Murcia, junio 17

Calcule los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right)$; b) (1 punto) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right) = [\infty - \infty] \to$ (puede observarse que $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right) = x-4$) $\to$

$$= \lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4} - \frac{4}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{\left(\cancel{\sqrt{x}-2}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to$ Aplicando L´Hôpital =

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\cdot\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

(otra vez L´Hôpital) $= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - x\cdot\sin x}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$.

28. Murcia, junio 17

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

b) [0,5 puntos] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y la gráfica de la función $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Solución:

a) La integral $\int x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ puede hacerse por partes.

Tomando:

$x = u$ y $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)xdx = dv \Rightarrow$

$dx = du$ y $v = \int \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\int\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Luego,

$$\int x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -x\cdot\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \int\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -x\cdot\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

b) El área viene dada por la integral definida $\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$, cuyo valor es:

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[-x\cdot\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

29. Murcia, junio 17

B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P = 2LK^2$ (en millones), donde *L* es el coste de la mano de obra y *K* es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de *L* y *K* minimizarían el coste total *L* + *K*?

Solución:

Si la producción es de 8 millones de unidades al mes, entonces $8 = 2LK^2 \Rightarrow L = \frac{4}{K^2}$.

Por tanto, el coste total $C = L + K$ puede escribirse solo en función de *K*: $C(K) = \frac{4}{K^2} + K$.

El mínimo coste se da en la solución de $C'(K) = 0$ que hace positiva a $C''(K)$.

Derivando e igualando 0:

$$C'(K) = \frac{-8}{K^3} + 1 = 0 \Rightarrow C'(K) = \frac{-8+K^3}{K^3} = 0 \Rightarrow K = 2.$$

Como $C''(K) = \frac{24}{K^4}$ es positivo para *K* = 2, para ese valor se obtiene el mínimo buscado.

El valor que debe tomar *L* será de 1 millón: $L = \frac{4}{K^2} \Rightarrow L = \frac{4}{2^2} = 1$.

Los valores pedidos son: *L* = 1 millón y *K* = 2 millones (de euros).

30. Navarra, junio 17

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right) \quad \text{(1 punto)} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{(1 punto)}$$

Solución:

Para calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)$ se transforma la función multiplicando por la expresión conjugada.

Queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2+3x+1\right)-\left(2x^2-5x+7\right)}{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x-6}{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)} =$$

= (dividiendo cada término de la expresión por *x*) =

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{8x-6}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+3x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2-5x+7}{x^2}}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

b) $\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ = [1^∞]. Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to1}\left(\ln\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\cos(\pi x)+2^x\right) =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\ln\left(\cos(\pi x)+2^x\right)}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left(L´H\right) = \lim_{x\to1}\frac{\frac{-\pi\sin(\pi x)+2^x\ln 2}{\cos(\pi x)+2^x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{0+2\ln 2}{-1+2}}{1} = 2\ln 2 = \ln 4\,.$$

Por tanto, $\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln 4} = 4\,.$

31. Navarra, junio 17

A4) Demuestra que la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:

Si existe un máximo relativo en el intervalo (1, 3), entonces debe anularse la derivada en algún punto de ese intervalo.

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f´(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+x}+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,.$$

No hay forma de resolver la ecuación $f´(x)=0$. Por tanto, hay que buscar otra alternativa. Puede intentarse aplicar el teorema de Bolzano a $f´(x)$. Veamos el valor que toma en los extremos del intervalo dado:

$$f´(1)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}>0$$

$$f´(3)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{12}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\frac{7}{2\sqrt{12}}=-\frac{7}{2\sqrt{12}}<0$$

Como la función $f´(x)$ es continua en el intervalo dado y toma valores con distinto signo en sus extremos, verifica el teorema Bolzano, que dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$. Esto es, la función corta al eje *OX*. (En este caso, la función *f* es la derivada, $f´(x)$).

Por tanto, hay seguridad de que existe al menos un punto $c \in (1, 3)$ tal que $f´(c)=0$, en el que la función pasa de tomar valores positivos a tomar valores negativos; pero esto implica que la función tiene un máximo en ese punto *c*, pues:

- Para valores de *x* tales que $1 < x < c$, $f´(x) > 0$, lo que indica $f(x)$ es creciente.
- Para valores de *x* tales que $c < x < 3$, $f´(x) < 0$, lo que indica $f(x)$ es decreciente.
- En consecuencia, en $x = c$ la función tiene un máximo.

Nota: Podría suceder que la función “rebotase” en el eje *OX* en el punto *c*: en ese caso, en *c* se tendría un punto de inflexión; pero eso lo único que hace es trasladar el máximo a la derecha, pues en algún punto del intervalo (1, 3) la función $f´(x)$ cambiará de signo, pasando de ser positiva a negativa.

32. Navarra, junio 17

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x+2}$ en el intervalo [–2, 4]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución:

Derivando dos veces:

$$f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x+2} \Rightarrow f´(x)=2xe^{-x+2}-\left(x^2-3\right)e^{-x+2}=\left(-x^2+2x+3\right)e^{-x+2}$$

$$\Rightarrow f´´(x)=\left(-2x+2\right)e^{-x+2}-\left(-x^2+2x+3\right)e^{-x+2}=\left(x^2-4x-1\right)e^{-x+2}$$

$\to f´(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1; x=3$.

