RECUPERACIÓN DE MATEMÁTICAS

2º ESO

(Matemáticas Pendientes de 1º de ESO)

Departamento de Matemáticas

Despacito y buena letra,
que el hacer las cosas bien,
importa más que el hacerlas.
Antonio Machado

Tema 1. Números naturales Resumen

Hay varios <u>sistemas de numeración</u>. Nos interesan dos: el sistema de numeración romano y el sistema de numeración decimal.
El <u>sistema de numeración romano</u> utiliza algunas letras a las que asigna un determinado valor:
I, uno; V, cinco; X, diez; L, cincuenta; C, cien; D, quinientos; M, mil.
Los símbolos pueden unirse para determinar otros números. Si un símbolo de valor menor está la derecha de otro, suma; si se sitúa a la izquierda, resta.
Ejemplos: II = 2; IV = 4; VI = 6; XIV = 14; CCCL = 350; DCX = 610; CMLVI = 956.

- A la izquierda de un símbolo mayor sólo se pueden poner las letras I, X y C, pero la I sólo puede ponerse delante de V y X. Por tanto, por ejemplo, **no puede escribirse** LD, ni VL, ni DMCLXVI…, ni IL. Luego, para escribir 450, 45, 666 o 49 hay que hacerlo así:
  450 = CDL → 400 + 50; 45 = XLV → 40 + 5;
  666 = DCLXVI → 600 + 50 + 10 + 5 + 1; 49 = XLIX → 40 + 9.

El <u>sistema de numeración decimal</u> utiliza los 10 números (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

- Es un sistema posicional, que significa que el valor de cada cifra depende del dígito y de la posición (del lugar) que ocupa en la cantidad representada.
- Las posiciones de derecha a izquierda se llaman: unidades, decenas, centenas, unidad de millar…
- Diez unidades de un orden cualquiera hacen una unidad de un orden superior.

Ejemplos: 30413 indica: 3 unidades + 1 decena + 4 centenas + 0 unidades de millar + 3 decenas de millar. Esto es: 30000 + 0000 + 400 + 10 + 3.

<u>Redondeos</u>. Cuando se opera con números muy grandes pueden aproximarse (redondearse se dice, pues algunas cifras del número se sustituyen por 0) a otros más fáciles de recordar. Así 2407123 puede redondearse por 2407000, con una aproximación a millares. También, el mismo número 2407123, puede redondearse por 2410000, con una aproximación a decenas de millar; o a 2400000, mediante una aproximación a centenas de millar.
Para redondear un número a un determinado orden de unidades:
Se sustituyen por ceros todas las cifras a la derecha de dicho orden
Si la primera cifra sustituida es 5 o más se suma una unidad a la cifra anterior.

<u>Operaciones con números naturales</u>
<u>La suma y el producto</u> cumplen las propiedades conmutativa y asociativa. Esto es:
<u>Conmutativa</u>: 7 + 4 = 4 + 7; 7 · 4 = 4 · 7. En general: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$
<u>Asociativa</u>: (7 + 8) + 12 = 7 + (8 + 12); (7 · 8) · 12 = 7 · (8 · 12)
El paréntesis indica que lo que abarca debe operase en primer lugar. Por tanto:
(**7 + 8**) + 12 = **15** + 12 = 27 y 7 + (**8 + 12**) = 7 + **20** = 27
<u>Propiedad distributiva</u>. Dice así: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ y $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$
Ejemplos: a) 3 · (5 + 8) = 3 · 5 + 3 · 8 = 15 + 24 = 39
Si se suma antes el paréntesis: 3 · (**5 + 8**) = 3 · **13** = 39
b) 7 · (12 – 3) = 7 · 12 – 7 · 3 = 84 – 21 = 63
Si se resta antes el paréntesis: 7 · (**12 – 3**) = 7 · **9** = 63

<u>La división</u>
La división 100 entre 4 es 25 → 100 **:** 4 = 25. Se cumple que 100 = 4 · 25. Es exacta.
La división 100 entre 6 no es exacta. Da de cociente 6 y de resto 2 → 100 = 6 · 16 + 4.
En general se cumple: Dividendo = divisor × cociente + resto → $D=d\cdot c+r$.

Tema 1. Números naturales Autoevaluación

1. Escribe en números romanos:

a) 37 → b) 132 → c) 49 → d) 267→

e) 348 → f) 467 → g) 599 h) 1380 →

2. Indica el valor de los siguientes números romanos:

a) XLVI → b) MCCCXII →

c) CMI → d) MDCCXLI →

e) ¿En qué año se construyó la Puerta de Alcalá?

3. Contesta:

a) ¿Cuántas unidades hay en veinte millares?

b) ¿Cuántas centenas hay en noventa mil unidades?

c) ¿Cuántos millares hay en siete millones?

d) ¿Cuántas decenas hay en cinco mil unidades?

4. ¿Cuál es el valor del dígito 4 en cada uno de los siguientes números?

a) 32042 → b) 4567 →

c) 12478 → d) 12004 →

5. Redondea al orden de unidades que se indica los siguientes números:

a) 245603 (a los millares) → b) 2345499 (a los millares) →

c) 7445421952 (a millones) → d) 230704567 (a millones) →

6. Calcula:

a) 7 + 9 – 4 = b) 12 + 9 – 5 – 10 =

c) 23 – 18 – 5 = d) 41 – 33 + 12 =

7. Calcula:

a) 1230 + 872 + 23049 b) 2370980 – 734021

8. Halla:

a) $7 + (9 - 4) =$ b) $12 - (23 - 5 - 10) =$

c) $23 - (18 + 5) =$ d) $48 - (20 + 12) - 6 =$

9. Halla:

a) $7 \cdot 9 \cdot 4 =$ b) $12 \cdot (9 + 5 - 10) =$

c) $203 \cdot 802 =$ d) $4167 \cdot 74 =$

10. Calcula:

a) $203 \cdot 1000 =$ b) $32 \cdot 100 =$

c) $123 \cdot 1000 =$ d) $1000 \cdot 100 =$

11. Calcula, teniendo en cuenta los paréntesis:

a) $7 \cdot 5 - 3 \cdot (4 + 8) + 8 \cdot (12 - 7) =$

b) $18 : 6 + 3 \cdot (24 - 15) - 36 : 9 =$

12. Divide y comprueba la relación $D = d \cdot c + r$:

a) 123 : 7	b) 23004 : 42	c) 4588 : 37	d) 1200023 : 25

Soluciones:
1. a) XXXVII, b) CXXXII, c) XLIX, d) CCLXVII, e) CCCXLVIII, f) CDLXVII, g) DXCIX, h) MCCCLXXX.
2. a) 46, b) 1312, c) 901, d) 1741. **3**. a) 20000, b) 900, c) 7000, d) 500. **4**. a) 40, b) 4000, c) 400, d) 4.
5.a) 246000, b) 246000, c) 7445000000, d) 231000000. **6**. a) 12, b) 6, c) 0, d) 20.
7. a) 25151, b) 1636959. **8**. a) 12, b) 4, c) 0, d) 10. **9**. a) 252, b) 48, c) 162806, d) 308358.
10. 203000, b) 3200, c) 123000, d) 100000. **11**. a) 39, b) 26.
12. a) c = 17, r = 4. b) c = 547, r = 30. c) c= 124, r = 26. d) c= 48000, r = 23.

Tema 2. Números decimales **Resumen**

El sistema de numeración decimal utiliza diez dígitos: 0, 1, 2,…, 9.
Diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.
Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

1 unidad de millar = 10 centenas = 100 decenas = 1000 unidades.
1 UM = 10 C = 100 D = 1000 U.
1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas = 1000 milésimas.
1 U = 10 d = 100 c = 1000 m = 10000 dm.
→ 1 décima = 0,1 unidades. → 1 centésima = 0,01 unidades.
→ 1 milésima = 0,001 unidades. → 1 diezmilésima = 0,0001 unidades.

Cuando se escriben cantidades, el valor de una cifra depende del lugar que ocupa.
Para expresar cantidades comprendidas entre dos números se utilizan los números decimales. Así, los números entre 3 y 4 se designan por 3,1; 3,45; 3,568…

Ejemplo: 345,304 = **3**00 + **4**0 + **5** + 0,**3** + 0,0**0** + 0,00**4** → Se lee: trescientos cuarenta y cinco unidades y trescientas cuatro milésimas → 345,304 = 345 + 0,304.

La coma decimal se pone siempre entre las unidades y las décimas:

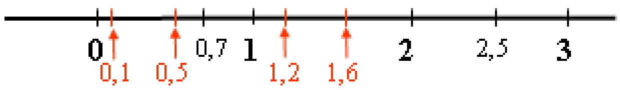
UM	C	D	U	d	c	m	dm		
2	3	0	4,	7	3	8	3	2304,7383	
	6	7	0,	5	4	0	0	670,5400	670,54
		6	8,	0	3	4	0	68,0340	68,034

Los ceros de la derecha no son imprescindibles. Se ponen cuando sea necesario comparar la parte decimal del número.

Para comparar dos números decimales se contrastan cifra a cifra comenzando por la izquierda.

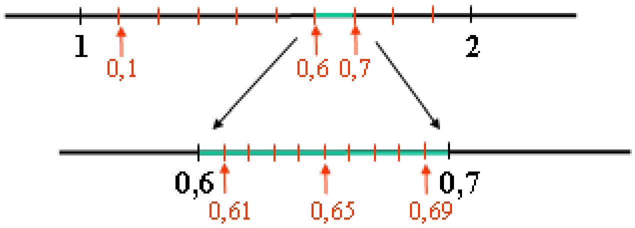
Ejemplos: a) 3,45 < 4,01. b) 0,23 < 0,24. c) 5,768 > 5,767. d) 0,2304 < 0, 2312.

- Los números decimales pueden representarse en la recta numérica. Todo número representado a la izquierda es menor que cualquiera representado a su derecha.



- Entre dos números decimales siempre hay otro decimal.

Ejemplo: Entre 0,6 y 0,7 están 0,61, 0,62,… Entre 0,61 y 0,62 está 0,612… Si los números anteriores, 0,6 y 0,7 se escriben como 0,60000 y 0,70000 resulta fácil intercalar otros decimales entre ellos.



- Si un número tiene muchas cifras decimales conviene dar una aproximación por redondeo.

Redondear un número consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden; si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5 se le suma 1 a la última cifra.

Ejemplo: a) El número 34,7438 se aproxima a las décimas por 34,7, a las centésimas por 34,74 y a las milésimas por 34,744.
b) 0,275 se aproxima a las centésimas por 0,28.

Operaciones con números decimales

Suma y resta: para sumar o restar números decimales se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de las unidades correspondientes.

Ejemplos:

a) Para hallar la suma

23,075 + 370,8 + 7,49

se disponen los números como sigue:

$$\begin{array}{r} 23{,}075 \\ 370{,}800 \\ +\quad 7{,}490 \\ \hline 400{,}565 \end{array}$$

b) Para hallar la resta

245,39 – 28,0387

se disponen los números así:

$$\begin{array}{r} 245{,}3900 \\ -\ 28{,}0387 \\ \hline 217{,}7513 \end{array}$$

Multiplicación: se multiplican como si fuesen enteros y, después; el número de cifras decimales del producto es la suma de las cifras decimales de los factores.

Ejemplos:

a) Para multiplicar 23,27 por 73
se disponen los números como sigue:

$$\begin{array}{r} 23{,}075 \\ \times\quad 73 \\ \hline 69225 \\ 161525 \\ \hline 1684{,}475 \end{array}$$

Tres cifras decimales.

b) Para multiplicar 23,075 por 4,37
se disponen los números como sigue:

$$\begin{array}{r} 23{,}075 \\ \times\quad 4{,}37 \\ \hline 161525 \\ 69225 \\ 92300 \\ \hline 100{,}83775 \end{array}$$

Cinco cifras decimales.

División: Se añaden ceros a la derecha al decimal que tenga menos cifras, hasta igualar las cifras decimales de ambos números. Para obtener los decimales del cociente se pone la coma y se siguen "bajando" ceros en el resto, hasta que se consiga el orden decimal deseado.

Ejemplos:

a) Para dividir 30,2 **:** 4
se disponen los números así:

$$\begin{array}{r|l} 30{,}2 & 4{,}0 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Se quitan las comas.

$$\begin{array}{r|l} 302 & 40 \\ \cline{2-2} 220 & 7{,}55 \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

b) Para dividir 22 **:** 4,5
se disponen los números así:

$$\begin{array}{r|l} 22{,}0 & 4{,}5 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Se quitan las comas.

$$\begin{array}{r|l} 220 & 45 \\ \cline{2-2} 400 & 4{,}8 \\ 40 & \end{array}$$

Si se desea se pueden sacar más decimales.

c) Para dividir 2307,35 **:** 7,2
se disponen los números así:

$$\begin{array}{l|l} 2307{,}35 & 7{,}20 \\ \cline{2-2} \ \ 147 & 320{,}46 \\ \quad 03\ 35 & \\ \qquad 470 & \\ \qquad\ \ 38 & \end{array}$$

Tema 2. Números decimales Autoevaluación

1. Escribe cómo se leen los siguientes números:

a) 2,4 → dos unidades y cuatro décimas. (También: 2 coma 4).

b) 203,8 →

d) 2,348 →

e) 3,0012 →

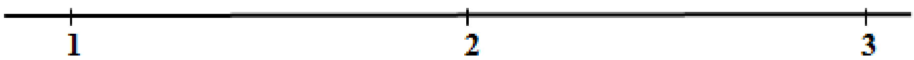
2. Escribe con números:

a) veinte unidades y treinta y dos milésimas →

b) cuatrocientas cinco diezmilésimas →

d) siete centésimas →

3. Representa en la recta numérica 2, 2,3, 2,47 y 3.



4. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

3,08; 3,023; 3,24; 3,189; 3,203; 3,501; 3,303

5. Intercala un número entre cada pareja:

a) 4,9 <   < 4,91.   b) 7,23 <   < 7,24.

c) 0,021 <   < 0,022.   d) 2,333 <   < 2,334.

6. Redondea a décimas:

a) 23,46 →   b) 3,425 →   c) 9,651 →

7. Aproxima a centésimas:

a) 12,094 →   b) 30,625 →   c) 0,7849 →

8. Haz las restas:

c) 24 – 12,8

d) 30445,24 – 8892,973

9. Haz las sumas:

a) 23,1 + 12,34 + 678,00367

b) 4980,45 + 789,37 + 1003,408

10. Multiplica:

a) 23,7 × 3,4

b) 0,36 × 9,2

c) 39 × 0,09

d) 0,0028 × 0,06

11. Divide (con dos cifras decimales):

a) 24 : 3,2

b) 2,05 : 0,1

c) 0,28 : 0,05

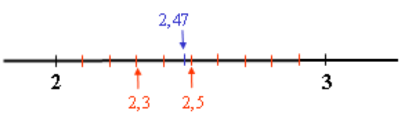
d) 12,6 : 3,02

12. El litro de aceite cuesta 3,95 €. ¿Cuánto costarán 3 litros? ¿Cuánto costarán 0,75 litros?

13. Por 2,5 kilos de naranjas se han pagado 4 €. ¿A cuánto está el kilo de naranjas?

Soluciones: **1**. a) dos unidades y cuatro décimas. b) doscientas tres unidades y ocho décimas. c) dos unidades y trescientas cuarenta y ocho milésimas. d) tres unidades y doce diezmilésimas. **2**. a) 20,032. b) 0,0405. c) 0,07.

3.



4. 3,023 < 3,08 < 3,189 < 3,203 < 3,24 < 3,303 < 3,501
5. a) 4,905. b) 7,231. c) 0,02109. d) 2,3331
6. a) 23,5. b) 3,4. c) 9,7. **7**. a) 12,09. b) 30,63. c) 0,78.
8. a) 11,2. b) 21552,267. **9**. a) 713,44367. b) 6773,228.
10. a) 80,58. b) 3,312. c) 3,51. d) 0,000168.
11. a) 7,5. b) 20,5. c) 5,6. d) 4,17. **12**. 11,85 €. 2,9625 €, se aproxima a 2,96 €. **13**. 1,6 €/kg.

Tema 3. Potencias **Resumen**

Potencia de un número es el producto repetido de ese número. Así, si *a* es un número cualquiera, el producto $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$.
El número *a* se llama base; el número 4, que indica las veces que se repite el mismo factor, se llama exponente.
Ejemplos: a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. b) $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$. c) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.
d) $10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000$.

En el último ejemplo debes observar que una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.
El uso de las potencias de base 10 permite la descomposición polinómica de un número, que se basa en el distinto valor de una cifra dependiendo de la posición que ocupa en el número; ese valor puede expresarse mediante potencias de 10. Así, por ejemplo

$7345304 = \mathbf{7} \cdot 10^6 + \mathbf{3} \cdot 10^5 + \mathbf{4} \cdot 10^4 + \mathbf{5} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{4}$

= 7000000 (7 unidades de millón)
+ 300000 (3 centenas de millar)
+ 40000 (4 decenas de millar)
+ 5000 (unidades de millar)
+ 300 (3 centenas)
+ 00 (0 decenas)
+ 4 (4 unidades)

Operaciones con potencias
Suma y resta de potencias
La operación $2^5 + 3^3 - 5^2$ se hace convirtiendo cada potencia en su número correspondiente.
Ejemplos: a) $2^5 + 3^3 - 5^2 = 32 + 9 - 25 = 16$. b) $3^2 - 2^3 + 4^2 = 9 - 8 + 16 = 17$.

Tampoco pueden simplificarse los cálculos aunque los sumandos tengan la misma base.
Ejemplos: a) $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$. b) $3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$.

Producto de un número por una potencia
El producto $5 \cdot 2^3$ significa $5 \cdot 8 = 40$; pero un error frecuente es escribir $5 \cdot 2^3 = 10^3$. El exponente sólo afecta al 2. Para que el exponente afectase también al 5 habría que indicarlo con paréntesis, así: $(5 \cdot 2)^3$, que ciertamente vale 10^3.
Ejemplo: $3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 4^2 - 5^2 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 16 - 25 = 24 + 32 - 25 = 31$.

Producto y cociente de potencias
La multiplicación o división de potencias de la misma base puede simplificarse. Para ello se emplean las siguientes propiedades:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Ejemplo:** $3^2 \cdot 3^3 = (9 \cdot 27) = 3^5 = 243$.
2. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(3^2\right)^3 = (9)^3 = 3^6 = 729$.
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$ **Ejemplo:** $4^5 : 4^2 = 4^3 = 64$.

Consecuencia: para todo $a \neq 0$, $a^0 = 1$, ya que $1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. **Ejemplo**: $7^0 = 1$.

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Ejemplo**: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6$.

Raíz cuadrada: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$.
Ejemplos: a) $\sqrt{25} = 5$, pues $5^2 = 25$. b) $\sqrt{144} = 12$, pues $12^2 = 144$. c) $\sqrt{1600} = 40$.

Tema 3. Potencias **Autoevaluación**

1. Expresa como potencia:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$ c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ d) $7 \cdot 7 =$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $2^5 =$ b) $6^2 =$ c) $10^4 =$ d) $12^3 =$

3. Halla el valor del exponente para:

a) $2^n = 16 \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow a = 2$. b) $3^n = 9 \Rightarrow$

c) $10^n = 10000 \Rightarrow$ d) $4^n = 64 \Rightarrow$

4. Halla el valor de la base en cada caso:

a) $a^3 = 8 \Rightarrow a^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow a = 2$. b) $a^7 = 1 \Rightarrow$

c) $a^5 = 100000 \Rightarrow$ d) $a^4 = 81 \Rightarrow$

5. Escribe con todas sus cifras:

a) $10^7 =$ b) $10^8 =$

c) $10^4 =$ d) $10^3 =$

6. Escribe como potencia de base 10:

a) Diez millones = 10.000000 = 10^7. b) Cien millones =

c) Mil millones = d) Cien mil =

7. Escribe como producto de un número por una potencia de base 10 los siguientes números:

a) 2000 b) 800 c) 70 d) 5

(Observación: $10^1 = 10$; $10^0 = 1$).

