Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

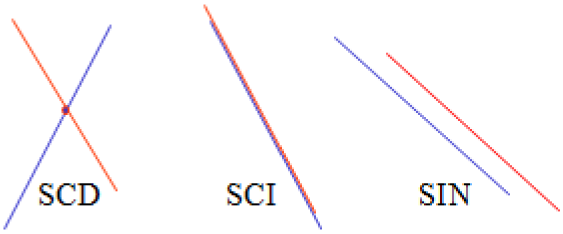
1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (Repaso)

Su forma más simple es $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ → (a, b, c y $a´$, $b´$, $c´$ son números cualesquiera).

Son lineales porque las incógnitas x e y llevan exponente 1; tampoco se multiplican o dividen.
La solución de un sistema es un par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.
Cuando la solución es única se dice que es compatible determinado (SCD).
Si tiene infinitas soluciones se dice que es compatible indeterminado (SCI).
Si no tiene solución se llama incompatible (SIN).

- **Interpretación geométrica**

Cada ecuación de la forma $ax+by=c$ determina los puntos de una recta en el plano. Por tanto, un sistema de dos ecuaciones lineales está asociado a dos rectas que puedes cortarse (SCD), coincidir (SCI) o ser paralelas (SIN).



1.1. Métodos de resolución

Método de sustitución: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver por sustitución el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ se procede así:

1) Se despeja y en la segunda ecuación ($y=1-3x$).
2) Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x-2(1-3x)=8$.
3) Se resuelve la nueva ecuación: $4x-2(1-3x)=8 \Rightarrow 4x-2+6x=8 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$.
4) El valor x = 1 se lleva a la ecuación despejada: $y=1-3\cdot 1=-2$.

La solución del sistema es: x = 1 e y = –2.

Método de reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver por reducción el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ puede procederse como sigue:

1) Se multiplica la segunda ecuación por 2: $\begin{matrix} \\ 2\cdot E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$.
2) Se suman ambas ecuaciones término a término. Se obtiene: $10x=10 \Rightarrow x=1$.
3) Ese valor, x = 1, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones. Se obtiene y = –2.

Método de igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

1.2. Sistemas lineales indeterminados (2 × 2): ¿cómo se resuelven?

Cuando un sistema tiene infinitas soluciones recibe el nombre de compatible indeterminado (SCI). Las ecuaciones que conforman estos sistemas se repiten: son equivalentes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas idénticas.
Algebraicamente, al transformar las igualdades se llegaría a la igualdad 0 = 0.

Ejemplo:
El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado. La segunda ecuación es el doble de la primera: son ecuaciones equivalentes. Por tanto: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x-y=3$, pues la segunda ecuación sobra (es reiterativa).
En estos casos, las soluciones (que son infinitas) deben darse dependiendo de una de las incógnitas (que pasa a considerarse un parámetro), y reciben el nombre de soluciones o ecuaciones paramétricas.
En el ejemplo que nos ocupa resulta más fácil despejar y en función de x, que al revés. Así, en la primera ecuación ($E1$) se deduce que $y=2x-3$.
Dando valores a x se obtienen las distintas soluciones del sistema. Así, si x = 1, y = –1; si x = 3, y = 3; si x = –1, y = –5…
→ Otra alternativa (la recomendada) consiste en hacer $x = \lambda$ y escribir él conjunto de soluciones en la forma: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{cases}$. (λ indica cualquier número real).
También podría escribirse x = t; o cualquier otra letra.

Si en $E1$ se despeja x en función de y, se tendría:

$$x=\frac{3+y}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y \text{ ; y si se dice que } y=t \text{ (o cualquier otra letra)} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=t \end{cases}.$$

Esta solución es aparentemente distinta de la anterior, pero ambas generan los mismos pares de soluciones. (Comprueba que para y = –1; 3; –5…, los valores de x son los dados arriba).

Ejemplo (de discusión y resolución cuando el sistema resulta compatible indeterminado)
El sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$ se puede discutir y resolver como sigue:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \text{(Restando)} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ (m+2)y=0 \end{cases}.$$

Si m = –2, la segunda ecuación queda $(-2+2)y=0 \Leftrightarrow 0y=0 \Leftrightarrow 0=0$ → SCI.
Para cualquier otro valor se m, la 2ª ecuación queda $(m+2)y=0 \Rightarrow y=0$ → SCD.

Por tanto, si m = –2, el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ (SDI) $\Rightarrow x=1+y$.
Para cada valor de y se obtiene un valor de x. Por ejemplo, si y = 2, x = 4; si y = –1, x = 0; …
La solución suele darse en la forma: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$, siendo t cualquier número real: $t \in \mathbf{R}$.

2. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

2.1. Definiciones

Un sistema de tres ecuaciones lineales de con tres incógnitas, en su forma estándar, es un conjunto de tres igualdades de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$.

Las letras x_i, a_{ij} y b_i representan, respectivamente, a las incógnitas, a los coeficientes y a los términos independientes. (Se llama lineal porque las incógnitas siempre van afectadas por el exponente 1, que no se indica. Las incógnitas x_1, x_2 y x_3 suelen designarse por las letras x, y, z, respectivamente. Los coeficientes o los términos independientes pueden ser 0).

- La solución del sistema es el conjunto de valores de x_1, x_2 y x_3 que verifican sus ecuaciones.
- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Discutir un sistema es determinar sus posibilidades de solución. Puede ser:
  – **compatible determinado**, cuando el sistema tiene una única solución (SCD).
  – **compatible indeterminado**, si tiene infinitas soluciones (SCI).
  – **incompatible**, cuando no tiene solución (SIN).

