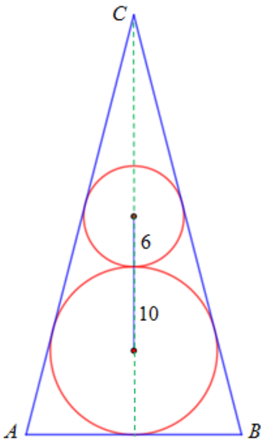
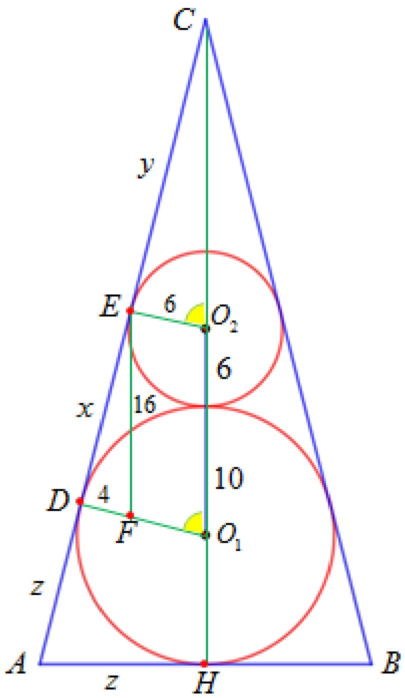
TRIÁNGULO "CIRCUNSCRITO"

Para resolver el problema siguiente hay que aplicar:
1) La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente en el punto de tangencia.
2) El teorema de Pitágoras.
3) El teorema de Tales.

Problema
El triángulo *ABC* "circunscribe" a dos circunferencias de radios 10 y 6 cm, como se muestra en la figura. Halla su área y su perímetro.



Solución:
Se indican los puntos de tangencia y los centros de las circunferencias.
Desde *E* se traza una paralela a la altura del triángulo. Se obtiene así el triángulo *EDF*, rectángulo, con hipotenusa 16 y uno de los catetos 4.



El otro cateto, $x=\sqrt{16^2-4^2}=\sqrt{240}=2\sqrt{60}$.
Los triángulos CDO_1 y CEO_2 son semejantes. Por tanto:

$$\frac{|CE|}{|EO_2|}=\frac{|CD|}{|DO_2|}\Rightarrow \frac{y}{6}=\frac{y+x}{10}\Rightarrow 10y=6y+6x\Rightarrow y=\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow y=3\sqrt{60}.$$

Por tanto, en CEO_2, la distancia CO_2 vale:

$$|CO_2|=\sqrt{y^2+6^2}\Rightarrow |CO_2|=\sqrt{9\cdot 60+36}=24.$$

El triángulo *CAH*, que también es rectángulo, tiene de hipotenusa $y+x+z=3\sqrt{60}+2\sqrt{60}+z=5\sqrt{60}+z$, y de catetos: $|CH|=|CO_2|+|O_2O_1|+|O_1H|=24+16+10=50$ y $|AH|=z$.

Aplicando nuevamente Pitágoras:

$$\left(5\sqrt{60}+z\right)^2=50^2+z^2\Rightarrow 1500+10\sqrt{60}\cdot z+z^2=2500+z^2\Rightarrow z=\frac{100}{\sqrt{60}}.$$

(El valor de z puede obtenerse también aplicando el teorema de Tales, pues teniendo en cuenta que los triángulos CAH y CDO_1 son semejantes $\Rightarrow \dfrac{50}{z} = \dfrac{5\sqrt{60}}{10} \Rightarrow z = \dfrac{100}{\sqrt{60}}$).

Luego, las medidas del área y del perímetro son:

$\rightarrow$ Área: $S_{ABC} = \dfrac{|AB| \cdot |CH|}{2} = \dfrac{\dfrac{200}{\sqrt{60}} \cdot 50}{2} = \dfrac{5000}{\sqrt{60}}$ cm^2.

$\rightarrow$ Perímetro: $2y + 2x + 4z = 10\sqrt{60} + 4 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{60}} = \dfrac{1000}{\sqrt{60}}$ cm.