8. Escribe como suma de números por potencias de base 10 la suma 2000 + 800 + 70 + 5.

$2000 + 800 + 70 + 5 = 2 \cdot 1000 + \ldots$ $= 2 \cdot 10^3 + \ldots$

9. Escribe en forma polinómica:

a) 2875 =

b) 60972 =

c) 30043 =

10. Escribe el número correspondiente a cada descomposición polinómica:

a) $6 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 =$

b) $8 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 2 =$

11. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $7 \cdot 10^4 =$

b) $7 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3^2 = 7 \cdot 16 + 4 \cdot 9 = 112 + 36 = 148.$

c) $2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 5^2 =$

d) $5 \cdot 3^5 + 9 \cdot 4^2 - 3 \cdot 7^3 =$

e) $2^3 \cdot 6^2 =$

f) $3^2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 4^2 =$

g) $5^2 \cdot 2^3 - 145 =$

h) $2^5 \cdot 5^2 - 12 \cdot 3^3 =$

12. Expresa mediante una sola potencia:

a) $4^2 \cdot 4^6 =$ b) $3^5 \cdot 3^2 =$ c) $6^3 \cdot 6^5 =$ d) $2 \cdot 2^3 =$

e) $(5^3)^4 =$ f) $2^{12} : 2^8 =$ g) $10^6 : 10^2 =$ h) $4^4 \cdot 25^4 =$

13. Halla el cuadrado de los 10 primeros números naturales.

$1^2 = 1$; $2^2 =$;…

14. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{64} = 8$, pues $8^2 = 64$.

b) $\sqrt{81} =$

c) $\sqrt{121} =$

d) $\sqrt{169} =$

e) $\sqrt{225} =$

f) $\sqrt{400} =$

g) $\sqrt{625} =$

h) $\sqrt{676} =$

15. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, indica el valor entero aproximado de:

a) $\sqrt{67} \approx$ b) $\sqrt{125} \approx$ c) $\sqrt{175} \approx$ d) $\sqrt{675} \approx$

Soluciones:

1. a) 2^3. b) 1^4. c) 5^4. d) 7^2. **2**. a) 32. b) 36. c) 10000. d) 1728. **3**. a) 4. b) 2. c) 4. d) 3.
4. a) 2. b) 1. c) 10. d) 3. **5**. a) 10000000. b) 100000000. c) 10000. d) 1000.
6. a) 10^7. b) 10^8. c) 10^9. d) 10^5. **7**. a) $2000 = 2 \cdot 10^3$. b) $8 \cdot 10^2$. c) $7 \cdot 10$. d) $5 \cdot 1 = 5 \cdot 10^0 \rightarrow$ simplemente 5.
8. $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$.
9. a) $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. b) $6 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$. c) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10 + 3$.
10. a) 6204239. b) 83032. **11**. a) 70000. b) 148. c) 125. d) 330. e) 288. f) 24. g) 55. h) 476.
12. a) 4^8. b) 3^7. c) 6^8. d) 2^4. e) 5^{12}. f) 2^4. g) 10^4. h) 10^8. **13**. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
14. a) 8. b) 9. c) 11. d) 13. e) 25. f) 20. g) 25. h) 26.
15. a) 8. b) 11. c) 13. d) 26, aunque la llamada raíz entera vale 25.

Tema 4. Divisibilidad Resumen

<u>Un número es divisible por otro</u> cuando su división es exacta.
Ejemplo:
a) 21 es divisible por 3. b) 40 es divisible por 8. c) 18 no es divisible por 5.

Decir que un número es <u>divisible</u> por otro es lo mismo que decir que el número mayor es <u>múltiplo</u> del menor. (Salvo el 0, que es múltiplo de todos los demás números).
Ejemplo:
a) 21 es múltiplo de 3. b) 100 es múltiplo de 25. c) 25 no es múltiplo de 4.

En general, decir que "<u>*a* es divisible por *b*</u> " es lo mismo que decir "<u>*a* es múltiplo de *b*</u>".
También puede decirse que <u>*b* es divisor de *a*</u>.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número natural tiene infinitos múltiplos, que se obtiene multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número natural es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 1 es divisor de todos los números.

<u>Divisores de un número; números primos</u>
Un número puede tener varios divisores. Para hallar los divisores de un número hay que dividirlo por 2, 3, 4,…: si la división es exacta, se obtiene un divisor del número.
Ejemplo:
a) Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
b) Los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21.

Números primos

1	2	3	5
7	11	13	17
19	23	29	31
37	41	43	47
53	59	61	67
71	73	79	83
89	97		

- Si un número sólo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama <u>primo</u>.
- Si un número tiene más de dos divisores se llama <u>compuesto</u>.

Ejemplo:
a) Los números 7, 17 y 23 son primos.
b) Los números 8, 25 y 40 son compuestos.

<u>Criterios de divisibilidad</u>

- <u>Divisibilidad por 2</u>. Un número es divisible por 2 si es par.

Ejemplos: 2, 24 o 130.

- <u>Divisibilidad por 3</u>. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras en múltiplo de 3.

Ejemplos:
a) 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
b) Los números 122 o 2222 no son múltiplos de 3.

- <u>Divisibilidad por 5</u>. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Ejemplos: 35, 70 y 135.

- <u>Divisibilidad por 9</u>. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras en múltiplo de 9.

Ejemplos:
a) 909 y 1035 son múltiplos de 9, pues sus cifras suman, respectivamente, 18 y 9, que son números múltiplos de 3.
b) El número 1035 es múltiplo de 45, pues múltiplo de 5 y de 9 a la vez.

Expresión de un número como producto. Descomposición de un número en factores primos

Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.

Ejemplo:

$72 = 2 \cdot 36$; o también, $72 = 8 \cdot 9 = 24 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 12$. Hay varias posibilidades.

- Factor de un número es cada uno de sus divisores.
- Factorizar un número es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
- Un número puede descomponerse factorialmente de varias maneras.

Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos. Los factores primos se obtienen mediante divisiones sucesivas.

- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$32 = 2^5$

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

Ejemplo:

a) 72 puede escribirse como: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2$.

b) $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$. Observa: $50 : 2 = 25 \rightarrow 25 : 5 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1$.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números

Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de ellos se llama máximo común divisor: m.c.d.

Ejemplo:

Los números 48 y 36 tienen varios divisores comunes. El mayor de ellos es 12.

Divisores de 48: **1, 2, 3, 4, 6**, 8, **12**, 16, 24 y 48.

Divisores de 36: **1, 2, 3, 4, 6**, 9, **12**, 18 y 36.

Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

Ejemplo:

Los números 48 y 36 tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos es 12.

Múltiplos de 48: 48, 96, **144**, 192, 240, **288**,…, **432**,…, **576**…

Múltiplos de 36: 36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, **288**,…, **432**,…, **576**…

Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números.

Para calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplo:

Los números 48 y 36 se descomponen así: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

m.c.d.$(48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.$(48, 36) = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$.

Tema 4. Divisibilidad Autoevaluación

1. Entre los siguientes números empareja los que sean múltiplos y divisores entre sí:

12, 21, 6, 15, 8, 32, 7, 75, 9, 27

2. Halla tres múltiplos y tres divisores, si los tiene, de cada uno de los siguientes números:

	a) 50	b) 72	c) 16	d) 17
Múltiplos				
Divisores				

3. Halla todos los divisores de 90.

4. Aplicando los criterios de divisibilidad indica si los siguientes números son divisibles por 2, por 3 o por 5.

a) 102 $\rightarrow$ de 2, pues es par; de 3, pues la suma de sus cifras es 3.

b) 120 $\rightarrow$

c) 91 $\rightarrow$

5. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 3 y 5.

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; …

6. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 7 y 10.

7. Indica, justificando tu respuesta, cuáles de los siguientes números son primos:

a) 101 b) 103 c) 105 d) 107

8. Descompón en factores primos los números:

a) 40 =

b) 105 =

c) 97 =

d) 360 =

40 | 105 | 97 | 360 |

9. A partir de su descomposición factorial, indica todos los divisores de:

a) 36 $\rightarrow$ como $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, sus divisores serán:

1; 2; 3; $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $3 \cdot 3 = 9$; $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$; y $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

b) 42 $\rightarrow$

c) 71 $\rightarrow$

10. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 25 y 35 $\rightarrow$

b) 42 y 63 $\rightarrow$

c) 30 y 80 $\rightarrow$

11. Halla todos los divisores comunes de:

a) 18 y 24 $\rightarrow$

b) 45 y 60 $\rightarrow$

12. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

a)	b)

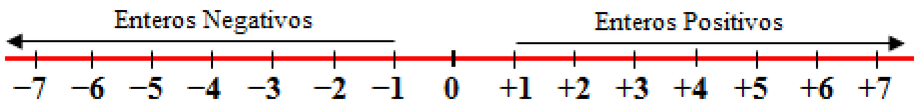
13. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

14. Para pavimentar una habitación de 400 × 360 cm se desean emplear baldosas cuadradas. ¿Cuánto medirán de lado para que el número de baldosas empleadas sea mínimo, sin necesidad de cortar ninguna?

Soluciones: **1**. 12 y 6; 21 y 7; 15 y 75; 8 y 32; 9 y 27. **2**. a) 50, 100 y 150; 25, 10 y 5. b) 72, 144 y 720; 36, 18 y 1. c) 32, 48 y 64; 8, 4 y 2. d) 17, 34 y 51; 1 y 17: es primo. **3**. 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90. **4**. b) por 2, por 3 y por 5. c) Ninguno. **5**. 30; 60 y 90. **6**. 70, 140 y 210. **7**. 101; 103; 107. **8.** a) $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. b) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. c) $97 = 1 \cdot 97$, primo. d) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.
9. b) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow$ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. c) 71 es primo $\rightarrow$ 1 y 71. **10**. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. **11**. a) 6, 3, 2, 1. b) 15, 5, 3, 1. **12**. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. **13**. 210, 420, 630 y 840. **14**. 40 cm.

Tema 5. Números enteros **Resumen**

El conjunto de los <u>números enteros</u> es **Z** = {... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...}. Esta formado por los positivos y los negativos.
Los positivos son los naturales → + 1, +2, +3, ..
Los números negativos son → −1, −2, −3, …
Los números negativos son los opuestos de los positivos. Así, el opuesto de +2 es −2.
Pueden representarse en la recta como sigue:

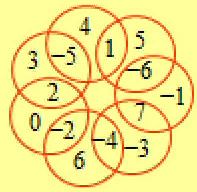


<u>Valor absoluto</u> de un número entero es el número natural que resulta al quitarle el signo.

Ejemplos:
$|-7| = 7$; $|+18| = 18$ → El valor absoluto siempre es positivo.

El <u>orden de los números enteros</u> es el que se observa en la recta: un número es mayor que otro cuando está representado a su derecha.
- Todos los números positivos son mayores que 0. Todos los negativos son menores que 0.
- Dados dos números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto. Así: −10 < −3.

<u>Suma y resta</u>
- Para sumar dos números enteros con el mismo signo se suman los valores absolutos de ambos números y se pone el signo que tenían los sumandos.



La suma de los tres números de cada círculo vale 0.

Ejemplos:
a) (+4) + (+2) = +6. b) (−7) + (−2) = −9.

- Para sumar dos números con distinto signo hay que restarlos y ponerle al resultado el signo que lleve el número mayor en valor absoluto.

Ejemplos:
a) (+3) + (−7) = −(7 – 3) = −4. b) (−6) + (+11) = +(11 – 6) = +5.

- Para restar dos números enteros hay que tener en cuenta que: – (+) = –; – (–) = +

Ejemplos:
a) – (+ 5) = –5. b) – (–7) = +7.
c) (–7) – (+5) = (–7) – 5 = –12. d) (+6) – (–7) = (+6) + 7 = 13.

- Para sumar y restar más de dos números se pueden sumar los positivos por un lado y los negativos por otro y, después, restar los resultados.

Ejemplos:
a) –4 + 7 + 5 – 9 + 6 = (7 + 5 + 6) – (4 + 9) = 18 – 13 = 5.
b) 9 – 7 – 12 + 8 – 4 = 9 + 8 – (7 + 12 + 4) = 17 – 23 = –5.

Sumas y restas con paréntesis
Hay que tener en cuenta que un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos que abarca.

Ejemplos:

a) –(4 – 7 + 9) = –4 + 7 – 9 = –6. b) –(–5 + 7 – 13) = +5 – 7 + 13 = +11.
c) 8 – (4 – 7) + [9 – (2 – 6 + 13)] = 12 – 4 + 7 + 9 – 2 + 6 – 13 = 34 – 19 = 15.

Multiplicación y división. En todos los casos hay que tener en cuenta las reglas de los signos:

[+] · [+] = [+]	[+] · [–] = [–]	[–] · [+] = [–]	[–] · [–] = [+]
[+] **:** [+] = [+]	[+] **:** [–] = [–]	[–] **:** [+] = [–]	[–] **:** [–] = [+]

Ejemplos:

(+3) · (+4) = +12;	(+7) · (–2) = –14;	(–5) · (+6) = –30;	(–1) · (–9) = +9;
(+18) : (+3) = +6;	(+12) : (–2) = –6;	(–32) : (+8) = –4;	(–28) : (–7) = + 2.

Operaciones combinadas. El orden es el siguiente: 1) Paréntesis; 2) Productos; 3) Sumas

Ejemplos:

a) 12 – 2 · (9 – 3) – 10 : (–2) – (–7) = 12 – 2 · 6 + 5 + 7 = 12 – 12 + 5 + 7 = 12.
b) (12 – 2) · (9 – 3) – 10 : [(–2) – (–7)] = 10 · 6 – 10 : (+5) = 60 – 2 = 58.

Potencias de números enteros. Se hace igual que con números naturales, pero hay que tener en cuenta el signo de la base y si el exponente es par o impar, cumpliéndose:

$(+a)^n = a^n \to$ siempre positivo.

$(-a)^n = +a^n$, si n es par; $(-a)^n = -a^n$, si n es impar.

Ejemplos:

a) $(+3)^2 = (+3)\cdot(+3) = +9$. b) $(+3)^4 = 3^4 = 81$. c) $(+5)^0 = 1$.

Ejemplos:

a) $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$ b) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$ c) $(-2)^0 = 1$

Raíz cuadrada de un número entero:

- La raíz cuadrada de un número entero positivo tiene dos soluciones.

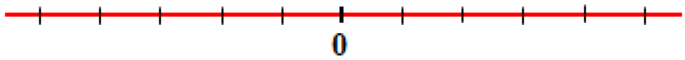
Ejemplos:

a) $\sqrt{+16} = +4$, pues $(+4)^2 = +16$. Pero también: $\sqrt{+16} = -4$, pues $(-4)^2 = +16$.
b) $\sqrt{+49} = +7$, pues $(+7)^2 = +49$. Igualmente, $\sqrt{+49} = -7$, pues $(-7)^2 = +49$.

- La raíz cuadrada de los números negativos no existe.

Tema 5. Números enteros Autoevaluación

1. Representa en la recta los números: –4, +3, –1. Representa también sus opuestos.



2. Expresa como números enteros las siguientes situaciones:

a) La temperatura era de ocho grados bajo cero →

b) Juan ha recibido una propina de quince euros →

c) Juan ha dado a su hermano pequeño tres euros →

d) El ascensor ha subido seis plantas →

3. Halla:

a) $|-5| =$ b) $|+13| =$

c) $|-3| + |+4| = +3 + 4 = +7.$ d) $|-21| - |-15| =$

4. Calcula:

a) 3 + 9 = b) 3 – 9 = c) –3 + 9 = d) –3 – 9 =

5. Calcula:

a) (+4) + (12) = b) (–4) + (+12) =

c) (+4) – (+12) = d) (–4) – (–12) =

6. Halla:

a) 12 – 7 + 4 – 3 – 2 = 16 – 12 = 4. b) –5 + 9 – 7 – 4 =

c) –16 – 9 + 21 + 2 = d) –12 + 8 – 7 + 4 =

7. Halla:

a) (+13) + (+7) – (–3) + (–5) =

b) (–4) – (–5) – (+6) + (–7) =

c) (–7) – (+8) + (–3) – (–9) =

8. Calcula:

a) 12 – (9 – 12) – 15 = b) –8 + (–13 + 18) – 6 =

9. Multiplica:

a) $(+2) \cdot (+5) =$. b) $(+2) \cdot (-5) = -10$. c) $(-2) \cdot (+5) =$ d) $(-2) \cdot (-5) =$

10. Divide:

a) $(+18) : (+3) = +6$. b) $(+18) : (-3) =$

c) $(-18) : (+3) =$ d) $(-18) : (-3) =$

11. Calcula:

a) $12 + 5 \cdot (-4) - 20 =$

b) $13 - 2 \cdot (4 - 5) =$

c) $(-3) \cdot (3 + 5) - 4 \cdot (- 9 - 5) =$

d) $-6 + (-4) \cdot (+3) - 5 =$

12. Halla:

a) $(-2) \cdot (4 -6 + 9) = (-2) \cdot (13 -6) = (-2) \cdot (+7) = -14$.

b) $(7 - 3) \cdot (4 + 8 - 9) =$

c) $(-12) : (-2) - (-5) \cdot (+7 - 10) =$

d) $(+20) : (-5) - (-2) \cdot (+6) =$

13. Calcula:

a) $(+4)^3 =$ b) $(-3)^4 =$ c) $(-5)^3 = -5^3 = -125$. d) $(+2)^7 =$

14. Calcula:

a) $(-2)^4 - (+3)^2 + (-5)^2 =$

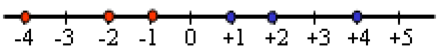
b) $(+5)^2 \cdot (-1)^7 - (-5)^2 - (-3)^3 =$

c) $(-6)^0 \cdot (-2)^5 =$ d) $(-6)^3 : (-3)^2 =$

15. Halla, si existen, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{(+81)} =$ b) $\sqrt{(-49)} =$ c) $\sqrt{+100} =$ d) $\sqrt{+144} =$

Soluciones: 1.



2. a) –8º C. b) +15 €. c) –2 €. d) –6. **3**. a) +5. b) +13. d) +6. **4**. a) +12. b) –6. c) +6. d) –12. **5**. a) +16. b) +8. c) –8. d) +8. **6**. b) –7. c) –2. d) –7. **7**. a) +18. b) –12. c) –9. **8**. a) 0.b) –9. **9**. a) +10. c) –10. d) +10. **10**. b) –6. c) –6. d) +6. **11.** a) –28. b) 15. c) +32. d) –23. **12**. b) +12. c) –9. d) +8. **13.** a) 64. b) 81. d) 128. **14**. a) 32. b) –23. c) –32. d) –24. **15.** a) +9. b) No. c) +40. d) +6.

Tema 6. El Sistema Métrico Decimal Resumen

El Sistema Métrico Decimal (SMD) es el conjunto de unidades de medida que se usa en la mayoría de los países del mundo.
Sirve para medir, para comparar, cantidades de una magnitud: longitud, capacidad, peso,…
La comparación se hace con relación a una unidad de medida: metro, litro, gramo.
Es un sistema decimal. Para las magnitudes lineales (longitud, peso, …) diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.

Medida de longitud

La unidad de medida es el metro (m). Sus múltiplos y submúltiplos aumentan o disminuyen de 10 en 10.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0,001	0,01	0,1	**1**	10	100	1000
:10 ←	: 10 ←	:10 ←		→ ×10	→ ×10	→ ×10
1 km	10 hm	100 dam	1000 m	10000 dm	100000 cm	1000000 mm
0,56 km	5,6 hm	**56 dam**	560 m	5600 dm	56000 cm	560000 mm
	0,723 hm	7,23 dam	**72,3 m**	723 dm	7230 cm	72300 mm
			0,285 m	2,85 dm	28,5 cm	**285 mm**

Una longitud viene dada en forma compleja cuando se expresa en varias unidades.
Si viene dada en una sola unidad, se dice que está en forma incompleja.

Ejemplo: Compleja: El ancho de un salón es 8 m y 25 cm. (También: 82 dm y 5 cm).
Incompleja: El ancho de un salón es 8,25 m. (También: 82,5 dm; o 825 cm).

Medida de capacidad

La unidad de medida es el litro (L o l). Sus múltiplos y submúltiplos aumentan o disminuyen de 10 en 10.