Ejemplos:

a) La terna $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$. Cumple las tres ecuaciones (Compruébese). En cambio, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ no es solución: cumple la primera y segunda ecuaciones; pero no la tercera.

b) Los sistemas $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$ son equivales, pues ambos tienen por solución los valores $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. (Puede comprobarse).
Observación: Una forma sencilla de obtener sistemas equivalentes consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí. Aquí, el segundo sistema se ha obtenido cambiando $E1$ por $E1 + E2$, y $E3$ por $E1 - E2$.

c) Los sistemas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ son compatibles indeterminados. Ambos tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, las ternas (–3, 5, 0) y (0, 1, –1).
En el primero de ellos puede verse que $E3 = E1 + E2$. En el segundo, falta una ecuación.

d) El sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ es incompatible. Puede verse que las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias. Una misma cosa, $x - 2y + 3z$, no puede valer, a la vez, 0 y –2.

3. Métodos de resolución

3.1. Método de sustitución. Es el más elemental de los métodos de resolución. Consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero, pero con una ecuación menos. La discusión del sistema inicial coincide con la del sistema final.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\; -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases} \to z=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2x-1=0 \\ 3x-y-2(2x-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ -x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}.$$

3.2. Método de Gauss

Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$, en otro equivalente a él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2 \\ \qquad\qquad \boxed{a''_{33}x_3=b''_3} \end{cases}$. (Sistema escalonado: "triangular").

El paso de un sistema a otro se consigue mediante las transformaciones de Gauss ya conocidas: sumando o restando ecuaciones hasta eliminar la incógnita x_1 de la ecuación segunda ($E2$) y las incógnitas x_1 y x_2 de la tercera ecuación ($E3$).

Estudiando la tercera ecuación resultante, $a''_{33}x_3=b''_3$, pueden determinarse las posibilidades de solución del sistema, pues:

- Si $a''_{33}\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

La incógnita x_3 puede despejarse; su valor se lleva a las otras dos ecuaciones y se obtienen los de x_2 y x_1.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3=0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

La tercera ecuación queda: $0x_3=0$, que se cumple para cualquier valor de x_3.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

La tercera ecuación quedaría: $0x_3\neq 0$, que es absurdo.

Observación: Como las ecuaciones pueden reordenarse, lo de menos es que el sistema quede triangular; lo importante es dejar una ecuación con una sola incógnita. A partir de esa ecuación se hará la discusión.

Ejemplos:

a) $$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ -2y+14z=4 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ 3E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ 28z=28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1 \to \begin{cases} x+y-3=2 \\ -3y+7=-8 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=5,\ x=0.$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \to \begin{matrix} E1 - E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x - 5y \quad = -3 \\ x + 4y + z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ x + 4y = 3 - z \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x - 5y = -3 \\ 9y = 6 - z \end{cases} \to \begin{cases} x - 5y = -3 \\ z = 6 - 9y \end{cases}$$

Haciendo *y* = *t*, se tiene: $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = \quad t \\ z = 6 - 9t \end{cases}$ $\to$ Para cada valor de *t* se tiene una solución.

Observación: Que un sistema sea compatible indeterminado significa que una de las ecuaciones es redundante, que depende linealmente de las otras. En definitiva, que faltan datos para concretar la solución; por eso se da en función de una de las incógnitas. En este ejemplo, las incógnitas *x* y *z* dependen del valor que se quiera dar a *y*.

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2 - 2E1 \\ E3 - 3E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ -4y + 3z = -1 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -4y + 3z = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}.$

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.

Observación: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

Ejemplo de discusión de un sistema con un parámetro mediante el método de Gauss

Clasifica, según los valores del parámetro *a*, el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y + z = 5 \\ 2x + 2y + (a^2 - 10)z = a \end{cases}$.

Resuélvelo, si es compatible, cuando *a* = 3.

Solución:

Aplicando transformaciones de Gauss se tiene:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y + z = 5 \\ 2x + 2y + (a^2 - 10)z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2y + 2z = 2 \\ (a^2 - 9)z = a - 3 \end{cases}$$

A partir de la tercera ecuación puede deducirse:

- Si $a^2 - 9 \neq 0$, (lo que implica que $a \neq -3$ y $a \neq 3$) $\to$ SCD.

Observa que si $a^2 - 9 \neq 0$ puede despejarse *z*, obteniéndose: $z = \dfrac{a-3}{a^2 - 9} = \dfrac{1}{a+3}$. El valor de las otras incógnitas se obtiene por sustitución.

- Si *a* = –3, quedaría $0 \cdot z = -6$, que es imposible. En este caso, el sistema es incompatible.
- Si *a* = 3, quedaría $0 \cdot z = 0$, que es cierto, pero se pierde una ecuación: SCI.

En este caso, el sistema queda $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3 + z \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$.

3.3. Solución mediante la matriz inversa

Si se definen las matrices: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, (matrices de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes), el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Si la matriz A es invertible ($|A| \neq 0$), la solución del sistema es $X = A^{-1}B$.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\quad -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases}$ puede escribirse matricialmente así: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa, que es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Con esto, la solución del sistema es: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$.

3.4. Regla de Cramer

Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero (matriz inversible), es más cómodo aplicar la regla de Cramer (Suiza, 1704–1752), cuya forma genérica, para sistemas 3 × 3, es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};\quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Ejemplo:

Para el sistema anterior: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\quad -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases}$ se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2-1}{-1} = 3;\quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1+3}{-1} = -4;\quad z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1-6}{-1} = 5.$$

4. Sistemas lineales en general. Teorema de Rouché (Francia, 1832–1910)

Para un sistema más grande, de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede generalizarse cualquiera de los métodos estudiados para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. No obstante, para su discusión es más eficaz aplicar el **teorema de Rouché,** que dice: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes (A) sea igual al rango de la matriz ampliada (M). Esto es: el sistema es compatible ⇔ rango de A = rango de M.*

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ambas matrices suelen escribirse juntas. Así: $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = M$.

