Tema 6. Apéndice: La esfera

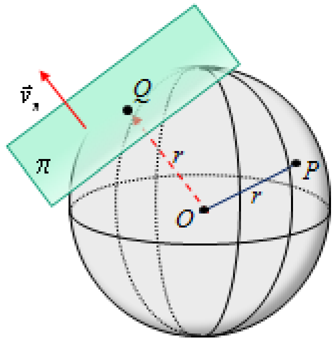
La superficie esférica (la esfera) es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo, llamado centro.
Si el centro es el punto $O(a, b, c)$ y el radio vale r, un punto $P(x, y, z)$ es de la esfera si su distancia a O mide r: $r = d(O, P)$.
Por tanto, su ecuación será:

$$d(O,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Haciendo los cuadrados y agrupando se obtiene la ecuación implícita:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ex + Fy + Gz + H = 0.$$



Propiedad del plano tangente a la superficie esférica: El plano tangente a una esfera en cualquiera de sus puntos es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia. Por tanto, el vector normal del plano tangente a la esfera en el punto Q es el vector ***OQ***.

Algunos ejercicios y problemas

1. Halla la ecuación de la superficie esférica con centro en $O(1, –1, 3)$ y radio 5. Exprésala en su forma implícita y da tres de sus puntos.

Solución:
Su ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5^2.$$

Su ecuación implícita se obtiene desarrollando los cuadrados; es:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 14 = 0.$$

Tres de sus puntos son: (6, –1, 3); (1, 4, 3); (1, –1, 8).

---

2. Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación:
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 23 = 0$.

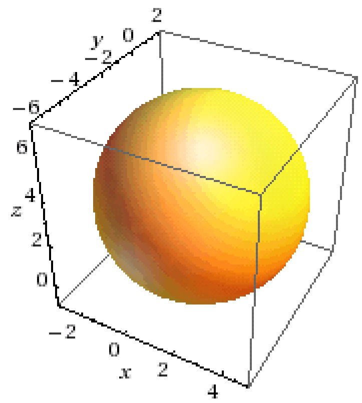
Solución:
En ambos casos hay que completar cuadrados.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

Su centro es $O(1, –2, 3)$; su radio, 4. (Figura.)



http://www.wolframalpha.com/

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 23 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 + (z+1)^2 - 1 - 23 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25.$$

Su centro es $O(0, 1, –1)$; su radio, 5.

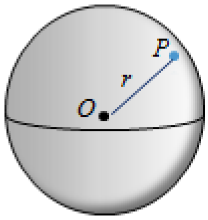
3. Halla la ecuación de la superficie esférica con centro en *O*(1, –1, 0), sabiendo que uno de sus puntos es *P*(3, 2, 5).

Solución:

Su radio es $r = d(O,P) = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$.

Luego, su ecuación será:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 38.$$



---

4. Halla la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos *A*(6, –1, 3), *B*(1, 4, 3), *C*(1, –1, 8) y *D*(5, 2, 3). Determina su centro y su radio.

Solución:

Su ecuación implícita es $x^2 + y^2 + z^2 + Ex + Fy + Gz + H = 0$.

Sustituyendo en ella las coordenadas de los puntos dados, que deben cumplir su ecuación, pues pertenecen a ella, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 36+1+9+6E-F+3G+H=0 \\ 1+16+9+E+4F+3G+H=0 \\ 1+1+64+E-F+8G+H=0 \\ 25+4+9+5E+2F+3G+H=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6E-F+3G+H=-46 \\ E+4F+3G+H=-26 \\ E-F+8G+H=-66 \\ 5E+2F+3G+H=-38 \end{cases} \to \text{(Por Gauss)}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \\ E4-E1 \end{matrix} \begin{cases} 6E-F+3G+H=-46 \\ 5E+5F=20 \\ -5E+5G=-20 \\ -E+3F=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ 5E4+E2 \end{matrix} \begin{cases} 6E-F+3G+H=-46 \\ -5E+5F=20 \\ -5E+5G=-20 \\ 20F=40 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F = 2;\ E = -2;\ G = -6;\ H = -14.$

Por tanto, la ecuación de esfera es: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 14 = 0$.

Completando cuadrados se obtiene: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5^2$.

Luego, su centro es *O*(1, –1, 3); y su radio vale 5.

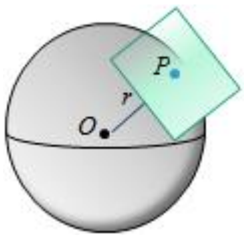
---

5. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie esférica del ejemplo anterior en el punto *D*(5, 2, 3).

Solución:

El plano tangente a una esfera es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia. Por tanto, su vector característico es el vector ***OD***.

Como *O*(1, –1, 3) y *D*(5, 2, 3) ⇒ ***OD*** = (4, 3, 0).



Luego, el plano pedido será:

$$4(x-5)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-26=0.$$

6. Dado el punto $P(1, 3, -1)$:

a) Determina la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) Calcula los puntos de la recta $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$, cuya distancia a P es igual a 3.

c) Da una interpretación geométrica que relacione el resultado del apartado a) con el de b).