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
0,001	0,01	0,1	**1**	10	100	1000
:10 ←	: 10 ←	:10 ←		→ ×10	→ ×10	→ ×10
2,5 kl	25 hl	250 dal	2500 l	25000 dl	250000 cl	2500000 ml
0,00045 kl	0,0045 hl	0,45 dal	**4,5 l**	45 dl	450 cl	4500 ml
		0,5 dal	5 l	50 dl	**500 cl**	5000 ml
	4,8 hl	48 dal	480 l			

Medida de peso

La unidad de medida es el gramo (g). Sus múltiplos y submúltiplos aumentan o disminuyen de 10 en 10.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,001	0,01	0,1	**1**	10	100	1000
:10 ←	: 10 ←	:10 ←		→ ×10	→ ×10	→ ×10
1 kg	10 hg	100 dag	1000 g	10000 dag	100000 cg	1000000 mg
0,35 kg	3,5 hg	35 dag	**350 g**			
3,400 kg	34 hg	340 dag	3400 g			

Para pesos grandes se emplean, además:
El quintal métrico: 1 q = 100 kg. La tonelada métrica: 1 t = 1000 kg.

Ejemplos:
12 t = 12000 kg; 24,5 q = 2450 kg; 42000 kg = 42 t = 420 q.

Medida de superficie
La unidad de medida es el metro cuadrado (m^2). Sus múltiplos y submúltiplos aumentan o disminuyen de 100 en 100.

km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
0,000001	0,0001	0,01	**1**	100	10000	1000000
:100 ←	: 100 ←	:100 ←		→ ×100	→ ×100	→ ×100
1 km^2	100 hm^2	10000 dam^2	1000000 m^2			
0,45 km^2	**45 hm^2**	4500 dam^2	450000 m^2			
0,0012 km^2	0,12 hm^2	12 dam^2	**1200 m^2**	120000 dm^2		
			720000 m^2	7200 dm^2	**72 cm^2**	0,72 mm^2

También se emplean otras dos medidas:
→ Un "área" equivale a 100 m^2. Se simboliza con la letra a: 1 a = 100 m^2.
Un área es igual a un decámetro cuadrado.
→ Una hectárea equivale a 10000 m^2. Su símbolo es ha: 1 ha = 10000 m^2 = 100 a.
Una hectárea es igual a un hectómetro cuadrado.

Tema 6. El Sistema Métrico Decimal Autoevaluación

1. Completa la tabla siguiente:

km	hm	dam	m
12,5			
	480		
			54700

2. Completa la tabla siguiente:

m	dm	cm	mm
0,25			
		232	
			48

3. Completa la tabla siguiente (la parte sombreada no es necesario):

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
42						
			0,333			
					32	
		480				

4. Completa la tabla siguiente:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
12,800						
			480			
					235	

5. Completa la tabla:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			3000000			
					900	
	450					

6. a) Expresa en cm: 2 dam + 0,7 m + 1,4 dm =

b) Expresa en m: 2,5 km + 34 dm + 20000 mm =

7. Expresa en forma compleja:

a) 78,56 dam =

b) 0,045 kl = 4 dal, 5 l.   c) 23457 mg =

8. a) Expresa en m^2:   0,321 hm^2 + 20 dam^2 + 300 dm^2 =

b) Expresa en cm^2:   0,3 m^2 + 2,50 dm^2 + 300 mm^2 =

9. Indica la unidad de medida apropiada para medir:

a) La distancia entre Madrid y Cuenca →

b) La capacidad de una bañera →

c) La superficie de una habitación →

d) El peso de un bolígrafo →

e) La capacidad de un cartucho de tinta → mililitos, ml.

f) El peso de un barco.

g) La superficie de un país.

h) La longitud de cabello.

Soluciones:

1.

km	hm	dam	m
12,5 km	125	1250	12500
48	**480 hm**	4800	48000
54,7	547	5470	**54700 m**

2.

m	dm	cm	mm
0,25 m	2,5	25	250
2,32	23,2	**232 cm**	2320
0,048	0,48	4,8	**48 mm**

3.

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
42l	420	4200	42000			
			0,333	3,33	33,3	333
			0,32	3,2	**32**	320
4,8	48	**480**	4800	48000		

4.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
12,800 kg	128	1280	12800			
0,480	4,8	48	**480 g**	4800	48000	480000
			0,235	23,5	**235 cg**	2350

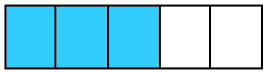
5.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
3	**300**	30000	**3000000**			
			0,09	9	**900**	90000
4,5	**450**	45000	4500000			

6. a) 284 cm. b) 2860 m.   **7**. a) 7 hm 8 dam 5 m 6 dm. c) 2 dag 3 g 4 dg 5 cg 7 mg

8. a) 5213 m^2. b) 553 cm^2.   **9**. a) km. b) l. c) m^2. d) g. e) ml. f) t. g) km^2. h) mm.

Tema 7. Fracciones **Resumen**



Una fracción suele considerase como "la parte de un todo" que ha sido dividido en porciones iguales. Así, $\frac{3}{5}$ indica que se toman 3 trozos de algo que se dividido en 5 trozos iguales. Es la parte coloreada en la figura.
El número de arriba se llama numerador e indica el número de partes que se toman; el número de abajo se llama denominador, e indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.

- Las fracciones se puede aplicar a cualquier magnitud.

Ejemplos: a) Si una tarta se divide en 6 partes iguales, cada parte es $\frac{1}{6}$. La fracción $\frac{5}{6}$ de esa tarta indica que se han tomado 5 de las 6 partes.

b) Si 500 € se dividen en 5 partes iguales, cada parte será $\frac{1}{5}$, y equivale a 100 €. La fracción $\frac{3}{5}$ de 500 € serán 300 €. Esto es: $\frac{3}{5}$ de 500 = 3 × $\frac{1}{5}$ de 500 = 3 × 100 = $\frac{3 \cdot 500}{5} = \frac{1500}{5} = 300$.

- También, una fracción puede considerarse como el cociente del numerador entre el denominador.

En este caso, el numerador puede ser mayor que el denominador. Por ejemplo, $\frac{12}{5}$.

Ejemplos: a) $\frac{3}{5}$ es igual que 3 dividido entre 5 → 3 : 5 = 0,6.

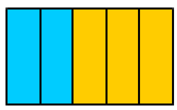
b) $\frac{3}{8}$ es igual a 3 entre 8 → 3 : 8 = 0,375. c) $\frac{12}{5}$ es igual a 12 entre 5 → 12 : 5 = 2,4.

Fracciones y números decimales.
Al dividir el numerador entre el denominador suele obtenerse un número decimal. Por tanto, una fracción puede considerarse como un número decimal.
Ejemplos: $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{12}{5} = 2{,}4$; $\frac{23}{100} = 0{,}23$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

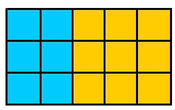
- Y al revés, los números decimales (con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas) pueden escribirse como una fracción. En particular, para expresar un número decimal *exacto* en fracción se suprime la coma y se divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hubiera.

Ejemplos: $0{,}78 = \frac{78}{100}$; $3{,}2 = \frac{32}{10}$; $0{,}375 = \frac{375}{1000}$.

Dos fracciones son equivalentes cuando valen lo mismo. Así, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.



$\frac{2}{5}$



$\frac{6}{15}$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y denominador de la fracción dada por un mismo número distinto de cero.

Simplificar una fracción consiste en igualarla con otra cuyos términos sean más sencillos. Para ello se dividen los dos términos entre el mismo número. Una fracción que no se puede simplificar se llama irreducible.

Ejemplos: a) $\frac{24}{36}=\left(\frac{24:2}{36:2}\right)=\frac{12}{18}=\left(\frac{12:6}{18:6}\right)=\frac{2}{3}$ b) $\frac{375}{1000}=[:25]=\frac{15}{40}=[:5]=\frac{3}{8}$.

Condición de igualdad de fracciones:
Si dos fracciones son equivalentes, los productos cruzados de sus términos son iguales. Esto es: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
Esta relación permite encontrar uno de los cuatro términos si se conocen los otros tres.
Ejemplos: a) $\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 24 \cdot 3 = 36 \cdot 2 = 72$. b) $\frac{21}{49}=\frac{3}{7}$, ya que $21 \cdot 7 = 49 \cdot 3 = 147$.
c) Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{12}{15}$ no son iguales, pues $2 \cdot 15 \neq 3 \cdot 12$.
d) ¿Cuánto tiene que valer x para que $\frac{2}{3}=\frac{12}{x}$? → Como debe cumplirse que $2\cdot x = 3\cdot 12 \Rightarrow$ $2\cdot x = 36 \Rightarrow x = 18$.

Algunas aplicaciones de las fracciones
1. Fracción de una cantidad.
Ejemplo: ¿Cuánto son los $\frac{2}{7}$ de 210 naranjas?
Los $\frac{2}{7}$ de 210 naranjas = $\frac{2}{7}\cdot 210=\frac{2\cdot 210}{7}=\frac{420}{7}=60$.

- De otra forma:

Si hay 210 naranjas, la séptima parte serán 210 : 7 = 30 naranjas → $\frac{1}{7}$ de 210 = $\frac{210}{7}=30$.
Por tanto, $\frac{2}{7}$ de 210 = $2\cdot\frac{210}{7}=2\cdot 30=60$.

2. Expresión de una parte como una fracción.
Ejemplos:
a) ¿Cuál es la fracción de chicas en una clase de 30 alumnos si, de ellos, 16 son chicas?
La fracción de chicas es: $\frac{16}{30}$.
b) Cuál es la fracción de chicas en una clase en la que hay 14 chicos y 16 chicas?
Como el total son 14 + 16 = 30, la fracción de chicas es $\frac{16}{30}$.

3. Obtención del total a partir de la fracción.
Ejemplo: Si los $\frac{3}{8}$ del dinero de Antonio son 90 €, ¿cuánto dinero tiene Antonio?
Si 90 € son los $\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{90}{3}=30$ € será $\frac{1}{8}$ de su dinero ⇒ Antonio tendrá $8 \cdot 30 = 240$ €.

- De otra forma: La fracción $\frac{3}{8}$ debe ser equivalente a la fracción $\frac{90}{x}$, siendo x el total de dinero que tiene Antonio. Luego $\frac{3}{8}=\frac{90}{x}$ → Como $90 = 3 \cdot 30 \Rightarrow x = 8 \cdot 30 = 240$.

Tema 7. Fracciones **Autoevaluación**

1. Si una tarta se divide en doce trozos, expresa como fracción:

a) Un trozo de tarta $\rightarrow$ b) 5 trozos de tarta $\rightarrow$

c) Un cuarto de tarta $\rightarrow$ d) Media tarta $\rightarrow$

2. Calcula:

a) $\frac{1}{5}$ de 20 = b) $\frac{1}{5}$ de 45 =

c) $\frac{1}{5}$ de 500 = d) $\frac{1}{5}$ de 225 =

3. Calcula:

a) $\frac{3}{5}$ de 20 = b) $\frac{2}{3}$ de 45 =

c) $\frac{5}{7}$ de 77 = d) $\frac{4}{9}$ de 180 =

4. Expresa como número decimal, con un máximo de 3 cifras decimales, las siguientes fracciones:

a)	b)
$\frac{1}{5} =$	$\frac{15}{100} =$
$\frac{8}{20} =$	$\frac{121}{100} =$
$\frac{3}{14} =$	$\frac{2358}{1000} =$
$\frac{3}{16} =$	$\frac{301}{1000} =$

5. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, ordena de menor a mayor cada uno de los grupos de fracciones.

a) $\rightarrow$

b) $\rightarrow$

6. Expresa en forma de fracción los siguientes números:

a) 0,123 = b) 1,23 = c) 12,3 = d) 0,00123 =

7. Halla 2 fracciones equivalente a cada una de las siguientes:

a) $\frac{3}{5} =$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{7} \to \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21}$.

d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{21}{12}$ f) $\frac{39}{42}$

8. Encuentra la fracción irreducible equivalente a cada una de las siguientes:

a) $\frac{30}{50} =$ b) $\frac{21}{84} =$ c) $\frac{18}{48} =$ d) $\frac{200}{225} =$

9. Halla el término desconocido en las siguientes igualdades:

a) $\frac{2}{3} = \frac{20}{x} \Rightarrow$ b) $\frac{3}{5} = \frac{x}{25} \Rightarrow$

c) $\frac{3}{x} = \frac{9}{21} \Rightarrow$ d) $\frac{x}{6} = \frac{27}{18} \Rightarrow$

10. Cristina ha gastado tres séptimas partes de sus ahorros en una guitarra. Si tenía 875 €, ¿cuánto le costó la guitarra?

11. Los dos tercios de la edad de Carmen son 12 años. ¿Cuántos años tiene Carmen?

12. En la clase de Caty hay 5 chicos por cada 6 chicas. ¿Qué fracción del total representan las chicas en la clase de Caty? ¿Puede haber 20 chicas en la clase Caty? ¿Y 15 chicos?

Soluciones:

1. a) $\frac{1}{12}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. d) $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$. **2**. a) 4. b) 9. c) 100. d) 45.
3. a) 12. b) 30. c) 55. d) 80. **4**. a) 0,2; 0,40; 0,214; 0,187. b) 0,15; 1,21; 2,358; 0,301.
5. a) $\frac{3}{16} < \frac{1}{5} < \frac{21}{100} < \frac{3}{14} < \frac{9}{25} < \frac{8}{20}$. b) $\frac{15}{100} < \frac{301}{1000} < \frac{121}{100} < \frac{2358}{1000}$.
6. a) $\frac{123}{1000}$. b) $\frac{123}{100}$. c) $\frac{123}{10}$. d) $\frac{123}{100000}$. **7**. a) $\frac{6}{10}; \frac{15}{25}$. b) $\frac{4}{6}; \frac{20}{30}$. c) $\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21}$.
d) $\frac{8}{18}; \frac{20}{45}$. e) $\frac{7}{4}; \frac{14}{8}$. f) $\frac{13}{14}; \frac{26}{28}$. **8**. a) $\frac{3}{5}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{3}{8}$. d) $\frac{8}{9}$. **9**. a) 30. b) 15. c) 7. d) 9.
10. 375 €. **11**. 18. **12**. $\frac{6}{11}$. No. Sí, 15 chicos y 18 chicas.

Tema 8. Operaciones con fracciones **Resumen**

Reducción de dos o más fracciones a común denominador

Para reducir fracciones a común denominador se halla un número que sea múltiplo de los denominadores; a continuación se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero con ese denominador común.

Un denominador común se obtiene multiplicando los denominadores de todas las fracciones. Aunque sea más costoso, se prefiere hallar fracciones con el menor denominador común, que se obtiene calculado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

Dadas las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$, las equivalentes a ellas con el mismo denominador son, respectivamente, $\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}$ y $\frac{7\cdot 8}{12\cdot 8}$. Esto es: $\frac{36}{96}$ y $\frac{56}{96}$.

- Si optamos por hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores, mcm(8, 12) = 24, las fracciones obtenidas serán: $\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}$ y $\frac{7\cdot 2}{12\cdot 2}$. Esto es: $\frac{9}{24}$ y $\frac{14}{24}$. (Es evidente que estas fracciones son más cómodas de manejar que las anteriores).

Comparación de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{12}{17}$, pues $9 < 12$. Igualmente, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$.

- Si las fracciones tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{9}{14}$, pues $17 > 14$. Igualmente, $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$.

- Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, se reducen a común denominador y se comparan mediante el criterio anterior; aunque la forma matemática preferida es la aplicación de la regla que se indica más abajo. (No obstante, la forma más rápida de comparar fracciones es hallar su valor con la calculadora y comparar sus resultados.)

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{21}$ o $\frac{31}{70}$?

Como las fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador son $\frac{9\cdot 70}{21\cdot 70} = \frac{630}{1470}$ y $\frac{31\cdot 21}{70\cdot 21} = \frac{651}{1470}$, entonces $\frac{9}{21} < \frac{31}{70}$.

- Con la calculadora, $\frac{9}{21} = 0{,}42857\ldots$ y $\frac{31}{70} = 0{,}44285\ldots$

Regla de comparación de fracciones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{19}$ o $\frac{33}{71}$? → Multiplicando en cruz se tiene: $9 \cdot 71 = 639$; $33 \cdot 19 = 627$. Como $9 \cdot 71 > 33 \cdot 19 \Rightarrow \frac{9}{19} > \frac{33}{71}$.

Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador: la fracción suma o resta es la que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores y por denominador el común.

Ejemplo: a) $\frac{4}{15}+\frac{7}{15}=\frac{4+7}{15}=\frac{11}{15}$. b) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4+5-2}{9}=\frac{7}{9}$.

- Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador y se procede como antes.

Ejemplo: a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{12}=\frac{8}{36}+\frac{15}{36}=\frac{8+15}{36}=\frac{23}{36}$. b) $\frac{7}{15}-\frac{2}{9}=\frac{21}{45}-\frac{10}{45}=\frac{21-10}{45}=\frac{11}{45}$.

Suma o resta de números enteros y fracciones

Si se escribe el número como una fracción con denominador 1, la operación se reduce a alguna de las anteriores.

Ejemplos: a) $3+\frac{4}{15}=\frac{3}{1}+\frac{4}{15}=\frac{3\cdot 15+4\cdot 1}{15}=\frac{49}{15}$. b) $4-\frac{3}{7}=\frac{4}{1}-\frac{3}{7}=\frac{4\cdot 7-3\cdot 1}{7}=\frac{25}{7}$.

Multiplicación de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador, el producto de los denominadores. Esto es: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Ejemplo: a) $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 9}=\frac{20}{63}$. b) $\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 10}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$.

Multiplicación de un número entero por una fracción

La fracción resultante tiene como numerador el producto del número por el numerador; el denominador será el mismo. Esto es: $a\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{d}$ y $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$.

Ejemplos: a) $7\cdot\frac{5}{11}=\frac{7\cdot 5}{11}=\frac{35}{11}$. b) $\frac{3}{14}\cdot 6=\frac{3\cdot 6}{14}=\frac{18}{14}=\frac{9}{7}$.

División de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador, el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es, sus términos se multiplican en cruz → $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Ejemplos: a) $\frac{6}{7}:\frac{3}{9}=\frac{6\cdot 9}{7\cdot 3}=\frac{54}{21}=\frac{18}{7}$. b) $\frac{3}{11}:\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7}{11\cdot 5}=\frac{21}{55}$.

División de un número entero por una fracción y de una fracción por un número entero

Escribiendo el número entero como una fracción con denominador 1 la operación se hace como se ha indicado en general. Esto es: $a:\frac{c}{d}=\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{c}$; $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b\cdot c}$.

Ejemplos: a) $4:\frac{5}{7}=\frac{4}{1}:\frac{5}{7}=\frac{28}{5}$. b) $\frac{3}{8}:6=\frac{3}{8}:\frac{6}{1}=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$.

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{15}{20}+\frac{4}{20}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{180}$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{36}+\frac{1}{5}=\frac{15}{180}+\frac{36}{180}=\frac{51}{180}=\frac{17}{60}$.

Tema 8. Operaciones con fracciones Autoevaluación

1. Reduce a común denominador los siguientes pares de fracciones:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{6} \to \frac{2}{5} = \frac{12}{30}$; $\frac{1}{6} = \frac{5}{30} \to \frac{12}{30}$ y $\frac{5}{30}$. b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12} \to$

c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{12} \to$ d) $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{15} \to$

2. Para cada uno de los pares de fracciones anteriores, ¿cuál de ellas es la mayor?

a) $\frac{2}{5} = \frac{12}{30} > \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$. b)

c) d)

3. Reduce a común denominador las fracciones:

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \to (\text{mcm} = 30) \to \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10}, \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} \to \frac{12}{30}, \frac{10}{30}, \frac{5}{30}$.

b) $\frac{1}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{12} \to$

c) $\frac{2}{9}, \frac{4}{15}, \frac{11}{30} \to$ d) $\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{11}{42} \to$

4. Halla:

a) $\frac{4}{11} + \frac{5}{11} - \frac{2}{11}$ .b) $\frac{3}{7} + \frac{6}{7} - \frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{9} + \frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{12} - \frac{2}{9}$

5. Halla:

a) $3 + \frac{1}{5} =$ b) $2 - \frac{3}{4} =$ c) $\frac{5}{11} + 6 =$

6. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{9}{15} =$ b) $\frac{7}{18} \cdot \frac{6}{7} =$ c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{25}{32} =$

7. Calcula, simplificando el resultado:

a) $10 \cdot \frac{9}{15} =$ b) $3 \cdot \frac{6}{11} =$ c) $\frac{8}{15} \cdot 12 =$ d) $\frac{90}{120} \cdot 60 =$

8. Calcula, simplificando el resultado:

a) $\frac{5}{12}:\frac{4}{15}=$ b) $\frac{7}{18}:\frac{14}{15}=$ c) $\frac{8}{15}:\frac{12}{15}=$

9. Calcula, simplificando el resultado:

a) $4:\frac{2}{3}=$ b) $3:\frac{16}{5}=$ c) $\frac{50}{3}:5=$ d) $\frac{28}{3}:4=$

10. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)=$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=$

c) $4-\frac{3}{7}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)=$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right):\frac{5}{6}-\frac{1}{5}=$

11. Luis, Felipe y Pedro compran una pizza. Luís se come dos quintos de pizza, Felipe un tercio y Pedro el resto. ¿Qué fracción de pizza se comió Pedro? ¿Quién comió menos?