Discusión:

- Si rango de A = rango de M = n = al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado: tiene una única solución.
- Si rango de A = rango de $M = r < n$, el sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones, con $n - r$ grados de libertad. Para resolverlo se prescinde de las ecuaciones sobrantes; además, hay que trasponer $n - r$ incógnitas al lado de los términos independientes. Las soluciones se dan en función de esas incógnitas traspuestas.
- Si rango de A < rango de M, el sistema es incompatible.

Ejemplo:

Para el sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de A es 2; pero el de M es 3, pues $|M| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5(-3+2) = -5 \neq 0$.

Como r(A) = 2 < r(M) = 3, el sistema es incompatible.

Observaciones:
1) Recuérdese que el rango de una matriz es igual al número de filas (o de columnas) linealmente independientes de esa matriz.
2) Las matrices *A* y *M* tienen las mismas filas; pero, como *M* tiene una columna más que *A*, esta matriz es un menor de *M*. En consecuencia, siempre se cumple que $r(A) \le r(M)$.
3) Si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$), el sistema será compatible indeterminado o incompatible.
4) Si hay más ecuaciones que incógnitas ($m > n$), al menos habrá $m - n$ ecuaciones sobrantes, que serán combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

a) Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+2z=3 \\ 4x+y+z=-2 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow$ r(*A*) = 3.

La matriz *M* tiene solo 3 filas, luego su rango no puede ser mayor que 3. Por tanto, r(*M*) = 3.
En consecuencia: r(*A*) = r(*M*) = 3 ⇒ el sistema es compatible determinado.
(Su solución se halla por cualquiera de los métodos estudiados. Es: $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$).

b) Para el sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas: $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=-1 \\ x+7y=1 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Ambas matrices tienen rango 2, pues $|M| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+7-2(2+1) = 0$.

Como r(*A*) = 2 = r(*M*) = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
Como hay más ecuaciones que incógnitas puede suprimirse una de ellas. En este caso puede ser cualquiera.
Por tanto:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=-1 \\ x+7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x+7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+7y=1 \end{cases}.$$

Para hallar su solución se resuelve cualquiera de los sistemas de dos ecuaciones equivalentes.

Puedes comprobar que la solución es: $x = -\frac{2}{5}$ e $y = \frac{1}{5}$.

c) Sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas: $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y-z-t=2 \\ 2x \qquad +z+t=0 \\ \quad 2y-z-t=3 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)=M$.

(En este caso, tanto el rango de *A* como el de *M* pueden llegar a valer 4.)

Transformando las matrices iniciales se obtiene:

$$\begin{array}{c} \to \\ F2+F1 \\ F3-F1 \\ F4+F1 \end{array} \quad A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)=M \Rightarrow \begin{array}{c} \to \\ F3+F4 \end{array} \quad A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)=M$$

Pueden suprimirse *F*3 y *C*4: Quedan las matrices $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)=M$.

Como el rango de *A* es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=4\neq 0$; y el de *M* no puede ser 4, se deduce que ambas tienen rango 3.

Al ser r(*A*) = r(*M*) = 3 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

Esto significa que sobra una de las ecuaciones, pero ¿cuál de ellas?

Sin entrar en detalle puede suprimirse la ecuación que se ha eliminado al calcular el rango (la *E*3); y también deducirse que la incógnita que debe pasarse al lado derecho es *t*, la correspondiente a la columna tachada.

Con esto, el sistema equivalente al inicial, es:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y-z-t=2 \\ \quad 2y-z-t=3 \end{cases} \Leftrightarrow (Gauss) \to \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+2y \qquad =3 \\ x+3y \qquad =4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1-t \\ 2x+2y \;=3 \\ x+3y \;=4 \end{cases}$$

d) Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

Las matrices asociadas son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)=M$.

Es evidente que ambas tienen rango 2, pues el menor marcado es distinto de 0. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo hay que dejar en los miembros de la izquierda el menor distinto de 0: esto es, hay que resolver $\begin{cases} y-z=2-x \\ y+z=\;-x \end{cases}$

5. Discusión de sistemas con un parámetro

Cuando alguno de los números (coeficientes o términos independientes) que figuran en un sistema no está determinado, se sustituye por una letra llamada parámetro. En estos casos hay que discutir para qué valor o valores del parámetro el sistema tiene solución o no. La discusión se realiza estudiando y comparando los rangos de las matrices de coeficientes, *A*, y ampliada, *M*. (Teorema de Rouché).

Ejemplos:

a) Clasificación y resolución en función del parámetro λ ∈ **R**, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}.$$

→ Las matrices *A* y *M*, de coeficientes y ampliada, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M$

El determinante de *A* es:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8).$$

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 8/3 → soluciones de $3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0$.

Con esto:

- Si λ ≠ 1 y 8/3 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado. Su solución, si se pide, debe darse en función del parámetro.

Por Cramer se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{6\lambda - 12 + 6}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{6(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{6}{3\lambda-8};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{-3\lambda - 2(5\lambda - 9) - 5}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{-13(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{-13}{3\lambda-8};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{3\lambda - 5 + 2}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{3(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{3}{3\lambda-8}.$$

- Si λ = 1, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$

El rango de *A* es 2. (Basta con observar que hay un menor de orden 2 distinto de 0).

Para ver el rango de M se calcula: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, el rango de M también vale 2.