El máximo se da en la solución de $f´(x)=0$ que hace negativa a la derivada segunda.

El mínimo se da en la solución de $f´(x)=0$ que hace positiva a la derivada segunda.

Como $f´´(-1)=5e^3>0$, en x = –1 se tiene un mínimo relativo (¿será absoluto?).

Como $f´´(3)=-4e^{-1}<0$, en x = 3 se tiene un máximo relativo (¿será absoluto?).

Para determinarlo hay que estudiar la monotonía de la función en el intervalo [–2, 4]; y también los valores de la función en sus extremos: puntos –2 y 4.

Para $-2 < x < -1$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece: desde el valor $f(-2)=e^4$ hasta $f(-1)=-2e^3$.

Para $-1 < x < 3$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece: desde el valor $f(-1)=-2e^3$ hasta $f(3)=6e^{-1}$.

Para $3 < x < 4$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece: desde el valor $f(3)=6e^{-1}$ hasta $f(4)=13e^{-2}$.

Se observa que:

$$f(-1)=-2e^3 < f(4)=13e^{-2} < f(3)=6e^{-1} < f(-2)=e^4$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que la función es continua en todo **R**, se deduce:

- En x = –2 se da el máximo absoluto en el intervalo [–2, 4].
- En x = –1 se da el mínimo absoluto en el intervalo [–2, 4].
- En x = 3 se da el máximo relativo en el intervalo [–2, 4].

33. Navarra, junio 17

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{4}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{4}-1$.

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2 puntos)

Solución:

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $f(x)=g(x)$, que debe hacerse por tanteo:

$$\cos\frac{\pi x}{4}=\frac{x^2}{4}-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}.$$

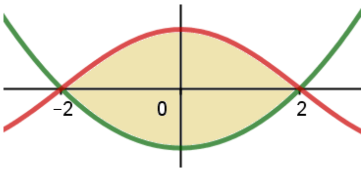
Efectivamente:

Si $x = -2$, $\cos\frac{-2\pi}{4} = \cos\frac{-\pi}{2} = 0$; Y si $x = 2$, $\cos\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

En ambos casos $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$ toma también el valor 0.

Para el intervalo $-2 \le x \le 2$, $\cos\frac{\pi x}{4} > \frac{x^2}{4} - 1$.

Aunque no se pide, la región es la sombreada en la figura adjunta.



Por tanto, el área pedida viene dada por:

$$\int_{-2}^{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)\right)dx = 2\int_{0}^{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + 1\right)dx =$$

$$= 2\left(\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^3}{12} + x\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{12} + 2\right) - 2\left(\frac{4}{\pi}\sin 0 - 0 + 0\right) =$$

$$= 2\left(\frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} + 2\right) = \frac{8}{\pi} + \frac{8}{3}\ \text{u}^2.$$

<u>**34**. Navarra, julio 17</u>

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo $f(x) = (x+1)^{(x+1)}$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

Es una aplicación inmediata del teorema del valor medio (Lagrange), que dice:

→ Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

La función dada cumple las hipótesis del teorema: es continua en el intervalo [0, 1] y derivable en (0, 1). Por tanto, existe un punto $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\alpha)$.

Como $f(1) = (1+1)^{(1+1)} = 4$ y $f(0) = (0+1)^{(0+1)} = 1 \Rightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4-1}{1} = 3$.

Luego, efectivamente, existe un punto $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$.

<u>**35**. País Vasco, junio 17</u>

Ejercicio A4.

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo $A(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 0)$ en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo *ABCD*.

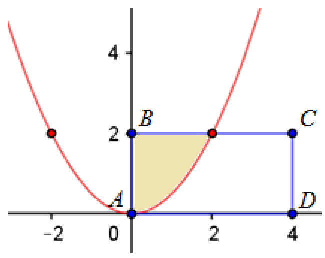
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

<u>Solución</u>:

a) Para representar la función basta con dar algunos valores:

(0, 0); (–2, 2); (2, 2)

La representación de ambos recintos es la dada al margen.



b) El área sombreada, la comprendida entre el lado superior (de ecuación $y = 2$) y la parábola, viene dada por:

$$S = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left(2x - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ \text{u}^2.$$

Como la del rectángulo es 8 u^2, el área del recinto de la derecha es: $8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ u^2.

36. <u>País Vasco, junio 17</u>

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$.

<u>Solución</u>:

Como $x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x\left(x-1\right)^2$ puede hacerse la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A}{x(x-1)^2}.$$

Por identificación de coeficientes:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=0 \\ A=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+B=1 \to B=-4 \\ -10+4+C=0 \to C=6 \\ A=5 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{-4}{(x-1)} + \frac{6}{(x-1)^2}\right)dx = 5\ln x - 4\ln(x-1) - \frac{6}{x-1} + c.$$