12. Carmen gastó ayer un tercio de lo que tenía. Si hoy ha gastado la mitad de lo que le quedó, ¿qué fracción le queda del dinero inicial? Si tenía 450 €, ¿cuánto ha gastado y cuánto le queda?

Soluciones:

1. b) $\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{12}$. c) $\frac{12}{60}$ y $\frac{15}{60}$. d) $\frac{25}{45}$ y $\frac{21}{45}$. **2**. a) $\frac{2}{5}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{3}{12}$. d) $\frac{5}{9}$.
3. a) $\frac{12}{30}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{5}{30}$. b) $\frac{20}{60}$, $\frac{28}{60}$, $\frac{25}{60}$. c) $\frac{20}{90}$, $\frac{24}{90}$, $\frac{33}{90}$. d) $\frac{12}{42}$, $\frac{16}{42}$, $\frac{11}{42}$.
4. a) $\frac{7}{11}$. b) $\frac{4}{7}$. c) $\frac{43}{36}$. d) $\frac{13}{36}$. **5**. a) $\frac{16}{5}$. b) $\frac{5}{4}$. c) $\frac{71}{11}$. **6**. a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{5}{12}$.
7. a) $\frac{18}{5}$. b) $\frac{18}{11}$. c) $\frac{32}{5}$. d) 180. **8**. a) $\frac{75}{48}$. b) $\frac{5}{12}$. c) $\frac{2}{3}$. **9**. a) 6. b) $\frac{15}{16}$. c) $\frac{10}{3}$. d) $\frac{7}{3}$.
10. a) $\frac{49}{180}$. b) $\frac{47}{180}$. c) $\frac{218}{63}$. d) $-\frac{1}{15}$. **11**. $\frac{4}{15}$. Pedro. **12**. $\frac{1}{3}$. Gasto 300 €; le quedan 150 €.

Tema 8. Problemas de fracciones

1. De los animales del zoo, $\frac{2}{3}$ son mamíferos y $\frac{1}{5}$ aves. ¿Qué fracción representan conjuntamente los mamíferos y las aves?

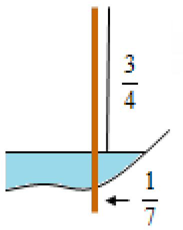
2. Una de las naves espaciales, el Voyager II, salió de La Tierra el 20-8-1977. Tardó en llegar al planeta Júpiter $1+\frac{8}{9}$ de año; de Júpiter a Saturno $2+\frac{1}{8}$ de año; de Saturno a Urano, $4+\frac{3}{7}$ de año; y de Urano a Neptuno, $3+\frac{4}{7}$ de año.

a) ¿Cuántos años tardó en llegar a Neptuno? $\rightarrow$

b) ¿Dónde estaba 5 años después de despegar?

3. Una persona tiene $\frac{1}{4}$ de su fortuna en joyas, y $\frac{2}{5}$ en terrenos. ¿Qué parte de su fortuna tiene entre joyas y terrenos? ¿Cuánto le falta o le sobra para llegar a la mitad de su fortuna?

4. Un poste tiene $\frac{1}{7}$ de su longitud clavado en el fondo de un estanque, y $\frac{3}{4}$ de su longitud, fuera del agua. ¿Qué parte del poste está en contacto con el agua? Si el poste mide 28 m, cuántos metros están clavados, cuantos en el agua y cuántos fuera del agua?



5. Julia emprende una marcha de 30 km. En la primera hora recorre $\frac{1}{4}$ del trayecto, y en la segunda, $\frac{1}{3}$. ¿Qué parte del camino ha recorrido en las dos primeras horas? ¿Cuántos km le faltan para el final del trayecto?

6. Claudia tenía 16 € y se ha gastado los $\frac{3}{4}$ en un regalo. Ángel tenía 30 € y se ha gastado los $\frac{2}{5}$. ¿Quién se ha gastado más dinero?

7. Jimena ha colocado $\frac{1}{30}$ de las piezas de un puzzle y después Ramiro ha colocado los $\frac{3}{100}$. En un movimiento accidental se han descolocado $\frac{1}{50}$ de las piezas. ¿Qué fracción de puzzle ha quedado intacta? Si el puzzle tuviese 600 piezas, cuántas estarían colocadas? ¿Puede tener el puzzle 250 piezas?

8. Alberto ha resuelto bien los $\frac{2}{3}$ de los ejercicios de una prueba y su amiga Irene los $\frac{3}{5}$. ¿Quién tendrá mejor nota?

9. Adrián sale de su casa con 32 €. En diversas compras se gasta los $\frac{3}{8}$ de esa cantidad. ¿Qué parte le queda? ¿Cuántos euros ha gastado?

10. Un contribuyente paga al principio del año la mitad de sus impuestos; al cabo de seis meses, la tercera parte de ellos, y al final del año paga el resto. ¿Qué parte de los impuestos paga al final del año? Suponiendo que tiene que pagar 1440 €, ¿qué cantidad ha pagado en cada uno de los tres plazos?

Soluciones: **1**. 13/15. **2**. $12+\frac{1}{72}$ de año. Entre Saturno y Urano. **3**. 13/20. Le sobran 3/20. **4**. 3/28. 4, 3 y 21 m, respectivamente. **5.** 7/12. Le faltan 5/12 = 12,5 km. **6**. Los dos el mismo, 12 €. **7**. 13/300. 26. No. **8**. Alberto, pues $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. **9**. $\frac{5}{8}$. 8 €. **10**. $\frac{1}{6}$. 720, 480 y 240 €, respectivamente.

Tema 9. (I) Proporcionalidad Resumen

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 3, por 10,…, la magnitud B (de valor inicial 5) se multiplica por 2, por 3, por 10, …

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	6	20	**30**	***x***	**1**
Magnitud B	**5**	10	15	50	***y***	**60**	***k***

.

Propiedad: si dos magnitudes son directamente proporcionales, el cociente de las cantidades correspondientes es constante: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{20}{50}=...=\frac{30}{y}=\frac{x}{60}$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.
Ejemplo: Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $\frac{2}{5}=\frac{30}{y}$, entonces $y = 75$; y si $\frac{2}{5}=\frac{x}{60}$, entonces $x = 24$.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo: Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, por 5, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, por 5, …

Tabla 2. Inversamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	8	10	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	10	***y***	**2,5**	***k***

.

Propiedad: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $2\cdot 50=4\cdot 25=8\cdot 12{,}5=10\cdot 10=...=20\cdot y=x\cdot 2{,}5$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.
Ejemplo: Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $2\cdot 50=20\cdot y$, entonces $y = 5$; y si $2\cdot 50=x\cdot 2{,}5$, entonces $x = 40$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa
En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A.
Ejemplo: En la Tabla 1, el valor de B cuando A = 1 es 5 : 2 = 2,5. Es el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $\frac{2}{5}=\frac{1}{k}$ → al dividir por 2 el numerador también hay que dividir por 2 el denominador. Por tanto, $k = 2{,}5$.

- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan multiplicando los de A por *k*.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo los de B por *k*.

Ejemplo: a) Para la Tabla 1, si A = 3 ⇒ B = 3 · 2,5 = 7,5; si A = 10 ⇒ B = 10 · 2,5 = 25.
b) a) Para la Tabla 1, si B = 10 ⇒ A = 10 : 2,5 = 4; si B = 40 ⇒ A = 40 : 2,5 = 16.

Regla de tres simple directa

Un problema de regla de tres directa es el siguiente: Por la compra 5 kg de patatas se han pagado 7,5 €. ¿Cuánto deberá pagarse por la compra de 12 kg de patatas?

- Lo primero es darse cuenta que las magnitudes "kilogramos de patatas" y "cantidad a pagar" son directamente proporcionales. → "*A más kilos, más dinero*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si a 5 kg → 7,5 €

a 12 kg → x € $\Rightarrow \dfrac{5}{12} = \dfrac{7,5}{x} \Rightarrow 5 \cdot x = 7,5 \cdot 12 \Rightarrow 5 \cdot x = 90 \Rightarrow x = \dfrac{90}{5} = 18$ €.

Recuerda: Al tratarse de fracciones equivalentes, "los productos *cruzados* son iguales".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el precio de 1 kg de patatas. Este valor es: $\dfrac{7,5}{5} = 1,5$ €. En consecuencia, el coste de 12 kg será 12 · 1,5 = 18 kg.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad inversa

En los problemas de proporcionalidad inversa el valor de B cuando A = 1 se halla multiplicando cualquier valor conocido de B por su correspondiente en A.

Ejemplo: En la Tabla 2, el valor de B cuando A = 1 es 50 · 2 = 100.
Es el valor de k en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $2 \cdot 50 = 1 \cdot k \Rightarrow k = 100$.

Tabla 2. Inversamente proporcionales							
Magnitud A	**2**	4	8	10	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	10	***y***	**2,5**	***k***

- Conociendo el valor de k, los valores de B se hallan dividiendo k entre los valores de A.
- Conociendo el valor de k, los valores de A se hallan dividiendo k entre los valores de B.

Ejemplo: a) Para la Tabla 2, si A = 2 ⇒ B = 100 : 2 = 50; si A = 20 ⇒ B = 100 : 20 = 5.
b) Para la Tabla 2, si B = 10 ⇒ A = 100 : 10 = 10; si B = 8 ⇒ A = 100 : 8 = 12,5.

Regla de tres simple inversa

Un problema de regla de tres inversa es el siguiente: Dos pintoras encalan una pared en 14 horas, ¿cuántas horas tardarían en encalarla entre 5 pintoras?

- Lo primero es darse cuenta que las magnitudes "número de pintoras" y "tiempo en encalar" son inversamente proporcionales. → "*A más pintoras, menos tiempo*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 2 pintoras → tardan 14 h

5 pintoras → tardarán x h $\Rightarrow 2 \cdot 14 = 5 \cdot x \Rightarrow 28 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{28}{5} = 5,6$ h.

En las reglas de tres inversas "los productos *horizontales* son iguales".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el tiempo que tardaría una sola pintora. Ese tiempo sería de 28 horas → 2 · 14 = 28; el doble que si lo hacen entre las dos. En consecuencia, entre 5 pintoras emplearían $\dfrac{28}{5} = 5,6$ horas.

Tema 9. (I) Proporcionalidad **Autoevaluación**

1. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

¿Por qué número hay que multiplicar las cantidades de la magnitud A para obtener sus correspondientes en la magnitud B?

→

2. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

3. Indica, explicando el motivo, cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales, o no son proporcionales:

a) Los kilos de carne que compra Andrés y el dinero que paga por ello.

→

b) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y la velocidad que lleva.

→

c) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y lo que paga por la carne que compra.

→

d) Lo que pesa Andrés y lo que mide de estatura.

→

4. El kilo de carne está a 12,30 €. Si Andrés ha comprado 2,400 kg, ¿cuánto habrá pagado?

5. Otro día, Andrés pagó 13,50 € por 1,5 kilos de carne. ¿Cuánto pagó Raquel si compró 2,5 kilos de la misma carne ese día?

6. Si Andrés va caminando con una velocidad de 3 km/h tarda 20 minutos en llegar al supermercado. ¿Cuánto tardó su vecina que fue caminando con una velocidad de 5 km/h?

7. En un instituto que tiene 735 alumnos, cuatro de cada siete alumnos son chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

8. Para vaciar un contenedor de ladrillos 8 obreros han empleado 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 12 obreros?

9. Por trabajar 2,5 horas a Pedro le han pagado 20 €. ¿Cuánto le pagarán otro día por trabajar 4 horas?

10. Para hacer una zanja 3 excavadoras han empleado 4 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 4 excavadoras?

11. El coste de un aparcamiento se calcula por minutos. Si Andrea ha pagado 2,70 € por 1 hora y media, ¿cuánto pagará Víctor que aparcó durante 2 h y 20 min?

12. Un coche, a velocidad constante de 120 km/h, tarda 1,75 horas en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardaría a una velocidad constante de 100 km/h?

Soluciones:

1.

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9	10	20	1
Magnitud B	**9**	27	36	40,5	45	90	4,5

Por 4,5.

2.

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9	0,4	0,2	1
Magnitud B	**9**	3	2,25	2	45	90	18

3. a) Directamente proporcionales.
b) Inversamente proporcionales.
c) y d) nada.
4. 29,52 €. **5**. 22,50 €. **6**. 12 min.
7. 315 chicos y 420 chicas.
8. 2 h. **9**. 32 €.
10. 3 h. **11**. 4,2 €. **12**. 2 h, 6 min.

Tema 9. (II) Porcentajes Resumen

Porcentajes

Un tanto por ciento es una fracción con denominador 100.

El tanto por ciento relaciona directamente proporcional ese tanto con el valor 100.

El tanto por ciento también se llama porcentaje. Se simboliza con % → 7 por ciento = 7 %.

El tanto por ciento indica lo que se toma de algo que se ha dividido en 100 partes iguales.

Ejemplo:

Un 16 por ciento (16 %), es la fracción $\frac{16}{100}$. Indica que las magnitudes A y B están relacionadas proporcionalmente mediante las cantidades 16 y 100, respectivamente.

A, porcentaje (%)	**16**	32	…	x	**24**
B, cantidad total	**100**	200	…	**1200**	y

- Por tratarse de una proporcionalidad directa se cumple: $\frac{16}{100} = \frac{32}{200} = ... = \frac{x}{1200} = \frac{24}{y}$.
- Como $\frac{16}{100}$ = 0,16, para hallar el 16 % de cualquier cantidad se multiplica por 0,16.

Ejemplo:

El 16 % de 1200 € = la fracción $\frac{16}{100}$ de 1200 € = $\frac{16}{100}$ · 1200 = 0,16 · 1200 = 192 €.

- En la práctica, para hallar el 16 % de 1200 basta con multiplicar por 0,16.
  16 % de 1200 = 1200 · 0,16 = 192 €.

Tanto por ciento de una cantidad

Lo que se ha calculado en el ejemplo anterior es el porcentaje de una cantidad. Y para hallarlo hemos multiplicado por la fracción correspondiente. En este caso por $\frac{16}{100}$ = 0,16.

- También puede calcularse aplicando la propiedad de la proporción directa.
  Como $\frac{16}{100} = \frac{x}{1200} \Rightarrow 16 \cdot 1200 = 100 \cdot x \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 1200}{100} = 192$ €.
- También puede calcularse aplicando la regla de tres directa.
  Si a 100 € → 16 €
  a 1200 € → x € $\Rightarrow 100 \cdot x = 16 \cdot 1200 \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 1200}{100} = 192$ €.

Cantidad correspondiente a un porcentaje

Para hallar la cantidad de la que proviene un porcentaje puede dividirse por el tanto por ciento.

Ejemplo:

¿Cuánto debe valer y sabiendo que su 16 % vale 24?

Observando la tabla, se cumple que $\frac{16}{100} = \frac{24}{y} \Rightarrow 16 \cdot y = 24 \cdot 100 \Rightarrow y = \frac{24 \cdot 100}{16} = 150$.

- También puede calcularse aplicando la regla de tres directa.
  Si a 100 € → 16 €
  a y € → 24 € $\Rightarrow 100 \cdot 24 = 16 \cdot y \Rightarrow y = \frac{24 \cdot 100}{16} = 150$ €.

Aumentos porcentuales

Cuando a una cantidad inicial se le añade un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de aumentos porcentuales. (Es lo propio de las subidas de precios).

Ejemplo: Si el precio de los libros de texto ha aumentado, del año pasado a este, el 12 %, ¿cuánto valdrá este año lo que valía 230 € el pasado?

La cantidad que aumenta es el 12 % de 230 = 0,12 · 230 = 27,6 €.

El precio que debe pagarse es lo que valía + el aumento. Esto es: 230 € + 27,6 € = 257,6 €.

Calculo directo de aumentos porcentuales

1. Para aumentar un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1+\dfrac{porcentaje}{100}$.

Ejemplo: Si el precio de los libros de texto ha aumentado del año pasado a este el 12 %, ¿cuánto valdrá este año lo que valía 230 € el pasado?

La cantidad a pagar será: $230\cdot(1+0{,}12)=230\cdot 1{,}12=257{,}6$ €.

2. Para aumentar un porcentaje a una cantidad se puede hacer una regla de tres directa, teniendo en cuenta que a 100 le corresponde 100 + *porcentaje*.

Ejemplo: Si el precio de un juego de ordenador ha aumentado, del año pasado a este, un 7 %, ¿cuánto valdrá este año si el pasado costaba 32 €?

El planteamiento es:

Si a 100 € $\rightarrow$ 107 € (eso es lo que supone un aumento del 7 %)

a 32 € $\rightarrow$ x € $\Rightarrow$ $100 \cdot x = 107 \cdot 32 \Rightarrow x=\dfrac{107\cdot 32}{100}=34{,}24$ €.

Sugerencia. Alterna el método de solución en estos dos ejemplos y comprueba que el resultado el mismo.

Disminuciones porcentuales

Cuando a una cantidad inicial se le quita un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de disminuciones porcentuales. (Es lo propio de las rebajas de precios).

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20 % ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 245 €?

La cantidad rebajada es el 20 % de 245 = 0,20 · 245 = 49 €.

El precio que debe pagarse es lo que valía menos la rebaja. Esto es: 245 – 49 = 196 €.

Calculo directo de aumentos porcentuales

1. Para disminuir un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por $1-\dfrac{porcentaje}{100}$.

Ejemplo: Si el precio de un teléfono móvil se ha rebajado un 20 % ¿cuánto costará si antes de las rebajas costaba 245 €?

La cantidad a pagar será: $245\cdot(1-0{,}20)=245\cdot 0{,}80=196$ €.

2. Para disminuir un porcentaje a una cantidad se puede hacer una regla de tres directa, teniendo en cuenta que a 100 le corresponde 100 – *porcentaje*.

Ejemplo: Si el precio de un juego de ordenador se ha rebajado (disminuido) un 8 %, ¿cuánto valdrá si antes de la rebaja valía 48 €?

El planteamiento es:

Si a 100 € $\rightarrow$ 92 € (eso es lo que supone una rebaja del 8 %)

a 48 € $\rightarrow$ x € $\Rightarrow$ $100 \cdot x = 92 \cdot 48 \Rightarrow x=\dfrac{92\cdot 48}{100}=44{,}16$ €.

Tema 9. (II) Porcentajes Autoevaluación

1. Calcula el 10 % de las siguientes cantidades:

a) 300 →
b) 55 →
c) 2500 →
d) 20,4 → 10 % de 20,4 = 0,10 · 20,4 = 2,04.

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→

2. Calcula el 20 % de las siguientes cantidades:

a) 200 →
b) 5000 →
c) 20 → 20 % de 20 = 0,20 · 20 = 4.
d) 5 →

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→

3. Calcula el 90 % de las siguientes cantidades:

a) 90 →
b) 800 →
c) 240 →
d) 3,4 →

¿Has descubierto un método rápido para calcularlo?

→ Para hallar el 90 % de una cantidad se multiplica dicha cantidad por 0,90.

4. Halla el valor de los siguientes porcentajes:

a) El 18 % de 2500 →
b) El 27 % de 120 →
c) El 9 % de 15300 →
d) El 6,5 % de 48,3 →

5. En una clase de 30 alumnos el 60 % son chicas, ¿cuántos chicas hay?

6. En la misma clase, el 70 % de los alumnos ha aprobado Matemáticas. ¿Cuántos alumnos de esa clase han suspendido Matemáticas?