Observación: No es necesario calcular más menores de M, pues si el rango de A vale 2 las columnas son dependientes y puede quitarse una de ellas, por ejemplo, $C1$; queda así un único menor de M: M_1. (Si dos de las columnas fuesen proporcionales, habría que prescindir, necesariamente, de una de ellas para calcular al rango de M).

En definitiva, si λ = 1, el sistema es compatible indeterminado.

Sustituyendo ese valor (λ = 1) en el sistema inicial, queda: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$.

(Como r(A) = r(M) = 2, sobra cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera, $E3$. Aunque no hace falta comprobar nada más, puede verse que $2E3 - E2 = E1$, luego podría suprimirse cualquiera de las ecuaciones).

Así pues, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3E1-E2 \\ \end{matrix}\begin{cases} -2x=6+6z \\ 5x+3y=-3z \end{cases} \to \begin{matrix} x=-3-3z \\ y=5+4z \end{matrix} \to \text{Haciendo } z = t\text{: } \begin{cases} x=-3-3t \\ y=5+4t \\ z=t \end{cases}.$$

- Si λ = 8/3, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M se calcula: $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 8/3 & 1 \end{vmatrix} = 10$. Por tanto, el rango de M vale 3.

Luego, si λ = 8/3 el sistema es incompatible.

Comentario: La discusión del sistema también podría hacerse a partir de la solución hallada por Cramer:

$$x = \frac{6(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{6}{3\lambda-8};\ y = \frac{-13(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{-13}{3\lambda-8};\ z = \frac{3(\lambda-1)}{(\lambda-1)(3\lambda-8)} = \frac{3}{3\lambda-8}.$$

Como el denominador, que es $|A| = (\lambda-1)(3\lambda-8)$, se anula cuando λ = 1 o λ = 8/3, se concluye:

- Si $\lambda \neq 1$ y 8/3, los valores de x, y, z pueden hallarse y son únicos en cada caso → SCD.
- Si λ = 8/3, las soluciones no están definidas (valen ∞): el sistema será incompatible.
- Si λ = 1, aunque tampoco están definidas (valen 0/0), al poder simplificar las tres incógnitas por el factor λ – 1, se advierte que para λ = 1 se puede seguir trabajando. En efecto, sustituyendo en las ecuaciones λ por el valor 1 se descubre que las ecuaciones son linealmente dependientes, y el sistema compatible indeterminado. Así se ha visto arriba.

Ejemplo b): Discute según los valores del parámetro *m* el sistema: $\begin{cases} mx - y + 3z = m \\ 2x + 4z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$.

→ Las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) = M \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4m - 6$.

Por tanto:

- si $m \neq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \to$ rango(A) = 3 ⇒ El sistema será compatible determinado.
- si $m = \frac{3}{2} \Rightarrow |A| = 0$ y el rango de *A* vale 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

En este caso, la matriz *M* queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -1 & 3 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) = M$.

Como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 3 \neq 0$, se deduce que el rango de *M* es 3.

En consecuencia, si $m = \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible, pues r(A) < r(M).

Ejemplo c): Discute según los valores del parámetro *a* el sistema: $\begin{cases} (a-3)y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$.

→ Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = a(-2a + 6 - 4) = a(2 - 2a) \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } a = 0 \text{ o } a = 1.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = M \to$

r(A) = 2.

Como $|M_1| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 4 \neq 0 \to$

r(M) = 3.

Luego, si *a* = 0, el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) = M \to$

r(A) = 2.

Como $|M_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to$ r(M) = 2.

Luego, si *a* = 1, el sistema es compatible indeterminado.

6. Sistemas homogéneos

6.1. Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales se llama homogéneo cuando el término independiente de cada una de las ecuaciones es 0. Por tanto, son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Estos sistemas siempre son compatibles, pues los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ son una solución del sistema; esa es la llamada **solución trivial**. También es evidente que la matriz M es la ampliación de A con una columna de ceros, lo cual no afecta al rango; luego r(A) = r(M).
- Si r(A) = n = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial.
- Si r(A) < n, el sistema será compatible indeterminado. El sistema homogéneo tendrá infinitas soluciones. En el caso de que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas deberá cumplirse que $|A| = 0$.

Ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y \quad = 0 \end{cases}$ sólo tiene la solución trivial, x = 0, y = 0, z = 0, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

b) El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado, pues el determinante de la matriz de coeficientes, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r(A) = 2 < el número de incógnitas.

El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z \\ x + y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$.

Algunas soluciones de este sistema son: (0, 0, 0), (3, –5, 1), (–3, 5, –1), ...; naturalmente siempre está la solución (0, 0, 0).

c) El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ es compatible indeterminado.

Compatible porque es homogéneo; indeterminado porque tiene menos ecuaciones que incógnitas. (Su solución es: $x = t$, $y = t$, $z = 0$).

6.2. Discusión de un sistema homogéneo con un parámetro

Como se ha dicho anteriormente, los sistemas homogéneos siempre tienen solución. Por tanto, la discusión de estos sistemas consiste en determinar cuando tienen sólo la solución trivial y cuando tienen infinitas soluciones.

Ejemplos:

a) Discusión, según los valores del parámetro a, del sistema: $\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$

→ Resulta obvio que el sistema es homogéneo. La matriz de coeficientes,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3(1-2a) = 0 \text{ si } a = 1/2$$

Por tanto:

- Si $a \neq 1/2$, r(A) = 3, sistema compatible determinado. La única solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
- Si $a = 1/2$, r(A) = 2. El sistema es compatible indeterminado, equivalente a

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ z=-3y \end{cases}, \text{ cuya solución puede darse como: } \begin{cases} x=6t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$$

b) Discusión y resolución, dependiendo de los valores de λ, del sistema $\begin{cases} (2-\lambda)x+y \quad\quad =0 \\ \quad (-1-\lambda)y+z=0 \\ \quad 4y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$.

