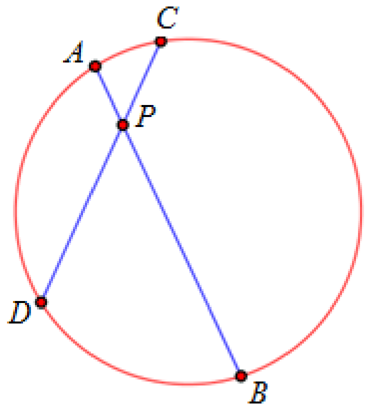
SECANTES

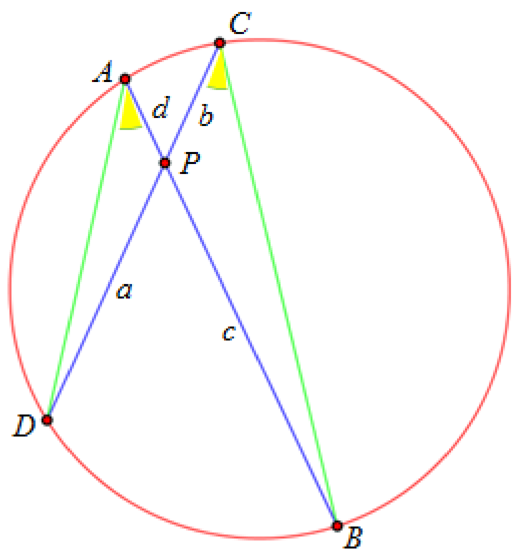
El problema que sigue, aunque es relativamente sencillo, puede resultar extraño a los estudiantes de secundaria. Si se dice que está relacionado con la “potencia de un punto a una circunferencia” es posible que a algunos se les despierte el entendimiento.
Dando la pista de que está relacionado con la semejanza de triángulos podría proponerse a los alumnos de 3º de ESO en adelante.

Problema
Dos cuerdas, *AB* y *AC*, de una circunferencia que se cortan en un punto *P*, interior a ella. Demuéstrese que los productos *AP* · *PB* y *CP* · *PD* valen lo mismo. (Demostrar también que las medidas de esos cuatro segmentos no pueden venir dadas por cuatro números consecutivos).



Solución:
Los triángulos *APD* y *CPB* son semejantes: los ángulos *A* y *C* son iguales, pues abarcan el mismo arco (*DB*); el ángulo *P* es opuesto por el vértice.
Por tanto:

$$\frac{\left|\overline{AP}\right|}{\left|\overline{PD}\right|}=\frac{\left|\overline{CP}\right|}{\left|\overline{PB}\right|}\Rightarrow \left|\overline{AP}\right|\cdot\left|\overline{PB}\right|=\left|\overline{CP}\right|\left|\overline{PD}\right|$$



→ La dificultad del problema consiste en trazar esos dos triángulos.

- Veamos ahora que las longitudes no pueden ser cuatro números consecutivos.

Si fuesen números consecutivos; esto es, si:

$d=x;\ b=x+1;\ a=x+2;\ c=x+3.$

Entonces, como debe cumplirse que $d\cdot c=b\cdot a$, se tendría:

$$x\cdot(x+3)=(x+1)\cdot(x+2)\Rightarrow x^2+3x=x^2+3x+2\Rightarrow 0=2.$$ (Contradicción).

Observación: Si las cuerdas se cortasen en un punto *P* exterior al círculo, la relación sería similar. Esto es:

$$\left|\overline{PA}\right|\cdot\left|\overline{PB}\right|=\left|\overline{PC}\right|\left|\overline{PD}\right|$$

(Así es como se define potencia de un punto a una circunferencia).