7. Carmen, que ganaba 1800 euros al mes, ha ascendido en la empresa y le han subido el sueldo un 9 %. ¿Cuánto ganará ahora?

8 ¿Por qué número hay que multiplicar para incrementar una cantidad en un 9 %? Incrementa las cantidades 15300, 2500 y 320 en un 9 %.

→

→ 15300 · 1,09 =

→ 2500… → 320

9. El precio de un automóvil se ha rebajado el 6 %. Si ahora cuesta 8930 €, ¿cuánto costaba antes de la rebaja?

10. ¿Por qué número hay que multiplicar para disminuir una cantidad en un 6 %? Disminuye las cantidades 12450, 980 y 700 en un 6 %.

11. Sonia compra un libro que valía 16,40 €. Si le hacen un 30 % de descuento, ¿cuánto pagará por el libro?

12. Al comprar un frigorífico que valía 1420 € nos han rebajado 120 €. ¿Qué descuento nos han hecho?

13. El sueldo de los trabajadores de una empresa va a subir un 2 %. Indica en la tabla siguiente los sueldos de los distintos trabajadores:

Sueldo actual (€/mes)	3200 €	1800 €	780 €
Nuevo sueldo (+ 2 %)			

Un trabajador gana después de la subida 2040 €. ¿Cuánto ganaba antes?

14. Las rebajas anuncian un descuento del 40 %. Indica en la tabla siguiente los precios rebajados

Antes	100 €	200 €	32 €	40,40 €
Precios rebajados				

Tema 10. (I) Expresiones algebraicas **Resumen**

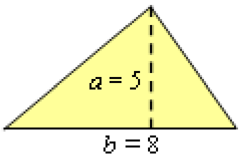
<u>¿Qué es una expresión algebraica?</u>
Son las expresiones en las que aparecen números y letras, unidos por las operaciones habituales.
Ejemplos: Son expresiones algebraicas las siguientes:
a) $a+2\cdot b-3$ b) $2\cdot x$ c) $x^2-2\cdot x$ d) $2\cdot x=14$ e) $2\cdot a^2\cdot b-4\cdot b+5$

- El punto de multiplicar suele quitarse cuando está entre números y letras o entre letras. Así, las expresiones algebraicas del ejemplo anterior se pueden escribir como sigue:
a) $a+2\cdot b-3=a+2b-3$ b) $2\cdot x=2x$ d) $2x=14$ e) $2a^2b-4b+5$
- Las letras pueden tomar valores. Esos valores suelen indicarse: decir cuánto valen. Otras veces hay que calcularlos: descubrirlos.

Ejemplos: a) Si se dice que a = 5 y b = –7, entonces, las expresiones algebraicas:
$a+2b-3$ = 5 + 2 · (–7) – 3 = 5 – 14 – 3 = 5 – 17 = –12.
$2a^2b-4b+5$ = $2\cdot 5^2\cdot(-7)-4\cdot(-7)+5$ = 2 · 25 · (–7) + 28 + 5 = –350 + 33 = –317.
Observa que al sustituir las letras por números hay que poner los puntos de multiplicar.
b) S x = 3, entonces: $2x$ = 2 · 3 = 6; $x^2-2\cdot x$ = 3^2 – 2 · 3 = 9 – 6 = 3.
c) La expresión $2x=14$ es una ecuación. En este caso se trata de encontrar el valor que debe tomar x para que se cumpla la igualdad. Es fácil ver que el único valor posibles es x = 7.

- Las fórmulas son expresiones algebraicas.

Ejemplo: La fórmula que da el área de un triangulo es $A=\frac{b\cdot a}{2}$, donde b representa la base y a la altura. Si la base mide 8 y altura 5, el área del triángulo es: $A=\frac{8\cdot 5}{2}=20$.



<u>Monomios</u>
Son las expresiones algebraicas más simples. Sólo tienen un término.
Un término es: un número; una letra; o un producto de números por letras.
Ejemplos: a) Cualquier número es un término. Así, 8, –3 o $\frac{4}{3}$ son términos, que por no tener ninguna letra multiplicando se llaman términos independientes.
b) Cualquier letra es un término. Así, *a*, *b* o *x* son términos.
c) Cualquier producto de números por letras es un término. Así, $3\cdot a$, $-4\cdot a\cdot x$ o $x\cdot x$ son términos. Esos términos suele escribirse omitiendo los puntos. Así: $3a$, $-4ax$ o x^2.
d) La expresión $2a^2b-4b+5$ no es un monomio, pues esta formada por tres términos. Por tanto, si hay sumas o restas la expresión no es un monomio. Se llamará polinomio.

- En un monomio, al número se le llama <u>coeficiente</u>; a la letra o letras que lo multiplican se le llama <u>parte literal</u>.

Ejemplo: La parte literal de $3a$, $-4ax$ y x^2 es, respectivamente, a, ax y x^2. Sus coeficientes, también respectivamente, son: 3, –4 y 1.
Observa que cuando la parte literal no lleva número, su coeficiente es 1; y si va sola con signo negativo, su coeficiente es –1. No se ponen por comodidad. Así, los coeficientes de $-ab^2$ y de x^3 son, respectivamente, –1 y 1.

- El <u>grado de un monomio</u> es el grado de la parte literal, que es la suma de los grados de las letras que la forman.

Ejemplo: El grado de $3a$ es 1; el grado de x^2 es 2; el grado de $2a^2b$ es 3.

<u>Dos monomios son semejantes</u> cuando tienen la misma parte literal.
Ejemplos: a) Los monomios $3a$ y $5a$ son semejantes.
b) También son semejantes los monomios: x^2 y $6x^2$; y, $2a^2b$ y $3a^2b$.
c) No son semejantes: $3a$ y $2ab$. Tampoco lo son $2x^2$ y $3x$.

<u>Suma y resta de monomios</u>
Sólo pueden sumarse o restarse los monomios semejantes, los que tienen la misma parte literal.
Cuando dos monomios no son semejantes, no pueden agruparse; la operación se deja indicada.
Ejemplos: a) Los monomios $3a$ y $5a$ pueden sumarse y restarse. Esto es, pueden hacerse las operaciones: $3a+5a$ y $3a-5a$
b) Los monomios $2x^2$ y $3x$ no pueden sumarse ni restarse. Las operaciones $2x^2+3x$ y $2x^2-3x$ no pueden realizarse.

- Para sumar (o restar) monomios se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:
a) $3a+5a=(3+5)a=8a$; b) $3a-5a=(3-5)a=-2a$; c) $a+a+a=3a$;
d) $2x^2+3x$ se deja indicada, como está.

- La suma y resta de expresiones algebraicas cumplen las mismas propiedades que la suma y resta de números. Habrá que tener en cuenta las reglas de los signos.

Ejemplos:
a) $2a+7a=7a+2a=9a$; b) $5a-(a-3a)=5a-(-2a)=5a+2a=7a$.

<u>Producto de monomios</u>
Pueden multiplicarse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para multiplicar dos monomios se multiplican números por números y letras por letras.
Ejemplos:
a) $(3a)\cdot(5a)=(3\cdot 5)\cdot(a\cdot a)=15a^2$; b) $(3a)\cdot(-5a)=(3\cdot(-5))\cdot(a\cdot a)=-15a^2$;
c) $a\cdot a\cdot a=a^3$; d) $(2x^2)\cdot(3x)=2\cdot 3\cdot x^2\cdot x=6x^3$.

$xxx=x^3$
$a^2a^4=a^6$
$yy^5y^7=y^{13}$
$5n^5n^2n=5n^8$

<u>División de monomios</u>
Pueden dividirse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para dividir dos monomios se dividen números entre números y letras entre letras. La parte de la expresión que no pueda simplificarse se dejará indicada en forma de fracción
Ejemplos:
a) $\frac{12a^2}{3a}=\frac{12}{3}\cdot\frac{a^2}{a}=4a$; b) $\frac{5x^2}{15x}=\frac{5}{15}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{1}{5}x=\frac{x}{5}$;
c) $\frac{-10x^2y}{5xy^2}=\frac{-10}{5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y}{y^2}=-2x\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x}{y}$.

Tema 10. (I) Expresiones algebraicas — Autoevaluación

1. Calcula, para a = 2 y b = –3 y x = 2, el valor de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a+2b-3 \to$

b) $3x-\frac{1}{4}x^3+\frac{x}{2} \to$

c) $2a^2b-4b+5 \to$

2. Cuáles de las siguientes expresiones son monomios (justifica tu respuesta):

a) $3a^2b$ b) $\frac{5x^2}{3}$ c) $2x^2-8$ d) $\frac{-3ab}{5}$

3. Para los monomios anteriores (los que lo sean) indica el coeficiente y la parte literal.

a) $3a^2b \to$ b) $\frac{5x^2}{3} \to \frac{5}{3}$ y x^2.

c) $2x^2-8 \to$ d) $\frac{-3ab}{5} \to$

4. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:

a) $-3ab \to$ b) $-x^3 \to$

c) $\frac{2a^2b}{5} \to$ d) $7x^2 \to$

5. Di el grado de cada uno de los monomios del ejercicio anterior.

a) $-3ab \to$ b) $-x^3 \to$ c) $\frac{2a^2b}{5} \to$ d) $7x^2 \to$

6. Indica (justificándolo) si son semejantes o no los siguientes pares de monomios:

a) $-3a$ y $2a \to$ b) $4a^3$ y $4a \to$

c) $-x^2$ y $\frac{4x^2}{3} \to$ d) $2ab^2$ y $3ab^2 \to$

7. Suma o resta, en los casos que puedas:

a) $5a-3a+8a =$ b) $3a-(5a-a) =$ c) $2a-3b =$

d) $3x^2-x^2 =$ e) $2x^2+3x^3 =$ f) $\frac{7}{3}x-\frac{2}{9}x =$

8. Simplifica, agrupando los términos que puedas:

a) $3a+5a-(4a-3)=$

b) $3a-5a^2-(2a^2+3a)=$

c) $5x-(3x-6)-4=$

9. Multiplica los siguientes monomios:

a) $(3a^2)\cdot(7a)=$ b) $(-3a)\cdot(-5a)=$ c) $(2a)\cdot(3a^2)\cdot(a^3)=$

d) $3\cdot(2x^2)=$ e) $2x\cdot(3-4x)=$ f) $(2ab)\cdot(5ab^2)=$

10. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{18a}{3}=$ b) $\frac{12x^2}{18x}=$ c) $\frac{8x^2y}{12x}=$

d) $\frac{-8a}{10a^2}=$ e) $\frac{12x^5}{4x^3}=$ f) $\frac{42x^2y^3}{12xy^4}=$

11. Escribe las expresiones algebraicas que sirven para hallar:

a) El área de un rectángulo de base b y altura a $\rightarrow$

b) El perímetro de ese mismo rectángulo $\rightarrow$

c) El área de un círculo de radio r $\rightarrow$

12. Halla el valor de las expresiones anteriores cuando b = 12 cm, a = 7 cm y r = 5 cm.

a)

b)

c)

Soluciones

1. a) –7. b) 5. c) –7. **2.** a), b) y d). **3.** a) a^2b y 3. b) x^2 y $\frac{5}{3}$. d) ab y $-\frac{3}{5}$.

4. a) –3 y ab. b) –1 y x^3. c) $\frac{2}{5}$ y a^2b. d) 7 y x^2. **5**. 2, 3, 3 y 2, respectivamente.

6. Son semejantes: a) y c). **7**.a) $10a$. b) $-a$. d) $2x^2$. f) $\frac{19}{9}x$.

8. a) $4a+3$. b) $-3a^2$. c) $2x+2$.
9. a) $21a^3$. b) $15a^2$. c) $6a^6$. d) $6x^2$. e) $6x-8x^2$. f) $10a^2b^3$
10. a) $6a$. b) $\frac{2x}{3}$. c) $\frac{2xy}{3}$. d) $\frac{-4}{5a}$. e) $3x^2$. f) $\frac{7x}{y}$.
11. a) $A=ba$. b) $P=2a+2b$. c) $A=\pi r^2$. **12**. a) 84 cm^2. b) 38 cm. c) 78,5 cm^2.

Tema 10. (II) Ecuaciones Resumen

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple sólo para algunos valores de las letras.

En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra *x*.

Ejemplos: Son ecuaciones las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2x = 18$ b) $x^2 = 4$ c) $2x - 3 = x + 7$ d) $\frac{x-2}{5} = 1$

La ecuación $2x = 18$ se cumple si $x = 9$, pues $2 \cdot 9 = 18$. Ese valor es su solución.

La ecuación $x^2 = 4$ se cumple si $x = 2$ o si $x = -2$, pues $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Esa igualdad no la cumple ningún otro valor. La ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones, que son $x = 2$ y $x = -2$.

- Cuando una igualdad se cumple para todos los valores de las letras se llama identidad.

Ejemplo:

$\frac{4x-2}{2} = 2x - 1$ es una identidad. Puedes comprobarlo (hazlo) cuando $x = 2, 5, 9, \ldots$, y para cualquier valor que tú decidas.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:

Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

a) $2x = 18$ y $4x = 36$ b) $2x - 3 = x + 7$ y $2x = x + 10$ c) $\frac{x-2}{5} = 1$ y $x - 2 = 5$

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras es $x = 9$; que la solución de las dos segundas es $x = 10$; y que la solución de las dos últimas es $x = 7$. (Compruébalo.)

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Esto es, los valores que cumplen la igualdad dada.

- Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
  1. Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad.
  2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad.

Ejemplos:

a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede trasformarse como sigue:

$\rightarrow$ Se suma 3 a cada miembro $\rightarrow$ $2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + 3 = x + 7 + 3 \Rightarrow 2x = x + 10$.

$\rightarrow$ Se resta x a cada miembro $\rightarrow$ $2x - x = x + 10 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Así se consigue despejar la *x*; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$.

b) La ecuación $\frac{x-2}{5} = 1$ se transforma así:

$\rightarrow$ Se multiplica por 5 cada miembro $\Rightarrow$ $\frac{x-2}{5} \cdot 5 = 1 \cdot 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$.

$\rightarrow$ Se suma 2 a cada miembro $\rightarrow$ $x - 2 + 2 = 5 + 2 \rightarrow x = 7$.

La solución de la ecuación es $x = 7$.

Resolución de ecuaciones fáciles

1. Ecuación $x+a=b$. Se resuelve restando a a ambos miembros. Queda: $x=b-a$.

Ejemplos: a) $x+5=8$ → restando 5 se tiene: $x=8-5 \Rightarrow x=3$.

b) $x+2=-3$ → restando 2 se tiene: $x=-3-2 \Rightarrow x=-5$.

2. Ecuación $x-a=b$. Se resuelve sumando a a ambos miembros. Queda: $x=b+a$.

Ejemplos: a) $x-3=6$ → sumando 3 se tiene: $x=6+3=9$. La solución es $x=9$.

b) $x-4=0$ → sumando 4 se tiene: $x=0+4=4$. La solución es $x=4$.

Observa:

Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x+a=b \Rightarrow x=b-a$.

Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x-a=b \Rightarrow x=b+a$.

3. Ecuación $ax=b$. Se resuelve dividiendo por a ambos miembros. Queda: $x=\frac{b}{a}$.

Ejemplos: a) $3x=15$ → dividiendo por 3 se tiene: $x=\frac{15}{3}=5$. La solución es $x=5$.

b) $2x=-3$ → dividiendo por 2 se tiene: $x=\frac{-3}{2}=-1{,}5$. La solución es $x=-1{,}5$.

4. Ecuación $\frac{x}{a}=b$. Se resuelve multiplicando por a ambos miembros. Queda: $x=ab$.

Ejemplos: a) $\frac{x}{3}=2$ → multiplicando por 3 se tiene: $x=2\cdot 3=6$. La solución es $x=6$.

b) $\frac{x}{5}=-1$ → multiplicando por 5 se tiene: $x=-1\cdot 5=-5$. La solución es $x=-5$.

Observa:

Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}$; $\frac{x}{a}=b \Rightarrow x=ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por un múltiplo de los denominadores (en particular por su m.c.m.).
3. Se pasan (trasponen) las *x* a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan: se suman o restan.
4. Se despeja la *x*: lo que multiplica a la *x* pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la *x*, pasa multiplicando al otro miembro.

Ejemplos:

a) $3x-5+2x=4-6x+7+x \Rightarrow 3x+2x+6x-x=4+7+5 \Rightarrow 10x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{10}=1{,}6$.

b) $3-4x-(2x-5)=14-9x \Rightarrow 3-4x-2x+5=14-9x \Rightarrow -4x-2x+9x=14-3-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$.

Tema 10. (II) Ecuaciones — Autoevaluación

1. Comprueba cuál es la solución de las ecuaciones que siguen, entre los valores que se dan.

a) $2x-8=x+3$ → elige entre: $x = 9$; $x = 2$; $x = 11$.

→ x = **9** no es solución, pues 2 · **9** – 8 = 10 y **9** + 3 = 12; x = **2**, tampoco: 2 · **2** – 8 ≠ **2** + 3;
x = **11** sí es solución, pues 2 · **11** – 8 = 14 y **11** + 3 = 14: los resultados son iguales.

b) $\dfrac{x-2}{5}=1$ → elige entre: $x = 7$; $x = -3$; $x = 2$.

c) $x^2-5x+4=0$ → elige entre: $x = 0$; $x = 4$; $x = 1$; $x = 2$.

2. Halla pensando, sin despejar la x (pero justificándolo), la solución de las ecuaciones:

a) $2x=10$ →

b) $3x+1=16$ →

c) $2(x-5)=0$ →

d) $\dfrac{32x+3}{7}=5$ →

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x+2=9 \Rightarrow x = 9-2 = 7$.

b) $x-3=2 \Rightarrow$

c) $x+6=2 \Rightarrow$

d) $x+5=-3 \Rightarrow$

e) $x+2=0 \Rightarrow$

f) $x-5=0 \Rightarrow$

g) $x-3=-1 \Rightarrow x=-1+3 \Rightarrow x=2$.

h) $x+4=4 \Rightarrow$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x=8 \Rightarrow$

b) $3x=-2 \Rightarrow$

c) $-4x=-12 \Rightarrow x=\dfrac{-12}{-4} \Rightarrow x=3$.

d) $5x=0 \Rightarrow$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+3=8 \Rightarrow$

b) $3x-5=-2 \Rightarrow$

c) $2-4x=3 \Rightarrow$

d) $5x-6=-6+x \Rightarrow$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 + 2x + 3 = x \Rightarrow$

b) $3(x - 5) = 6 \Rightarrow$

c) $2 - 4x = 3x + 9 \Rightarrow$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x - (5 + 2x) + 5 = x \Rightarrow$

b) $3(x - 5) = 6 - 2(x - 3) \Rightarrow$

c) $2x - 4(x - 1) = -3x + 9 \Rightarrow$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} = 5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4} = -1 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$

d) $\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow$

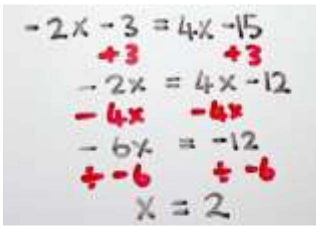
9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{2} + 2 = 5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4} = -1 + x \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2} - 4 = 0 \Rightarrow$

d) $\frac{2x}{3} = -6 \Rightarrow$



10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x - 6}{2} = 2x + 3 \Rightarrow$

b) $\frac{3x}{2} - 2x + 2 = 5 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{4} + 3 = 2 - (1 + x) \Rightarrow$

Soluciones.

1. a) $x = 11$. b) $x = 7$. c) $x = 4$ y $x = 1$. **2.** a) 5.b) 5. c) 5. d) 1. **3**. a) 7. b) 5. c) –4. d) –8. e) –2. f) 5. g) 2. h) 0.
4. a) 4.b) –2/3. c) 3. d) 0. **5**. a) 5/2. b) 1.c) –1/4. d) 0. **6**. a) 1/2. b) 7. c) 5. **7.** a) 0. b) –3/5. c) 5.
8. a) 10. b) –4. c) 5. d) 0. **9**. a) 2. b) 4/3. c) 8. d) –9. **10**. a) 12. b) –6. c) 16/5.