→ El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \Rightarrow \text{Se anula si } \lambda = -2,\ \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 3.$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq -2$, 2 y 3, el rango de A es 3 y el sistema compatible determinado. Su solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- Si $\lambda = -2$, el sistema queda $\begin{cases} 4x+y=0 \\ y+z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-4t \\ z=4t \end{cases}$.
- Si $\lambda = 2$, el sistema queda $\begin{cases} y=0 \\ -3y+z=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

(Como nada se dice de x, esta queda indeterminada).

- Si $\lambda = 3$, el sistema queda $\begin{cases} -x+y=0 \\ -4y+z=0 \\ 4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$ La solución del sistema es $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$.

7. Problemas de sistemas

Como en cualquier problema, en los que dan lugar a un sistema de ecuaciones, el proceso a seguir puede ser:

1) Leerlo despacio y entenderlo (también el significado de las palabras del enunciado).
2) Definir las incógnitas.
3) Descubrir los datos y las relaciones algebraicas entre las incógnitas y los datos: escribir las ecuaciones.
4) Expresar esas ecuaciones en la forma estándar y discutir y resolver el sistema obtenido.

→ A continuación se proponen cuatro problemas aparentemente fáciles (y así son). Se sugiere al lector interesado que los procure resolver por su cuenta, que no se contente con estudiarlos y entenderlos, pues eso resulta demasiado fácil.

Problema 1. Desayuno.
Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Solución:
Sean *x*, *y*, *z* los precios de un café, un refresco y un dulce, respectivamente.

Grupo 1: $2x + y + 3z = 8{,}40$

Grupo 2: $4x + y + 5z = 13{,}80$

Grupo 3: $x + 2y + 2z = 7{,}50$

Se obtiene un sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8{,}40 \\ 4x + y + 5z = 13{,}80 \\ x + 2y + 2z = 7{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 3z = 8{,}40 \\ 2x + 2z = 5{,}40 \\ -3x - 4z = -9{,}30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 + 2E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 3z = 8{,}40 \\ 2x + 2z = 5{,}40 \\ x = 1{,}50 \end{cases}$$

Si $x = 1{,}50 \Rightarrow z = 1{,}20$; $y = 1{,}80$.
Un café cuesta 1,50 €; un refresco, 1,80 €; un dulce, 1,20 €.

Problema 2. Mezclas. (Propuesto en Selectividad en 1998, Canarias)
Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:
a) 5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.
b) 1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.
c) 3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.
Halla el precio por litro de cada clase de vino.

Solución:
Sean *x*, *y*, *z* el precio del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote, respectivamente.
Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y + 3z = 120 \cdot 14 \\ x + 3y + 6z = 111 \cdot 10 \\ 3x + 6y + 6z = 116 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6y + 3z = 1680 \\ x + 3y + 6z = 1110 \\ 3x + 6y + 6z = 1740 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - 2E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 5x + 6y + 3z = 1680 \\ -9x - 9y = -2250 \\ -7x - 6y = -1620 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 9E3 - 7E2 \end{matrix} \begin{cases} 5x + 6y + 3z = 1680 \\ -9x - 9y = -2250 \\ 9y = 1170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \to z = 100 \\ \to x = 120 \\ y = 130 \end{cases}.$$

Los precios de los vinos son: Tenerife, 120 pta/l; La Palma, 130 pta/l; Lanzarote, 100 pta/l.

Problema 3. Trabajadores.
Entre españoles, europeos no españoles (UE) y extracomunitarios, hay un total de 250 trabajadores en una empresa. Si el número de extracomunitarios se triplicase habría 330 trabajadores en la empresa y si se duplicase el número de españoles y se redujese a la mitad el número de europeos, habría 325.
Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita determinar cuántos trabajadores hay de cada grupo.
Solución:
Si el número de trabajadores españoles es *x*; el de europeos no españoles, *y*; y el de extracomunitarios, *z*, se debe cumplir:

$$\begin{cases} x+y+z=250 \\ x+y+3z=330 \\ 2x+\dfrac{y}{2}+z=325 \end{cases} \to \text{El sistema es equivalente a } \begin{cases} x+y+z=250 \\ x+y+3z=330 \\ 4x+y+2z=650 \end{cases}.$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=250 \\ x+y+3z=330 \\ 4x+y+2z=650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=250 \\ 2z=80 \\ 3x+z=400 \end{cases} \Rightarrow z=40.$$

Sustituyendo en las otras ecuaciones queda:

$3x + 40 = 400 \Rightarrow x = 120$;

$120 + y + 40 = 250 \Rightarrow y = 90$.

Hay 120 trabajadores españoles, 90 europeos no españoles y 40 extracomunitarios.

Problema 4. Números.
Dado un número de tres cifras *ABC*, se sabe que la suma de sus cifras es 18. Por otra parte, si permutamos las decenas con las unidades, obtenemos el número inicial disminuido en 45. Sabiendo que la cifra de las decenas es igual a la suma de las unidades y centenas, plantea un sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número
Solución:
En número $ABC = A$ centenas + B decenas + C unidades = $100A + 10B + C$.
Se sabe que la suma de sus cifras es 18: $A + B + C = 18$
Si se permutan las decenas con las unidades: $ABC \to ACB$: el número disminuye en 45; luego se cumple: $ABC = ACB + 45$.
Por tanto:

$100A + 10B + C = 100A + 10C + B + 45 \Rightarrow 9B - 9C = 45 \Leftrightarrow B - C = 5$

Como la cifra de las decenas es igual a la suma de las unidades y centenas: $B = A + C$.
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=18 \\ B-C=5 \\ B=A+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=18 \\ B-C=5 \\ A-B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} A+B+C=18 \\ C=B-5 \\ -2B=-18 \end{cases}.$$

Despejando *B* en la tercera ecuación y sustituyendo en las demás ecuaciones se tiene:

$B = 9$; $C = 9 - 5 = 4$; $A+9+4=18 \Rightarrow A=5$.