<u>Solución</u>:

a) La distancia entre los puntos P y X viene dada por la expresión:

$$d(P, X) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2}.$$

Si esa distancia vale 3 se tendrá:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3^2.$$

Se trata de una esfera con centro en $P(1, 3, -1)$ y radio 3.

b) Un punto genérico de la recta es $X(3\lambda, 1 + \lambda, 1 - 4\lambda)$. Si se desea que $d(X, P) = 3$, se tendrá:

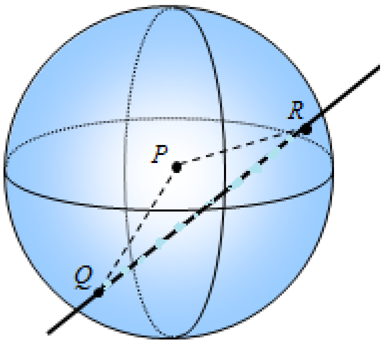
$$(3\lambda-1)^2 + (1+\lambda-3)^2 + (1-4\lambda+1)^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4 - 16\lambda + 16\lambda^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.$$

Los puntos serán: $Q(0, 1, 1)$ y $R(3, 2, -3)$.

c) Los puntos Q y R son la intersección de la esfera hallada en a) con la recta dada en b).



---

7. Halla la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y tiene su centro en la recta $s: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

<u>Solución</u>:

La ecuación de la recta en forma paramétrica es $s: \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 1+t \\ z = -2-t \end{cases}$.

Sea el punto genérico de la recta, $O(4+2t, \ 1+t, \ -2-t)$, su centro. Como el centro debe estar a la misma distancia de los puntos dados, se cumplirá que $d(A,O) = d(B,O)$.

Luego,

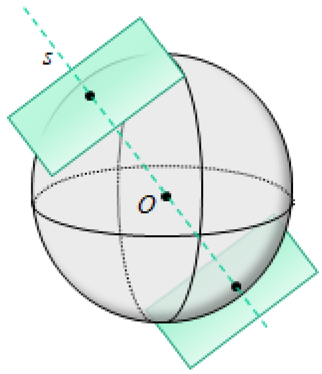
$$\sqrt{(2t)^2 + t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{(1+2t)^2 + (-1+t)^2 + (-3-t)^2} \Rightarrow 10t + 10 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

El centro será O(2, 0, –1). Su radio $d(A,O) = 3$.

La ecuación de la esfera buscada es $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

8. Halla la ecuación de los planos tangentes a la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ que sean paralelos al plano $x+2y-2z+15=0$.

Solución:
La ecuación de los planos buscados será de la forma $\pi \equiv x+2y-2z+d=0$.
Como la esfera tiene su centro en $O(0, 0, 0)$ y su radio es 3, los planos pedidos deben estar a distancia 3 del centro. Por tanto, $d(O,\pi)=3$.



Como $d(O,\pi)=\dfrac{d}{\pm\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3 \Rightarrow d=\pm 9$.

La ecuación de los planos buscados es:
$\pi \equiv x+2y-2z+9=0$ y $\pi \equiv x+2y-2z-9=0$.

Otra forma de hacerlo consiste en determinar los puntos de corte de la esfera (los de tangencia) con la recta s, que pasa por $O(0, 0, 0)$ y su vector director es $\vec{v}_s$ = (1, 2, –2), que es el normal al plano π.

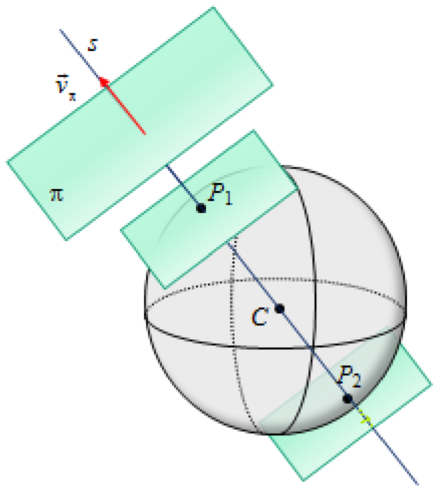
---

9. (Propuesto en Selectividad 2015, Madrid)
Dados el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$
Hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

Solución:
Como se ha indicado en el párrafo anterior, los puntos de tangencia son los de corte de la esfera con la recta s, que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular al plano dado.

El centro de la esfera es el punto $C(1, 1, 2)$; el vector normal al plano es $\vec{v}_\pi$ = (1, –2, 2).

Luego las ecuaciones de la recta son: $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+2t \end{cases}$.



El punto de corte de recta con la esfera se obtiene sustituyendo los valores de las componentes la recta en la ecuación de la esfera.