Tema 10. (II) Problemas de ecuaciones

Llámale *x*

La x es la letra más famosa entre los números.
La letra x suele emplearse para sustituir a un número del que no se sabe su valor.
La letra x puede designar la edad de una persona;
La letra x puede ser la longitud de la base de un triángulo;
La letra x puede indicar la distancia entre dos puntos;
La letra x puede designar la capacidad de un depósito, el precio de un determinado producto…

En la resolución de problemas, siempre que no sepas cuánto vale una cosa, llámale x.
(También puedes designar esa cosa con otra letra; y es normal que así se haga. Por ejemplo para designar la base desconocida de un triángulo se suele emplear la letra b; para indicar una velocidad desconocida se emplea la letra v; para el tiempo, se suele utilizar la letra t…)

Con relación a las operaciones, la letra x se maneja exactamente igual que un número. Así, por ejemplo:
El doble de x es $2x$, que significa $2 \cdot x$. Por tanto, si x valiese 8, $2x$ valdría 16.
La mitad de x es $x:2=\frac{x}{2}$ $\rightarrow$ Si x valiese 100, $\frac{x}{2}$ valdría 50.
El cuadrado de x es x^2, que significa $x \cdot x \rightarrow$ si x valiese 7, $x^2 = 7 \cdot 7 = 49$.
La suma $2x+5x$ es igual a $7x$. Igualmente: $\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}x=\frac{8}{3}x$.
Por lo mismo: $x-\frac{x}{3}=\frac{x}{1}-\frac{x}{3}=\frac{3x}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$.
En consecuencia, no tengas miedo a la x; trátala como tratarías a cualquier número, pero trátala bien. Fíjate cómo puede tratarse en los siguientes problemas.

Problema 1

La suma de dos números consecutivos vale 149. ¿De qué números se trata?

En el problema no se sabe el valor de ninguno de los dos números. Se sabe que son consecutivos, lo que significa que si se conoce el primero, el segundo se obtiene sumándole 1.
¿Sabes el primero de los números? No. Pues llámale $x \rightarrow$ entonces, el segundo será $x + 1$.
Como su suma es 149, se tendrá que $x+(x+1)=149$.

Luego, $2x+1=149 \Rightarrow 2x=149-1 \Rightarrow 2x=148 \Rightarrow x=\frac{148}{2}=74$.

Los números son 74 y 75.

Problema 2

La edad de Pedro es la cuarta parte de la su padre. Si la suma de sus edades es 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

¿Sabes la edad del padre de Pedro? No. Pues, llámale $x \rightarrow$ entonces, Pedro tendrá $\frac{x}{4}$, la cuarta parte $\rightarrow$ Como la suma de sus edades es 50:

$$x+\frac{x}{4}=50 \Rightarrow \text{(Multiplicando por 4)} \Rightarrow 4x+x=4\cdot 50 \Rightarrow 5x=200 \Rightarrow x=\frac{200}{5}=40.$$

Luego, la edad del padre es 40 años; y la de Pedro, 10.

Tema 10. (II) Problemas de ecuaciones

1. Escribe la expresión algebraica asociada al enunciado: "un número más su mitad vale 30". ¿De qué número se trata?

2. Si a un número se le resta su tercera parte el resultado es 40. ¿Cuál es ese número?

$\rightarrow$ Sea x = número buscado; su tercera parte será $\frac{x}{3}$. Debe cumplirse que $x - \frac{x}{3} = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ldots$

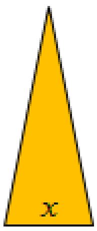
3. La suma de tres números consecutivos vale 129. ¿De qué números se trata?

4. En una clase hay 27 alumnos. Si hay 3 chicos menos chicas, plantea una ecuación para saber cuántos chicos y chicas hay. Resuélvela.

5. Luís es 7 años mayor que su hermano Antonio. Si dentro de dos años la edad de Luís será el doble de la Antonio, ¿cuántos años tiene Antonio ahora?

6. José María dobla los años a Cristina; Carmen es tres años mayor que Cristina; y José María, cuatro más que Catalina. Si la suma de todas las edades es 29, ¿cuál es la edad de cada uno?

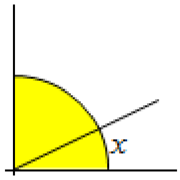
7. Los lados iguales de un triángulo isósceles son tres veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 140 cm, ¿cuánto miden sus lados?



8. La base de un rectángulo es doble que la altura. Si el perímetro mide 90 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

9. Los lados iguales de un triángulo isósceles son dos veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 75 cm, ¿cuánto mide la base?

10. Un ángulo mide tres grados más que el doble de su complementario. ¿Cuánto mide cada ángulo? (Dos ángulos son complementarios si entre ellos suman 90º).



11. Una persona a la que han preguntado cuanto pesa, responde así: "La mitad de la cuarta parte de mi peso es 10 kg". ¿Cuánto pesa esa persona?

12. Un sexto de los $\frac{2}{3}$ de la estatura de Alicia es igual a 17 cm. ¿Cuál es la estatura de Alicia?

13. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro pueden llenarse con una garrafa de 24 litros?

14. Andrés ha regalado la quinta parte de sus cromos a Lucas y la tercera parte a Juan. Si aún le quedan 42, ¿cuántos cromos tenía Andrés?

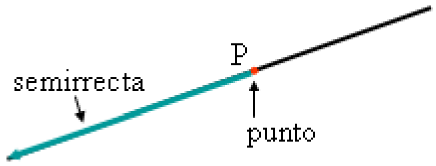
15. Felipe tiene ordenados en su estantería la quinta parte de sus libros. Si todavía le quedan por ordenar 64 libros, ¿cuántos libros lleva ordenados?

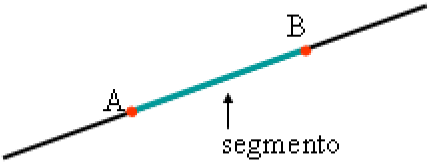
16. Cristina ha andado la tercera parte de un camino. Si aún le quedan 9 km, ¿cuánto mide el camino?

Soluciones: **1.** $x+\frac{x}{2}=30$. 20. **2**. 60. **3**. 42, 43, 44. **4.** $x+x+3=27$. $x=12$**.** **5**. 5 años.
6. 10, 5, 8 y 6. **7**. 20, 60 y 60. **8**. 30 por 15 cm. **9**. 15 cm. **10**. 61º y 29º.
11. 80 kg. **12**. 153 cm. **13**. 32. **14**. 90. **15**. 80. **16**. 13,5 km.

Tema 11. (I) Rectas y ángulos **Resumen**

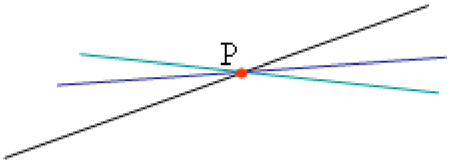
Punto, recta, segmento

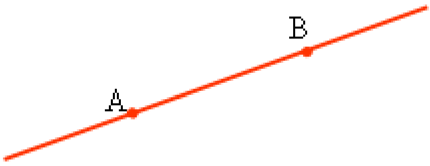




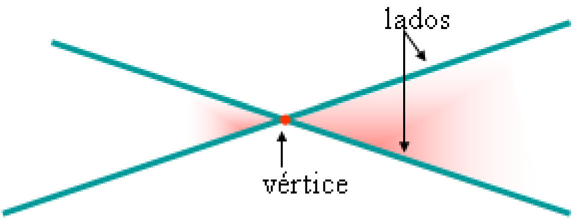
Un punto divide a una recta en dos semirrectas.
Un segmento es un trozo de recta comprendido entre dos puntos.

Por un punto pasan infinitas rectas. Por dos puntos sólo pasa una recta.

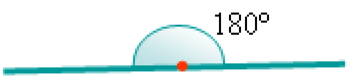


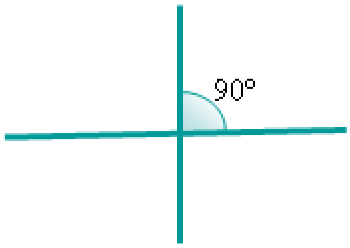


Ángulos
Es cada una de las partes del plano limitada por dos semirrectas que tiene un origen común. El origen de esas semirrectas se llama vértice del ángulo; las semirrectas que lo limitan se llaman lados del ángulo.



Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
La abertura de un ángulo se mide en grados, minutos y segundos.
El ángulo completo (que equivale al plano entero) mide 360º.
Un semiplano, que puede verse como un ángulo formado por dos semirrectas de la misma recta, mide 180º.
Un ángulo que mide 90º se llama recto.

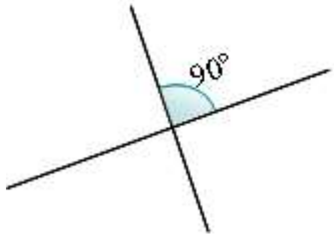


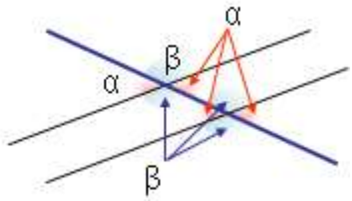


Los ángulos que miden entre 0º y 90º se llaman agudos. Los que miden entre 90º y 180º, obtusos.
Si dos ángulos tienen en común el vértice y un lado se llaman consecutivos o adyacentes.
Dos ángulos se llaman complementarios si entre los dos suman 90º.
Dos ángulos se llaman suplementarios si entre los dos suman 180º.

Algunas relaciones angulares

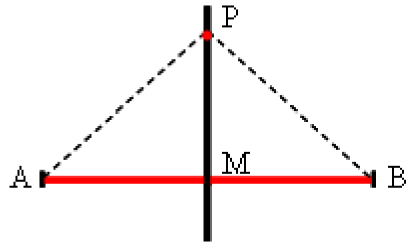
Dos rectas que se cortan formando un ángulo recto se llaman perpendiculares.
Las rectas que no se cortan se dice que son paralelas.



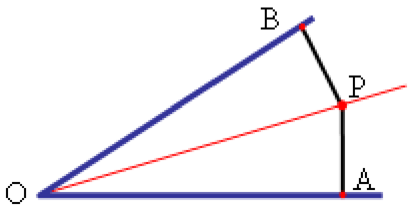


Si dos rectas paralelas son cortadas por otra, se forman ocho ángulos, iguales cuatro a cuatro. Además, los ángulos α y β son suplementarios.

<u>Mediatriz de un segmento</u>. Es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.
<u>Propiedad</u>: Cada punto de la mediatriz está a igual distancia de los extremos del segmento: si P es de la mediatriz, se verifica que PA = PB. La mediatriz se puede trazar con ayuda de un compás.



<u>Bisectriz de un ángulo</u>. Es la recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales.
<u>Propiedad</u>: Cada punto de la bisectriz está a igual distancia de los lados del ángulo: si P es de la bisectriz, se cumple que PA = PB. La bisectriz se puede trazar con ayuda de un compás.



Medidas de ángulos

Un ángulo puede medirse en grados, minutos y segundos.

- 1 grado = 60 minutos → 1º = 60´. Por tanto, para pasar de grados a minutos se multiplica por 60. Para pasar de minutos a grados se divide por 60.

Ejemplos:
a) 20º = (20 · 60) = 1200´. b) 1,2º = (1,2 · 60) = 72´. c) 0,5º = (0,5 · 60) = 30´.
d) 0,1º = 6´. e) 300´ = (300 : 60) = 5º. f) 132´ = 2º 12´ = 2,2º.

- 1 minuto = 60 segundos → 1´ = 60´´. Por tanto, para pasar de minutos a segundos se multiplica por 60. Para pasar de segundos a minutos se divide por 60.

Ejemplos:
a) 12´ = (12 · 60) = 720´´. b) 0,4´ = (0,4 · 60) = 24´´. c) 84´´ = (84 : 60) = 1,4´ = 1´ 24´´.

Un ángulo puede expresarse en grados, minutos y segundos. Por ejemplo: 25º 30´ 36´´.
También se puede expresar en forma decimal. Por ejemplo: 25º 30´ 36´´ = 25,51º.

- Los ángulos se pueden sumar y restar.

Si vienen expresados en grados, minutos y segundos, conviene sumar cada unidad por separado. Para expresar correctamente el resultado, cada 60´´ se transforman en 1´ y cada 60´ se convierten en 1º.

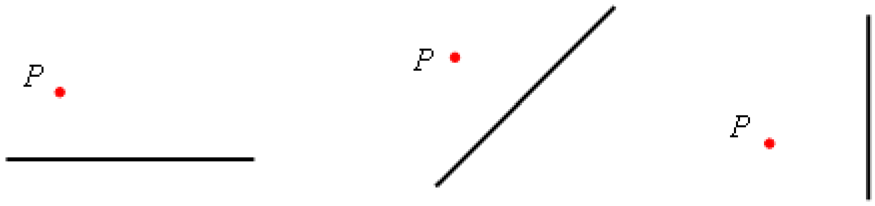
- Los ángulos se pueden multiplicar o dividir por un número.

Se tendrá en cuenta el criterio anterior.

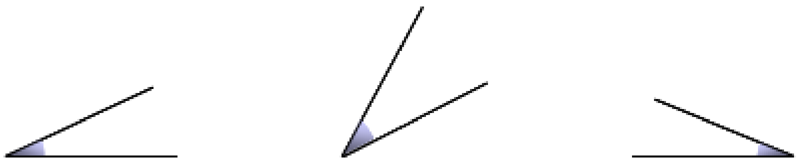
Ejemplos:
a) 13º · 5 = 65º. b) 80º : 5 = 16º. c) (12º 18´) · 4 = 48º 72´ = 49º 12´.

Tema 11. (I) Rectas y ángulos Autoevaluación

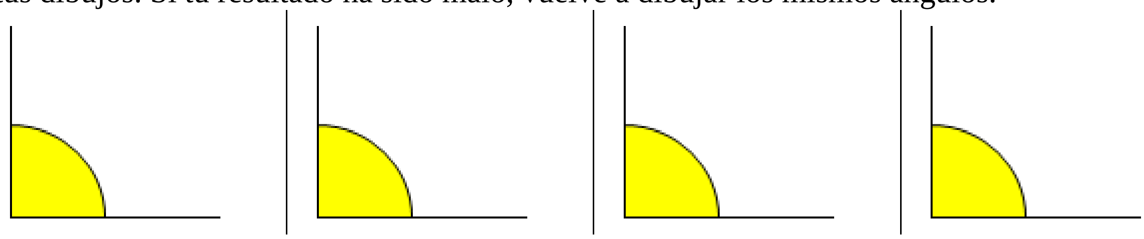
1. Traza una recta perpendicular y otra paralela a cada una de las siguientes rectas, desde el punto P.



2. Para cada uno de los ángulos siguientes, dibuja su opuesto por el vértice y su complementario.



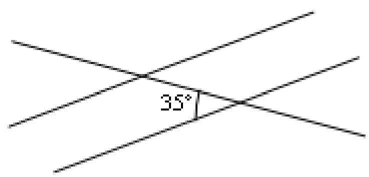
3. Dibuja un ángulo de 90º y, a partir de él traza a mano alzada, ángulos que midan: 45º; 22,5º; 30º; 60º. Una vez dibujados, mide con el transportador la mayor o menor exactitud de tus dibujos. Si tu resultado ha sido malo, vuelve a dibujar los mismos ángulos.



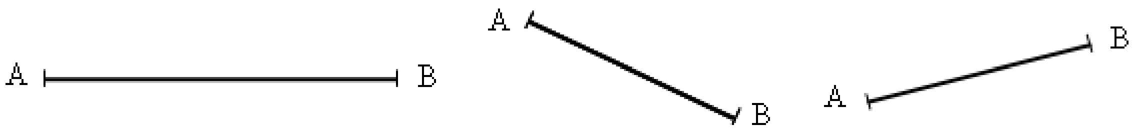
4. Con ayuda de un transportador dibuja ángulos que midan: 20º; 35º; 55º; 70º. Entre los ángulos anteriores, ¿hay algunos que sean complementarios? Si es así, dibújalos consecutivamente y comprueba que dan lugar a un ángulo recto.

5. En la figura adjunta las rectas paralelas y la secante determinan ocho ángulos. Si el que se indica mide 35º, ¿cuántos grados mide cada uno de los siete ángulos restantes?

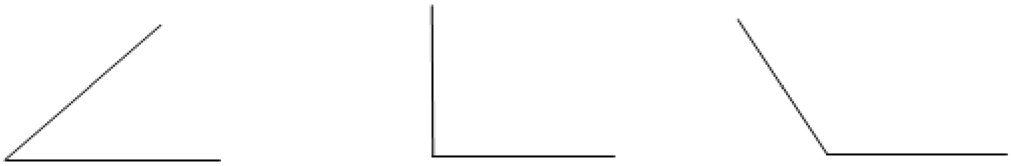
(Anótalos con claridad en la figura).



6. Traza la mediatriz de cada uno de los siguientes segmentos.



7. Traza la bisectriz de cada uno de los siguientes ángulos.



8. Expresa en minutos los siguientes ángulos medidos en grados.

a) 10º = b) 57º = c) 0,5º = d) 5,7º =

9. Expresa en grados los siguientes ángulos medidos en minutos.

a) 180´ = b) 540´ = c) 830´ = d) 1215´ =

10. Halla las siguientes operaciones con ángulos:

a) 32º + 49º = b) 102º – 78º =

c) 45º – 17º + 29º = d) 63,3º + 18,9º =

11. Halla las siguientes operaciones con ángulos:

a) (32º 18´) + (20º 22´) =

b) (62º 35´) + (17º 46´) =

c) (45º 24´) – (17º 17´) =

d) (63º 17´) – (17º 25´) =

Soluciones:

4. Complementarios: 20º y 70º; 35º y 55º.

8. a) 600´. b) 3420´. c) 30´. d) 342´.

10. a) 81º. b) 24º. c) 57º. d) 82,2º.

5. 35º; 145º.

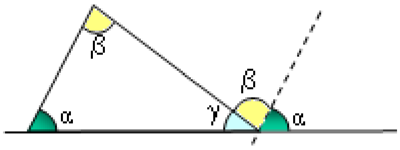
9. a) 3º. b) 9º. c) 13,833º = 13º 50´. d) 22,25º.

11. a) 52º 40´. b) 80º 21´. c) 28º 7´. d) 45º 52´.

Tema 11. (II) Rectas y ángulos Resumen

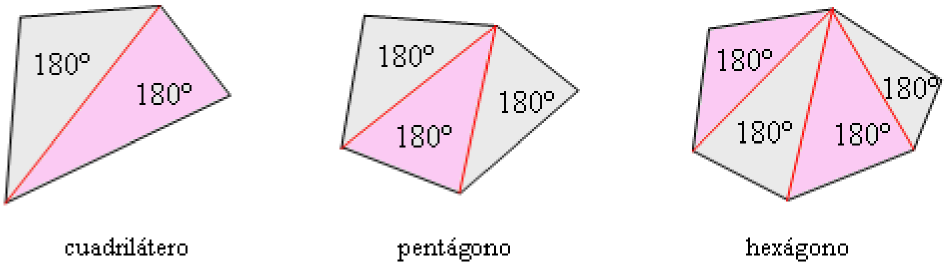
Suma de los ángulos de un triángulo

La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos: 180º.
Como puede verse, puestos consecutivamente los ángulos α, β y γ se forma un ángulo llano: α + β + γ = 180º.



Suma de los ángulos de un polígono

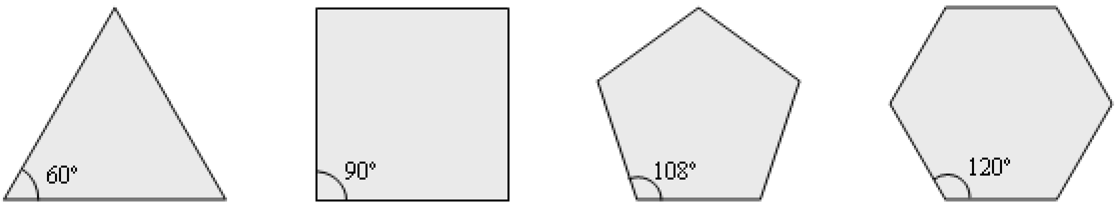
El triángulo es la figura *comodín* de los polígonos, pues cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Por tanto, la suma de los ángulos de un polígono es igual a 180º por el número de triángulos que pueden formarse en él.