El número dado es el 594.

8. Ejercicios finales

Se proponen a continuación una serie de problemas diversos para que el estudiante pueda practicar y comprobar su nivel de conocimientos. Como siempre, se advierte que no se trata de estudiar los problemas: deben hacerse personalmente.

Ejercicio 1.

Expresa la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ en forma de sistema; y resuélvelo.

Solución:

Operando:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x-2y \\ -2x+2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2y=-10 \\ -2x+2y=6 \\ y+z=3 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases} 4x+2y=-10 \\ -2x+2y=6 \end{cases} \Rightarrow \overset{E1-E2}{} \begin{cases} 6x=-16 \\ -2x+2y=6 \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{8}{3}; y=\dfrac{1}{3}$.

Sustituyendo en $E3$, $\dfrac{1}{3}+z=3 \Rightarrow z=\dfrac{8}{3}$.

Ejercicio 2.

Estudia, en función de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-my=m \end{cases}$.

Resuélvelo utilizando la regla de Cramer cuando $m = 3$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -m & m \end{array}\right) = M$.

Como $|A| = -m-1 = 0$ si $m = -1$, se tendrá:

- Si $m \neq -1$, r(A) = r(M) = 2 $\Rightarrow$ SCD.
- Si $m = -1$, $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(A) = 1 y r(M) = 1 $\Rightarrow$ SCI.

Para $m = 3$, el sistema queda $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-3y=3 \end{cases}$.

Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-4} = 0 \,;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-4} = -1 .$$

Ejercicio 3.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ k & 0 & 3\end{pmatrix}$ y el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 9\end{pmatrix}$.

a) Halla el rango de A según los valores del parámetro real k.
b) Clasifica según los valores de k el sistema.
c) Resuélvelo para $k = 0$.
d) Resuélvelo, si es posible, cuando $k = 1$.

<u>Solución</u>:

a) El rango de A es 3 cuando $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ k & 0 & 3\end{vmatrix}=3k-3+k-k^2=-k^2+4k-3 \ \to\ -k^2+4k-3=0 \Rightarrow k=1 \text{ o } k=3.$$

En consecuencia:

- Si $k \neq 1$ y 3, $|A|\neq 0$ y el rango de A es 3.
- Si $k = 1$, la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ tiene rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$.
- Si $k = 3$, la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ también tiene rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$.

b) El sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 9\end{pmatrix}$ es equivalente a $\begin{cases}x+y+z=3\\ x+ky+z=3\\ kx+3z=9\end{cases}$.

Puede discutirse aplicando el teorema de Rouché: el sistema es compatible si r(A) = r(M).

Estas matrices, de coeficientes y ampliada, son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & k & 1 & 3\\ k & 0 & 3 & 9\end{array}\right)=M$

- Si $k \neq 1$ y 3, como $|A|\neq 0$ es evidente que r(A) = r(M) = 3; por tanto, el sistema será compatible determinado.
- Si $k = 1$, la matriz ampliada es $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3 & 9\end{pmatrix}$. Como la cuarta columna es proporcional a la tercera no varía el rango de A. (También pueden verse dos filas repetidas). En consecuencia, el sistema será compatible indeterminado: r(A) = r(M) = 2.
- Si $k = 3$, la matriz ampliada es $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 3 & 9\end{pmatrix}$ y la situación es similar a la anterior.

(Las columnas 1º, 3ª y 4ª son proporcionales): r(A) = r(M) = 2 → SCI.

b) Para k = 0 el sistema es: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=3 \\ 3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \to 0+y+3=3 \Rightarrow y=0 \\ x+z=3 \to x+3=3 \Rightarrow x=0 \\ z=3 \end{cases}$.

Solución: x = 0, y = 0, z = 3.

c) Si k = 1, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x+3z=9 \end{matrix}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3-z \\ x=9-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-(9-3z)+3-z \\ x=9-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9-3t \\ y=-6+2t \\ z=t \end{cases}.$$

Ejercicio 4.

a) Clasifica, en función de a y aplicando el método de Gauss, el sistema $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+az=7 \end{cases}$.

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.
c) Resuélvelo cuando a = 3.
<u>Solución</u>:
a) Se aplican las transformaciones de Gauss que se indican.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+az=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ 2y+(a-2)z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ (a-4)z=0 \end{cases}$$

Atendiendo a la tercera ecuación se observa que:

• Si a = 4, el sistema resulta compatible indeterminado, pues queda la ecuación $0 \cdot z = 0$, que se pierde: sería un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas.

• Si $a \neq 4$, el sistema resulta compatible determinado. En cada caso, la solución se halla despejando en la tercera ecuación y sustituyendo en las otras dos. Así:

b) Para a = 4, (SCI), el sistema equivalente es $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \end{cases}$.

Haciendo $z = t$, despejando y sustituyendo, se obtiene:

$$\begin{cases} x=3-y-2z \to x=3-(2-t)-2t=1-t \\ y=2-z \to y=2-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$$

c) Para a = 3 el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ -z=0 \end{cases}$.

Se resuelve por sustitución de abajo arriba:

$$\begin{cases} x=3-y-2z \to x=1 \\ y=2-z \to y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

Ejercicio 5.

Clasifica, dependiendo de los valores de λ, el sistema homogéneo $\begin{cases}(3-\lambda)x - y = 0\\ -x+(2-\lambda)y - z = 0\\ -y+(3-\lambda)z = 0\end{cases}$.