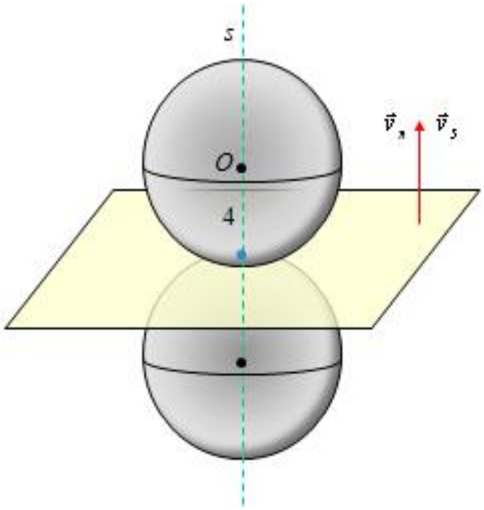
Como $s:\begin{cases} x-1=t \\ y-1=-2t \\ z-2=2t \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t)^2+(-2t)^2+(2t)^2=9 \Rightarrow t=\pm 1.$$

Para t = 1: P_1 = (2, –1, 4) ⇒ $\pi_1 \equiv (x-1)-2(y+1)+2(z-4)=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-2y+2z-12=0$.
Para t = –1: P_1 = (0, 3, 0) ⇒ $\pi_2 \equiv x-2(y-3)+2z=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+2z+6=0$.

10. Halla la esfera de radio 4 que es tangente al plano $\pi \equiv x+2y-2z+9=0$ en el punto P(–5, 0, 2) de ella.

Solución:
El centro está en la recta s, perpendicular a π que pasa por el punto P. Además, la distancia de P al centro debe ser 4.
El vector director de la recta es $\vec{v}_s$ = (1, 2, –2), que es el normal al plano π.



Su ecuación es $s:\begin{cases} x=-5+t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$.

Sea el punto de la recta, $O(-5+t,\quad 2t,\quad 2-2t)$, el centro de la esfera.
Como $d(P,O)=4$, se tiene que:

$$\sqrt{t^2+(2t)^2+(-2t)^2}=4 \Rightarrow 9t^2=16 \Rightarrow t=\pm\frac{4}{3}.$$

Hay dos esferas que cumplen la propiedad exigida. Sus centros son $O_1=\left(-\frac{11}{3},\quad \frac{8}{3},\quad -\frac{2}{3}\right)$ y $O_2=\left(-\frac{19}{3},\quad -\frac{8}{3},\quad \frac{14}{3}\right)$.

Sus ecuaciones respectivas serán:

$$\left(x+\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=16 \text{ y } \left(x+\frac{19}{3}\right)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{14}{3}\right)^2=16.$$

---

11. Halla el punto del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ que equidista de los puntos A(1, –1, 2), B(3, 1, 2) y C(1, 1, 0).

Solución:
Si el punto buscado equidista de tres puntos dados, tiene que ser el centro de una esfera.
Sea $O(x, y, z)$ el punto buscado; como pertenece al plano, debe ser de la forma
$O(x,\quad y,\quad 1-x-y) \rightarrow$ (La variable z se obtiene despejándola en la ecuación del plano.)
Se desea que $d(A,O)=d(B,O)=d(C,O)$.
Luego,
$d(A,O)=d(B,O)$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(-1-x-y)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(-1-x-y)^2} \Rightarrow x+y=2.$$

$d(A,O)=d(C,O)$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(-1-x-y)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(1-x-y)^2} \Rightarrow x+2y=0.$$

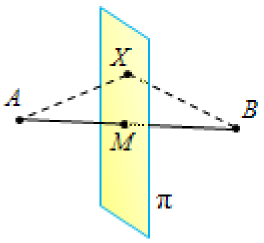
Resolviendo el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=0 \end{cases}$, se obtiene: x = 4, y = –2 $\Rightarrow z$ = –1.
El punto buscado es O(4, –2, 1).

12. (Propuesto en Selectividad 2006, Madrid)
Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:
a) Escribe la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.
b) Determina la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.
c) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Solución:
a) Se desea que: $d(A, X) = d(B, X)$. Por tanto:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}.$$

Elevando al cuadrado se obtiene $2x-2y+2z-1=0$, que es la ecuación de un plano: el plano mediador del segmento AB.



b) Se desea que $d(A, X) = d(A, B)$. Por tanto: $\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{3}$.
Elevando al cuadrado se obtiene la ecuación $x^2+(y-1)^2+z^2=3$, que es la esfera con centro en A y radio $\sqrt{3}$.

c) Si $C(x, y, z)$ es un punto del plano $x+y+z=3 \Rightarrow$ En paramétricas: $C(x, y, 3-x-y)$.
Por tanto,

$\boldsymbol{AC} = (x, y-1, 3-x-y)$ y $\boldsymbol{AB} = (1, -1, 1)$.

Como se desea que sean perpendiculares: $\boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{AB} = 0$; lo que implica que:

$$x-y+1+3-x-y=0 \Rightarrow y=2.$$

Por tanto, $C(x, 2, 1-x)$. Esto es, los puntos de la recta $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1-t \end{cases}$.