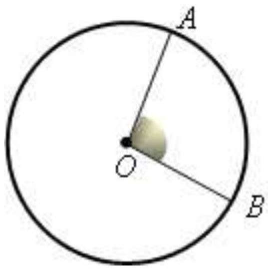
La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 180º · 2 = 360º.
La suma de los ángulos de un pentágono es 180º · 3 = 540ºº.
La suma de los ángulos de un hexágono es 180º · 4 = 720º.

Caso de polígonos regulares

Los polígonos regulares tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.
El triángulo equilátero tiene sus 3 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 180º : 3 = 60º.
El cuadrado tiene sus 4 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 360º : 4 = 90º.
El pentágono regular tienes sus 5 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 540º : 5 = 108º.
El hexágono regular tienes sus 6 ángulos iguales. Cada uno de ellos vale 720º : 6 = 120º.

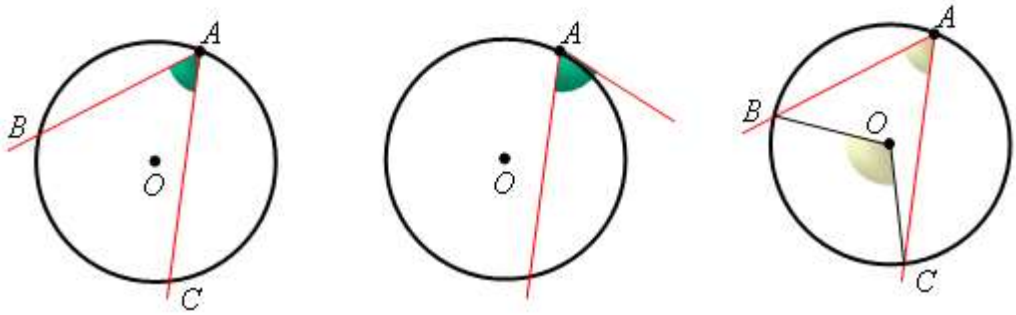


Ángulos en la circunferencia



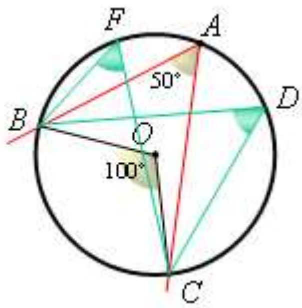
Ángulo central: es cualquier ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. (Todo ángulo central está determinado por dos radios). La media de un ángulo central es la de su arco correspondiente.

Ángulo inscrito: es el que tiene su vértice en un punto de la circunferencia, siendo sus lados secantes o tangentes a ella.



Propiedad de los ángulos inscritos:
Todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad que el ángulo central correspondiente (el que abarca el mismo arco). Esto es: la medida del ángulo *BAC* es la mitad que la del ángulo *BOC*. O también: ángulo *BOC* = 2 · (ángulo *BAC*).

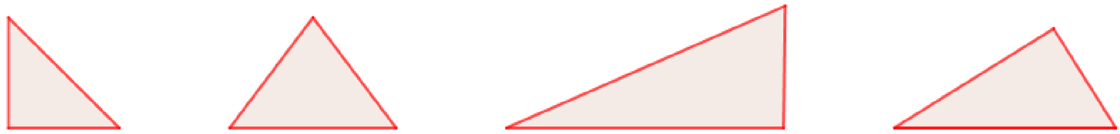
Ejemplo:
En la figura adjunta el ángulo *BAC* vale 50º. Por tanto, el ángulo *BOC* valdrá 100º.
Por lo mismo, como el ángulo *BOC* = 100º, se deduce que los ángulos *BFC* y *BDC* valen 50º, la mitad de 100º.



Tema 11. (II) Rectas y ángulos **Autoevaluación**

1. Dibuja, con ayuda de un transportador, un triángulo cuyos ángulos midan 80º, 60º y 40º.

2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 32º. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo? ¿Cuál de los siguientes triángulos puede ser? Justifícalo.



3. Dibuja un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual mida 30º y cuyos lados iguales midan 5 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos iguales? Con una regla, mide la longitud del lado desigual. ¿Cuál es su valor aproximado?

4. Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 54º. ¿Cuánto vale el ángulo desigual? (Haz un dibujo aproximado).

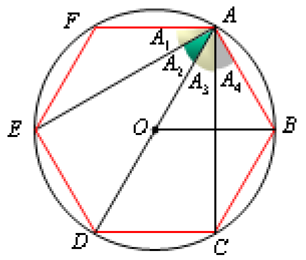
5. Deduce que cada uno de los ángulos de un pentágono regular vale 108º.

6. En un paralelogramo, uno de sus ángulos mide 110º. ¿Cuánto miden los demás ángulos? Dibújalo sabiendo que su lado largo mide 6 cm.

7. ¿Cuánto suman los ángulos de un octógono? (Justifícalo).

8. Traza una circunferencia de radio 4 cm e inscribe en ella un hexágono regular. Traza los tres diámetros que unen los vértices y observa los triángulos que se obtienen: ¿cómo son? ¿Cuánto mide el lado del hexágono? ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos? Justifica cada respuesta.

9. En la figura adjunta se ha dibujado un hexágono regular. Obsérvala y contesta:

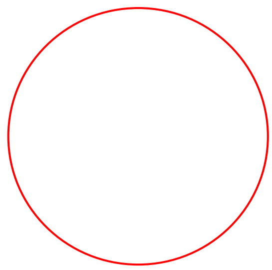


a) ¿Cuánto valen los ángulos A_1, A_2, A_3 y A_4? Justifícalo.

b) Clasifica el cuadrilátero de vértices *OBCD*.

c) Clasifica los triángulos *OAB*, *ACD* y *ACE*.

10. Para los siguientes ángulos inscritos, indica el valor de sus ángulos centrales correspondientes:



Inscrito	20º	30º	45º	60º	90º	120º	140º
Central							

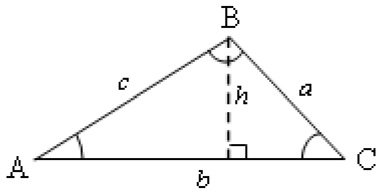
11. Dibuja una circunferencia y un ángulo central de 180º. ¿Cuánto vale cualquiera de los ángulos inscritos correspondiente? ¿Cómo son los triángulos inscritos en una circunferencia que tienen por lado el diámetro? ¿Cómo es el triángulo *EAD* inscrito en la circunferencia de arriba?

Soluciones: **2**. 58º. **3**. 75º. Aprox. 1,3 cm. **4**. 72º. **6**. 70º, 110º y 70º. **7**. 1080º.
8. Los triángulos son iguales. El lado mide 4 cm. Ángulos = 120º.
9. a) 30º. b) Rombo. c) Equilátero; rectángulo; equilátero.
10.

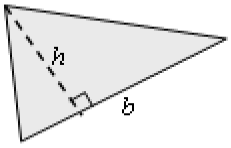
Inscrito	20º	30º	45º	60º	90º	120º	140º
Central	40º	60º	90º	120º	180º	240º	280º

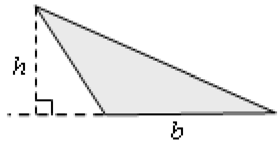
11. 90º. Rectángulos. Rectángulo.

Tema 12. (I) Triángulos **Resumen**

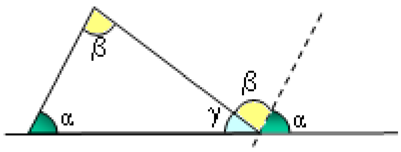


- Los triángulos pueden describirse mediante letras. Los vértices con las letras mayúsculas A, B y C y los lados opuestos con minúsculas *a*, *b* y *c*, respectivamente.
- La altura, que es la distancia desde un vértice al lado opuesto, suele designarse con la letra *h*. La altura siempre es la perpendicular desde un vértice a su lado opuesto. (Si el triángulo está girado, sin la base horizontal, hay que tener cuidado al trazarla: siempre debe ser perpendicular). Por tanto, la altura no cae en el punto medio del lado opuesto; ni siguiera, necesariamente sobre él: puede caer sobre su prolongación. Véanse los siguientes dibujos.

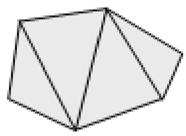




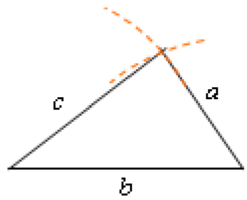
- El área de un triángulo es $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$.
- El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de los tres lados: $p = a + b + c$.
- Cualquier lado de un triángulo es más corto que la suma de las longitudes de los otros dos lados: $a < b + c$.
- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos: 180º. (Puestos consecutivamente los ángulos α, β y γ se forma un ángulo llano: $\alpha + \beta + \gamma = 180º$).



El triángulo es la figura *comodín* de los polígonos, pues cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Por eso, todo lo referente al triángulo merece un estudio más detallado.



Conocidas las longitudes de los tres lados de un triángulo, éste se puede construir con la ayuda de una regla y de un compás. Para ello hay que trazar, con centro en los extremos de uno de lados, arcos de circunferencia con radios respectivamente iguales a las longitudes de los otros dos lados.

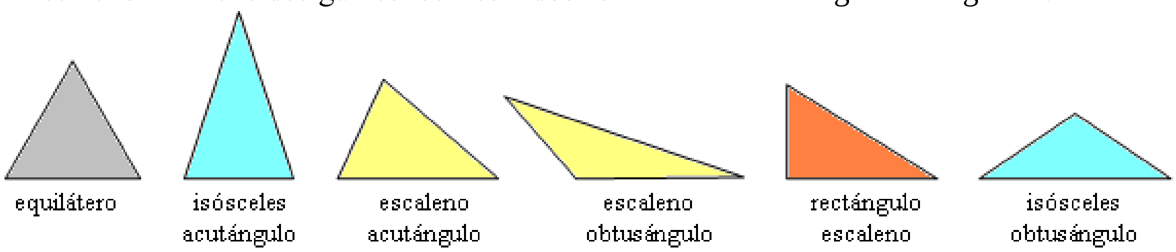


Clasificación según sus ángulos

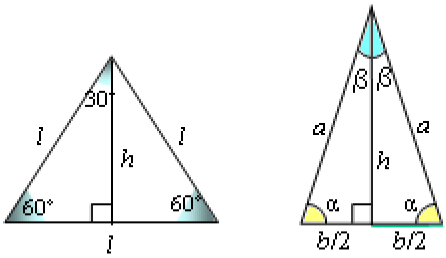
- Acutángulo → Tiene los tres ángulos agudos (menores e 90º).
- Rectángulo → Tiene un ángulo recto (de 90º).
- Obtusángulo → Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90º).

Clasificación según sus lados

- Equilátero → Tiene los tres lados iguales ⇒ Tiene los tres ángulos iguales.
- Isósceles → Tiene dos lados iguales ⇒ Tiene dos ángulos iguales.
- Escaleno → Tiene desiguales los tres lados ⇒ Tiene los tres ángulos desiguales.



Cada ángulo de un <u>triángulo equilátero</u> mide 60º. En estos triángulos, la altura desde cualquier vértice cae en la mitad del lado opuesto.

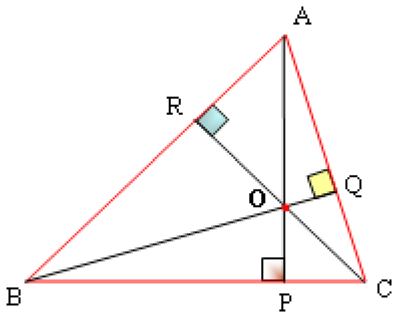


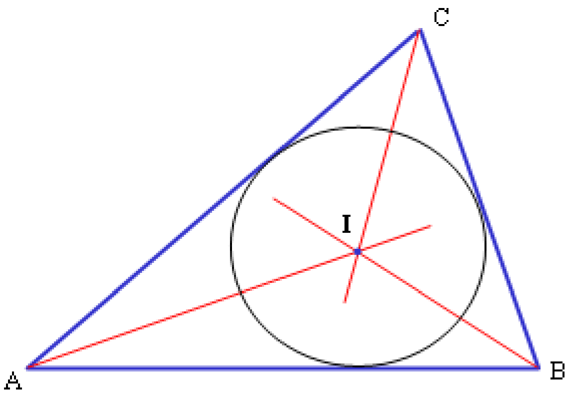
El los <u>triángulos isósceles</u>, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos partes iguales. Esa altura coincide con la bisectriz correspondiente al vértice; por tanto, la recta que contiene a la altura divide el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales.

<u>Rectas notables de un triángulo</u>

- <u>Alturas</u> de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto.

El punto O donde se cortan las tres alturas se llama <u>ortocentro.</u>



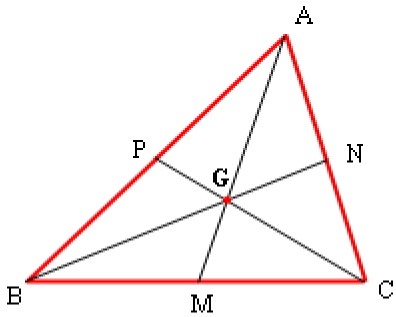


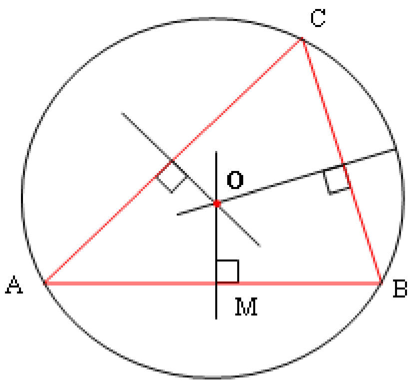
- <u>Bisectrices</u> de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos.

El punto donde se cortan las bisectrices se llama <u>incentro</u>, y equidista de los lados del triángulo. El incentro es el centro de una circunferencia tangente a los tres lados y se llama <u>circunferencia inscrita</u>.

- <u>Medianas</u> de un triángulo son las rectas que pasan por cada uno de los vértices y el punto medio del lado opuesto.

El punto G donde se cortan las tres medianas se llama <u>baricentro</u>.



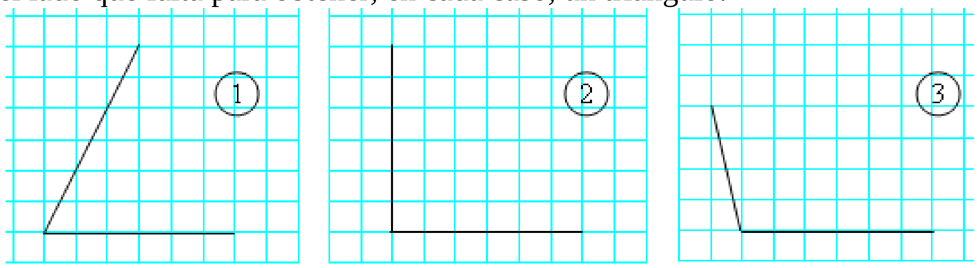


- <u>Mediatrices</u> de un triángulo son las tres mediatrices de los lados.

El punto donde se cortan las mediatrices se llama <u>circuncentro</u>, y equidista de los vértices del triángulo. El circuncentro es el centro de la <u>circunferencia circunscrita</u> al triángulo.

Tema 12. (I) Triángulos **Autoevaluación**

1. Traza el lado que falta para obtener, en cada caso, un triángulo.



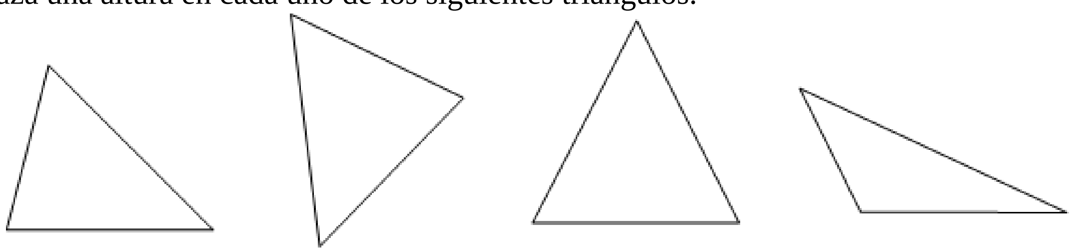
Clasifica, según sus lados y según sus ángulos, los triángulos obtenidos.

2. Utilizando una regla, mide la longitud de los lados de cada triángulo y halla el perímetro de cada uno de ellos.

3. Utilizando un transportador, mide los ángulos de cada triángulo. Comprueba que las suma de los tres ángulos de cada triángulo suman 180º.

4. Utilizando una regla, mide la base y la altura de cada triángulo y halla el área de cada uno de ellos.

5. Traza una altura en cada uno de los siguientes triángulos.



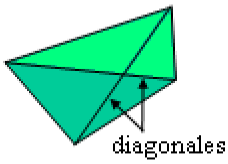
6. Utilizando una regla y un compás dibuja un triángulo cuyos lados midan 4, 6 y 7 cm. Para ese triángulo, traza las tres alturas y halla el ortocentro.

Tema 12. (II) Cuadriláteros **Resumen**

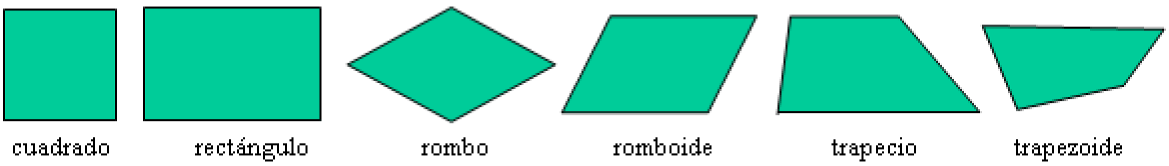
- Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.

Un cuadrilátero se puede partir en dos triángulos. Por tanto, la suma de los ángulos de un cuadrilátero vale 360º.

- Las diagonales de un cuadrilátero son los segmentos que unen vértices opuestos. Un cuadrilátero tiene dos diagonales.



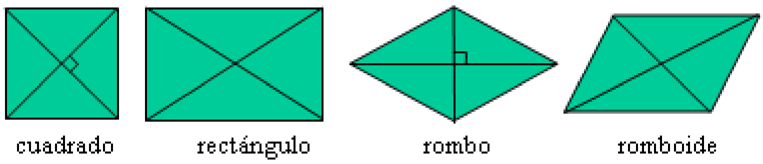
<u>Clasificación e los cuadriláteros</u>



- Cuadrado → Tiene los cuatro lados iguales. Cada uno de sus ángulos mide 90º.
- Rectángulo → Tiene los lados paralelos dos a dos. Cada uno de sus ángulos mide 90º.
- Rombo → Tiene los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos. Sus ángulos opuestos son iguales.
- Romboide → Tiene los lados paralelos dos a dos. Sus ángulos opuestos son iguales.
- Trapecio → Tiene dos lados paralelos y de distinta longitud.
- Trapezoide → No tiene paralelos ningún par de lados. La mayoría de los cuadriláteros son trapezoides.

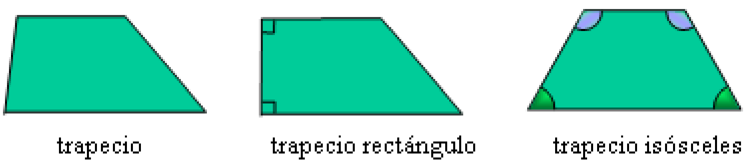
<u>Paralelogramos</u>. Son los cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos.
Son el <u>cuadrado</u>, el <u>rectángulo</u>, el <u>rombo</u> y el <u>romboide</u>.

- Las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan en su punto medio. Además, las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan formando un ángulo recto (de 90º).