Resuélvelo en los casos λ = –4 y λ = 4.

Solución:

Como es un sistema homogéneo siempre será compatible. Para ver si es determinado o indeterminado se hace el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)[(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)-1]-(3-\lambda) = \rightarrow \text{(factor común)}$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)-2] = (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4).$$

Por tanto, $|A| = 0$ si λ = 3, λ = 1 o λ = 4. Para esos valores de λ el sistema será compatible indeterminado. (En los demás casos, la única solución será la trivial).

- Si λ = –4 (SCD) la única solución es la trivial: x = 0; y = 0; z = 0.
- Si λ = 4, queda $\begin{cases}-x-y=0\\ -x-2y-z=0\\ -y-z=0\end{cases} \rightarrow$ Puede observarse que $E2 = E1 + E3 \Rightarrow \begin{cases}x=-t\\ y=t\\ z=-t\end{cases}$.

Ejercicio 6. (Propuesto en Selectividad en 2011, Castilla-León)

Discute según los valores de m y resuelve cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}mx+y=2\\ x+my=m\\ x+y=2\end{cases}$.

Solución:

Es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para que tenga solución es necesario que el rango de la matriz ampliada sea menor que 3.

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 2\\ 1 & m & m\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2-(2-m)+2(1-m)=0 \Rightarrow m^2-m=0 \Rightarrow m = 0 \text{ o } m = 1.$$

Luego, el sistema puede tener solución cuando m = 0 o m = 1.

- Si m = 0, el sistema es $\begin{cases}y=2\\ x=0\\ x+y=2\end{cases}$. Su solución, inmediata, es x = 0; y = 2.
- Si m = 1, el sistema es $\begin{cases}x+y=2\\ x+y=1\\ x+y=2\end{cases}$. Evidentemente es incompatible: sus ecuaciones son contradictorias.

Por tanto, el sistema sólo es compatible si m = 0.

Problemas propuestos

Clasificación y resolución de sistemas por métodos elementales

1. Resuelve utilizando el método de de reducción de Gauss, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

2. Resuelve utilizando el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$

3. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

4. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases}$

5. Aplicando la regla de Cramer halla la solución general, en función del parámetro *m*, del sistema

$$\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases} .$$

6. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas. Cuando exista, da su solución.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

7. Para qué valor de *m* tendrá solución el sistema:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases}$

8. Expresa en la forma matricial $AX = B$ el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = 1 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Resuélvelo calculado la matriz inversa de *A* y despejando *X*.

9. Resuelve el sistema $(AB)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Sistemas con un parámetro. Aplicación del teorema de Rouché

10. Estudia, en función del valor de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$.

Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones, y da un par de esas soluciones.

11. Resuelve el sistema $\begin{cases} kx + y + (k+1)z = 0 \\ \quad ky + (k+1)z = 0 \\ x \qquad + 2z = 1 \end{cases}$ para los valores de *k* que lo hagan compatible.

12. Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx \quad + 2z = 0 \\ \quad ky - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

Resuélvelo para el valor de *k* = 2.

13. a) Discute en función de los valores de *a* el sistema $\begin{cases} x \ + 2y \quad - z = 2 \\ x + (1+a)y - az = 2a \\ x + ay + (1+a)z = 1 \end{cases}$.

b) Si es el posible, resuélvelo cuando *a* = –1 y cuando *a* = 1.

14. a) Halla, si existen, los valores del parámetro *a* para que el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = -a \\ 4x + 10y = a^2 \end{cases}$ sea compatible determinado.

b) Resuélvelo, si es posible, para *a* = – 2 y para *a* = 2.

15. a) Discute en función de los valores de *a* el sistema $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$.

b) Resuélvelo para el caso *a* = 0**.**

16. (Propuesto en Selectividad 1999, Madrid)
Estudia el siguiente sistema lineal, según los diferentes valores del parámetro real a. En los casos en que sea compatible, resuélvelo.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

17. (Propuesto en Selectividad 2001, La Rioja)
Estudia, según los valores de m, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+my+3z=3 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases}.$$

Sistemas homogéneos

18. Halla el valor de k para que el sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$ tenga solución distinta de la trivial. Para dicho valor de k, calcula sus soluciones.

19. Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.
a) Halla sus soluciones.
b) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo homogéneo y tenga solución única.
c) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo compatible indeterminado.

20. Discute y resuelve, en función de los valores de k, el sistema

$$\begin{cases} kx+(1-k)y+(2-k)z=0 \\ x+y+z=0 \\ kx+y+kz=0 \end{cases}.$$

21. Discute, según los valores del parámetro k, el sistema: $\begin{cases} (1+k)x-2y+4z=0 \\ x-(1-k)y+z=0 \\ x+ky+z=0 \end{cases}$.
Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

22. Discute, según los valores del parámetro a, el sistema $\begin{cases} x+2z=0 \\ x-3y+az=0 \\ ax+z=0 \end{cases}$.
Resuélvelo en los casos en que sea compatible, resolverlo.

Problemas con enunciado

23. (Propuesto en Selectividad 2009, Castilla y León)
El dueño de un supermercado ha comprado embutido, bebidas y conservas, por un importe total de 4600 €. El valor de las conservas es el mismo que el de las bebidas y embutidos juntos. Si vende todos estos productos, añadiendo un beneficio del 10 % en el embutido, el 20 % en las bebidas y el 15 % en las conservas, obtendrá un importe total de 5305 €. Calcula lo que pagó por cada uno de ellos.