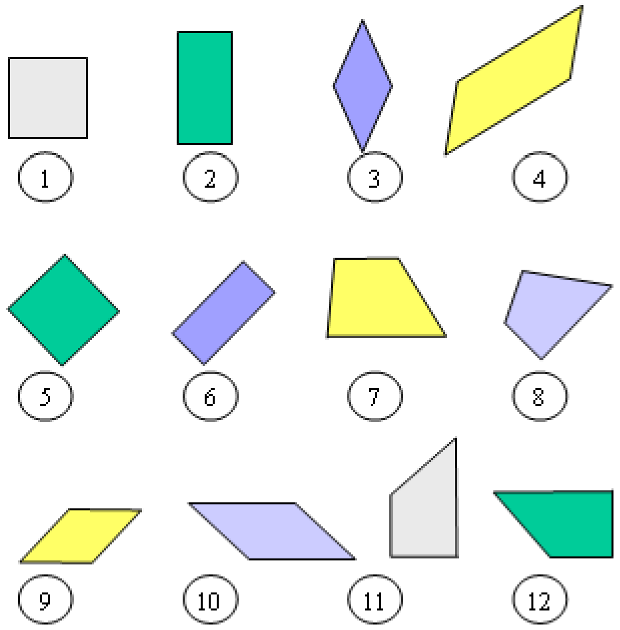
<u>Clasificación de los trapecios</u>

- Trapecio rectángulo → Es un trapecio que tiene dos ángulos rectos.
- Trapecio isósceles → Es un trapecio que tiene iguales los lados no paralelos. También tiene iguales, dos a dos, los ángulos determinados en los lados paralelos.



Tema 12. (II) Cuadriláteros Autoevaluación

1. Indica el nombre de cada uno de los siguientes cuadriláteros:



1.
2.
3.
4.
5. Cuadrado; y rombo. Sus lados son iguales y perpendiculares.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2. Dibuja un cuadrado de lado 4 cm. Dibuja también un rectángulo de base 7 cm y de altura 3 cm.

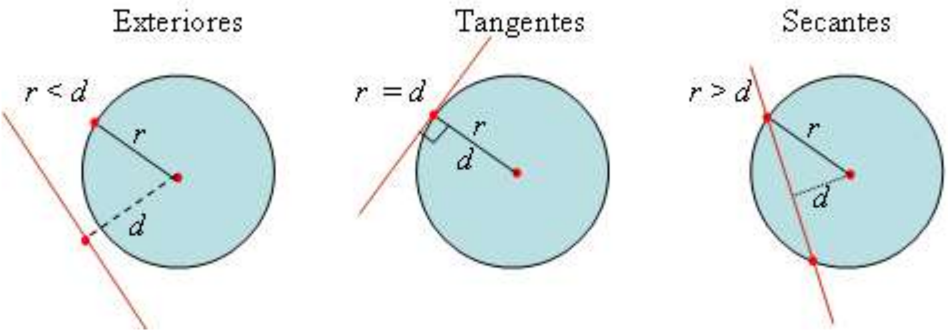
3. Dibuja dos rombos distintos de lado 3 cm. Traza sus diagonales en cada caso. ¿Dónde se cortan?

4. Dibuja un rombo sabiendo que sus diagonales miden 4 cm y 6 cm.

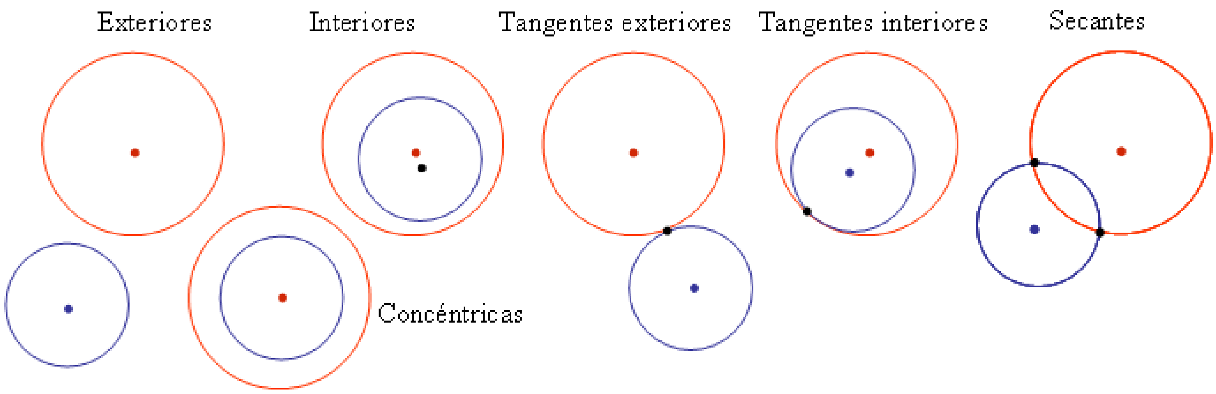
Tema 12. (III) Circunferencia y polígonos regulares Resumen

- La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos equidistan (están a la misma distancia) de otro punto interior llamado centro. La distancia al centro se llama radio.
- Un círculo es el conjunto de puntos del plano rodeado por una circunferencia.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia
Exteriores: La recta y la circunferencia no tienen ningún punto en común.
Tangentes: La recta y la circunferencia tienen un solo punto en común. El radio correspondiente al punto de tangencia es perpendicular a la recta.
Secantes: La recta y la circunferencia tienen dos puntos en común.

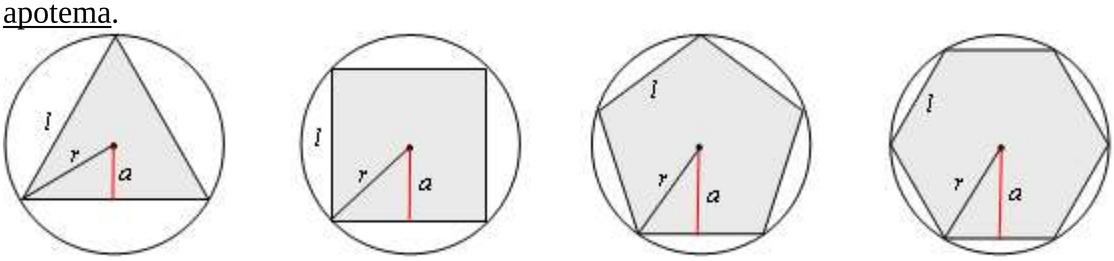


Posiciones relativas de dos circunferencias
Exteriores e interiores: Ningún punto en común.
Concéntricas: son interiores con el mismo centro.
Tangentes: Tienen un solo punto en común. Pueden ser exteriores o interiores. En ambos casos, los centros y el punto de tangencia están en la misma recta.
Secantes: Tienen dos puntos en común.



Polígonos regulares. Son los que tienen todos sus ángulos y todos sus lados iguales.

- Todos los polígonos regulares pueden inscribirse en una circunferencia, que se llama circunscrita. Esa circunferencia pasa por todos los vértices del polígono.
- El radio de la circunferencia circunscrita depende del lado del polígono regular.
- La distancia del centro de la circunferencia al centro de cualquier lado se llama apotema.



Tema 12. (III) Circunferencia y polígonos regulares Autoevaluación

1. Dibuja una circunferencia de radio 3 cm y dos rectas tangentes a ella. En cada caso, traza el radio correspondiente al punto de tangencia y mide el ángulo que forma dicho radio con la recta tangente. ¿Cuánto miden esos ángulos? Puedes dar algún resultado general sobre el ángulo que forma la recta tangente con el radio correspondiente.

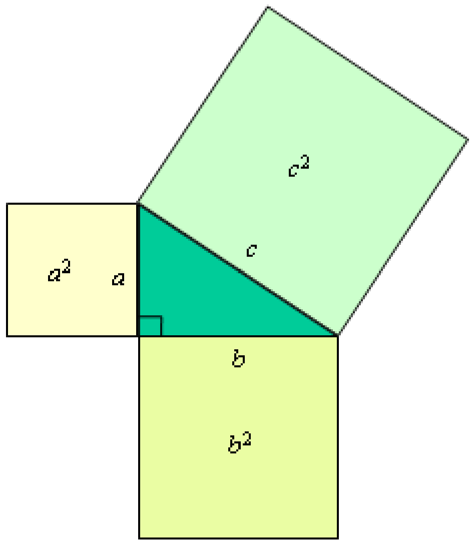
2. Traza dos circunferencias tangentes exteriores (y otras dos tangentes interiores) de radios 3 cm y 2 cm, respectivamente. ¿Cuál es la disposición del punto de tangencia y de los centros de esas circunferencias?

3. Dibuja polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados de longitud 3 cm. Dibuja también sus circunferencias circunscritas correspondientes.

Tema 12. (IV) Teorema de Pitágoras **Resumen**

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:
"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".
O lo que es lo mismo:
Si los catetos miden *a* y *b* y la hipotenusa *c*, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

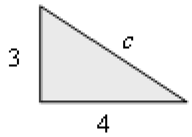


- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

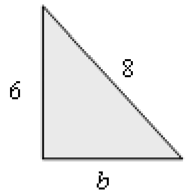
Ejemplos:
a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, *c*, cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5.$$



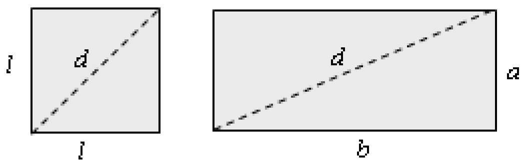
b) Si la hipotenusa vale *c* = 8 cm y un cateto vale *a* = 6 cm, el otro cateto, *b*, cumple:

$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5{,}29.$$



<u>Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras</u>
En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos…), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas… Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

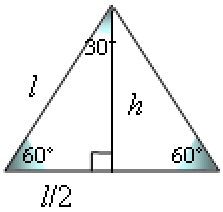
- En los <u>cuadrados</u> y en los <u>rectángulos</u> puede hallarse la <u>diagonal</u> cuando se conocen los lados.



En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.
También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.
En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

Ejemplos:
a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}48$.
b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

- En un triángulo equilátero, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



Esto es: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}$.

Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

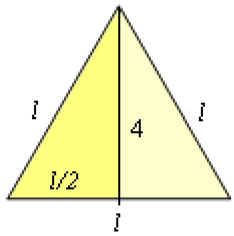
Ejemplos:

a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá: $h = \frac{\sqrt{3} \cdot 15}{2} \approx 13$ cm.

b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:

$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow$$

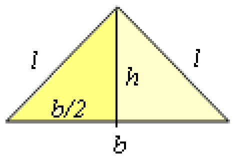
$$\Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}61.$$



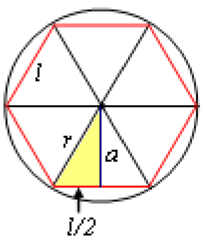
- En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

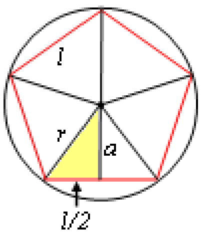
Ejemplo:
Si en el triángulo adjunto el lado l = 5 cm y la base b = 8 cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$



- En los polígonos regulares pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.





Como puede observarse, se establece la relación: $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.

Tema 12. (IV) Teorema de Pitágoras **Autoevaluación**

(Para resolver los ejercicios de esta hoja puede utilizarse calculadora).

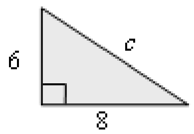
1. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cm. Comprueba, midiendo, que su hipotenusa mide 5 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

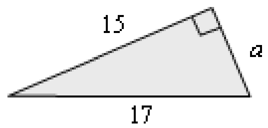
....

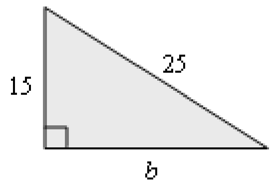
2. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 3. Comprueba que su hipotenusa mide 3,6 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

....

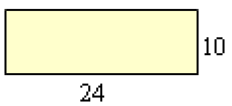
3. Halla el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

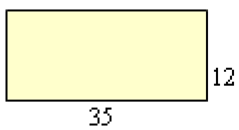


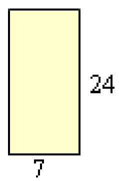




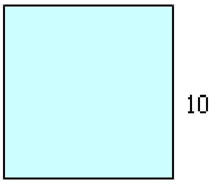
4. Halla la diagonal de los siguientes rectángulos.

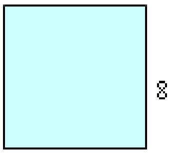


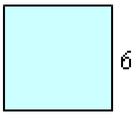




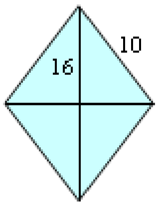
5. Halla la diagonal de los siguientes cuadrados.





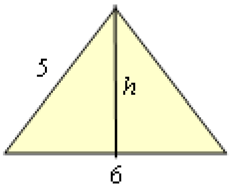


6. El lado de un rombo mide 10 cm y su diagonal mayor 16 cm. ¿Cuánto vale su diagonal menor?

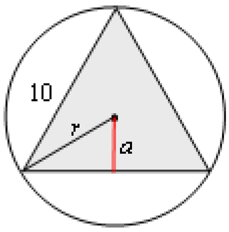


7. Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Halla su lado. (Haz un dibujo).

8. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura?



9. En la figura adjunta se muestra un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia. Si el lado del triángulo mide 10 cm, halla la altura del triángulo, su apotema y el radio de la circunferencia.
Nota: La apotema de un triángulo equilátero es la tercera parte de su altura. Toma $\sqrt{75} = 8{,}7$ y $\sqrt{33{,}41} = 5{,}78$.

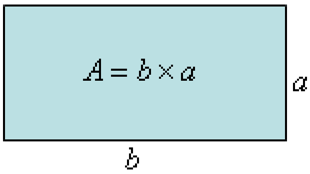


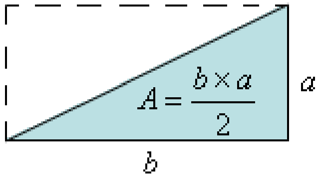
Soluciones:
3. c = 10; a = 8; b = 20. **4**. 26; 37; 25. **5**. Aproximadamente: 14,14; 11,31; 8,49.
6. 12 cm. **7**. 5 cm. **8**. 4 cm. **9**. h = 8,7 cm; a = 2,9 cm; r = 5,78 cm.

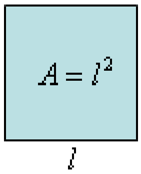
Tema 13. Áreas y perímetros **Resumen**

Áreas de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos

El área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de su base por la de su altura.
El área de un triángulo rectángulo es la mitad que la de un rectángulo. Se calcula así:
El área de un cuadrado se halla multiplicando lado por lado: el lado al cuadrado.





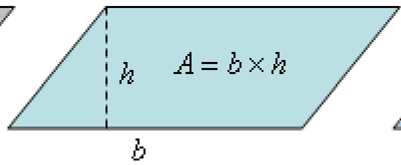


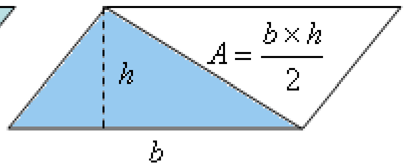
- El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Para un rectángulo: $P = 2a + 2b$. Para un cuadrado: $P = 4l$.

Área de un paralelogramo cualquiera y de un triángulo cualquiera

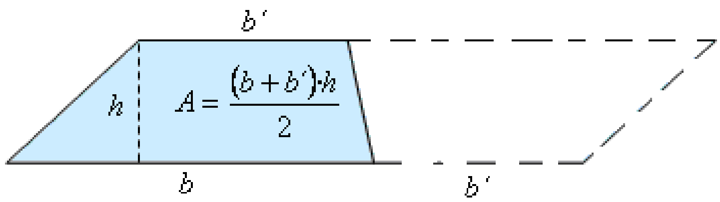
El área de un paralelogramo cualquiera se calcula multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura. (Como puedes observar, a partir del rectángulo de base *b* y altura *h*, cuya área vale $b \times h$, se obtiene un paralelogramo trasladando el triángulo de la izquierda a la derecha; que tendrá la misma área).
El área de un triángulo cualquiera es la mitad que la de un paralelogramo.

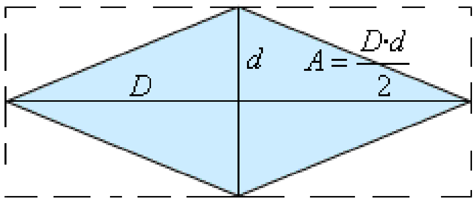




Áreas de un trapecio y de un rombo

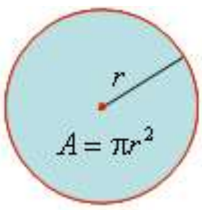
El área de un trapecio se calcula multiplicando la suma de las longitudes de las bases por la longitud de su altura y dividiendo entre 2.
(Puedes observar que un trapecio es la mitad de un paralelogramo de base $b + b'$ y altura *h*).
El área de un rombo se calcula multiplicando las longitudes de las bases y dividendo entre 2.
(Puedes observar que un rombo es la mitad de un rectángulo de base *D y* altura *d*).

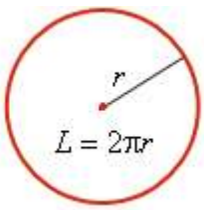


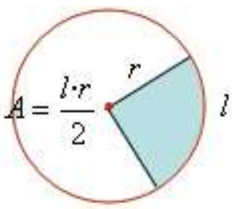


Círculo, circunferencia y sector circular

El área de un círculo se calcula multiplicando el número π por el cuadrado del radio.
La longitud de una circunferencia es el doble del producto del número π por el radio.
El área de un sector circular se calcula multiplicando la longitud del arco por el radio y dividiendo entre 2.

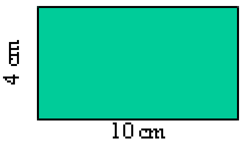


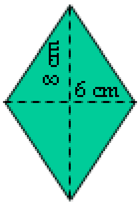


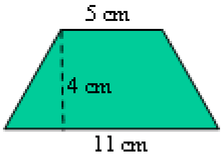


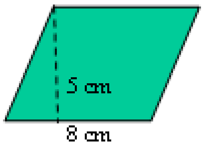
Tema 13. Áreas y perímetros **Autoevaluación**

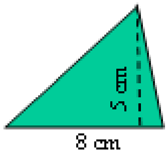
1. Halla el área de cada uno de los siguientes polígonos:







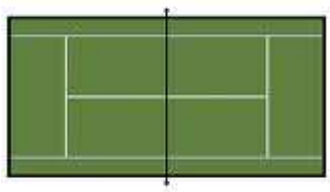




2. Halla el perímetro del rectángulo, del rombo y del trapecio isósceles del ejercicio anterior. (Observación: Quizá debes utilizar el teorema de Pitágoras).

3. Las dimensiones del estadio Santiago Bernabeu son 107 por 72 metros. ¿Cuál es su área? ¿Y su perímetro?

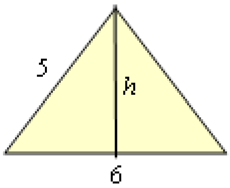
4. Una pista de tenis tiene 23,77 metros de largo. El ancho varía según se juegue individuales (8,23 metros) o dobles (10,97 m). ¿Cuántos metros cuadrados tiene más la pista de dobles que la de individuales?



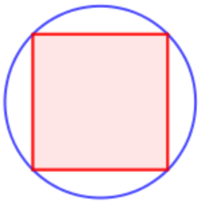
5. Halla el área de un triángulo equilátero de lado 12 cm. (Haz un dibujo).

6. El lanzamiento de disco es una prueba de atletismo, donde el objetivo es lanzar un objeto pesado de sección circular denominado disco lo más lejos posible. El disco se lanza desde un círculo de 2,50 m de diámetro y debe aterrizar dentro de un sector de ángulo de unos 35º. ¿Cuál es la superficie del círculo de lanzamiento? Si ese círculo está limitado por un aro metálico, ¿cuál es la longitud de dicho aro?

7. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura? Halla su área y su perímetro.



8. En la figura adjunta se muestran un cuadrado inscrito en una circunferencia. Si el diámetro de la circunferencia mide 20 cm, halla el lado del cuadrado. Calcula también la superficie del cuadrado y la del círculo; y la longitud de la circunferencia.
Dato: Toma $\sqrt{200} = 14{,}14$.



Soluciones:
1. 40, 24, 32, 40, 20 cm^2, respectivamente. **2**. 28, 20, 26 cm, respectivamente.
3. 7704 m^2; 358 m. **4**. 65,1298 m^2. **5**. 31,2 cm^2.
6. 4,906 cm^2; 7,85 cm. **7**. 4 cm. 12 cm^2; 16 cm.
8. r = 10 cm; A = 200 cm^2; A_{Cir} = 314 cm^2. L = 62,8 cm.