24. (Propuesto en Selectividad 2010, País Vasco)
En la exposición de un establecimiento de material de oficina hay 400 unidades, entre lámparas, sillas y mesas, con un valor total de 15000 €. Si el valor de una lámpara es de 16 €, el de una silla 50 € y el de una mesa 80 €, y, además, hay tantas lámparas como sillas y mesas juntas, ¿cuántas lámparas, sillas y mesas hay en la exposición?

25. Halla las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 9 años la edad de la madre era 4 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 18 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

26. Encuentra la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica pasa por los puntos (1, 2), (2, 1) y (3, 4).

27. Se desea preparar una dieta partiendo de tres alimentos básicos, [1], [2] y [3]. La dieta debe incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades de cada ingrediente por cada paquete de alimentos se indica en la tabla adjunta. ¿Cuántos paquetes de cada alimento deben emplearse para conseguir la dieta requerida?

	Unidades por paquete		
Alimento	[1]	[2]	[3]
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

28. Una persona dispone de 21000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 5, 6 y 10 %, respectivamente. El inversor quiere invertir en acciones el doble que en bonos, y conseguir una rentabilidad media del 7 %. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?

29. Una persona decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello el inversor ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determina cuánto invirtió en cada una de las empresas.

30. (Propuesto en Selectividad 2015, Asturias)
Luis tiene ahora mismo *m* veces la edad de Javier. Dentro de *m* años, Luis tendría el triple de años que Javier.
a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean la edad de Luis y de Javier, respectivamente. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que Luis tenga ahora mismo el triple de años que Javier?
b) Resuelve el sistema para *m* = 5. ¿Cuántos años tiene Luis en este caso?

31. (Propuesto en Selectividad, Cataluña, septiembre 16)
María tiene el doble de dinero que Pol y Júlia juntos. Pol tiene la sexta parte de dinero que María. Júlia tiene el doble de dinero que Pol. María tiene el triple de dinero que Júlia.
a) Con estos datos, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno de ellos? Halle el conjunto de soluciones posibles.
b) Si Pol tiene 35 €, ¿cuánto dinero tienen María y Júlia?

32. (Propuesto en Selectividad, Castilla La Mancha, septiembre 16)
He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubieras pagado 32 euros.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

33. (Propuesto en Selectividad en 2000, Andalucía)
Dado un número de tres cifras *ABC*, se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si se permutan las centenas con las unidades, se obtiene el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial se permutan decenas con unidades, se obtiene el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número.

Soluciones

1. a) $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$.

2. a) $\begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$. b) Incompatible.

3. a) Si m = 10, $\begin{cases} x=3t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases}$; si $m \neq 10$, $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$. b) Si m = –4, $\begin{cases} x=-2/3-t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases}$; si $m \neq 4$, incompatible.

4. a) Si m = 1, incompatible. Si $m \neq 1$: $x=\dfrac{-m-1}{m-1}$; $y=\dfrac{-2}{m-1}$; $z=\dfrac{2m}{m-1}$.
b) Si m = 0, incompatible. Si $m \neq 0$: $x=\dfrac{-3m+2}{m}$; $y=\dfrac{1}{m}$; $z=\dfrac{2m-1}{m}$.

5. $x=\dfrac{1+m}{1-m}$; $y=\dfrac{2}{1-m}$; $z=\dfrac{-2m}{1-m}$.

6. a) x = 2; y = 3. b) Incompatible.

7. a) $m=2$. b) m = 7.

8. $A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $x=1$; $y=-\dfrac{1}{3}$.

9. $\begin{cases} x=-7-14t \\ y=2+4t \\ z=t \end{cases}$.

10. Si $m \neq 4$, SCD. Si m = 4, $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$.

11. Siempre compatible: $x=\dfrac{1-k^2}{k^2+1}$; $y=\dfrac{-k^2-k}{k^2+1}$; $z=\dfrac{k^2}{k^2+1}$.

12. Si $k \neq 0$, –1, SCD. Si k = 0, SCI. Si k = –1, SIN. Para k = 2: x = –4/3; y = 5/3; z = 4/3.

13. a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, SCD. Si $a = 0$, incompatible. Si $a = 1$, compatible indeterminado.

d) Para $a = -1$, $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -5/2 \end{cases}$. Para $a = 1$, $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

14. a) Si $a \neq -1$ y 3: SIN. Si $a = -2$ o $a = 3$, SCD. b) $x = 1$; $y = 0$. SIN.

15. a) Si $a \neq 1$ y -2, SCD; Si $a = 1$, SCI; Si $a = -2$, SIN. b) $x = -1/2$; $y = 1/2$; $z = 1/2$.

16. Si $a = 0$, compatible indeterminado. Si $a \neq 0$, incompatible. Para $a = 0$: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

17. Si $m \neq \dfrac{29}{6}$, incompatible. Si $m = \dfrac{29}{6}$: $x = \dfrac{-13}{17}$; $y = \dfrac{12}{17}$; $z = \dfrac{2}{17}$.

18. $k = -1$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

19. a) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. b) $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. c) $y + 2z = 0$.

20. Si $k \neq 1$, SCD: $x = y = z = 0$. Si $k = 1$: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$.

21. Si $k \neq 3$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Para $k = 3$: $\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

22. Si $a \neq 1/2$, SCD. Si $a = 1/2$: $\begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

23. 1000, 1300, 2300 €.
24. 200, 140, 60.
25. 45, 15, 12 años.
26. $y = 2x^2 - 7x + 7$.
27. 8 paquetes del [1], 2 paquetes del [2] y 4 paquetes del [3].
28. 3000 € en bonos; 12000 € en fondos; 6000 € en acciones.
29. 8000, 2750, 1250 €.
30. No; 25 y 5.
31. a) No. b) Pol, 35 €; Júlia, 70 €; María, 210 €.
32. b) 6; 16; 10.
33. 385.