Tema 5. Límites y continuidad de funciones

1. Límite de una función en un punto

1.1. Idea inicial

Si una función *f* está definida para todos los valores de *x* próximos a *a*, aunque no necesariamente en el mismo *a*, entonces, se dice que el límite de $f(x)$ vale *l*, cuando *x* tiende a *a*, si el valor de $f(x)$ se aproxima a *l* cuando *x* se aproxima a *a*.

Se escribe así: $\lim_{x\to a} f(x) = l$. (También $f(x) \to l$, cuando $x \to a$).

Si una función $f(x)$ no tiende a ningún número concreto, cuando *x* tiende a *a*, se dice que no tiene límite cuando *x* tiende a *a*.

Ejemplos:

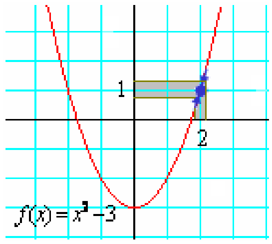
Usando la calculadora puede estudiarse el límite, cuando *x* tiende a 2, de las funciones

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $g(x) = ENT[x]$ c) $h(x) = \dfrac{3}{x-2}$ d) $i(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

Para ello, en todos los casos, se darán a *x* valores próximos a 2 y se calcularán los valores que toma la respectiva función.

a) Para $f(x) = x^2 - 3$:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	0,61	0,9601	0,996001	$\to 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41



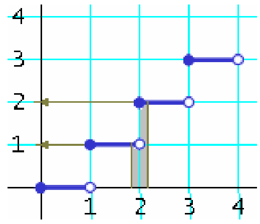
Tanto para valores menores que 2 como para mayores que 2 (en ambos casos próximos a 2), la función toma valores muy próximos a 1.

En este caso se escribe, $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3) = 1$.

Observa que la función está definida en *x* = 2 y que el límite coincide con *f*(2).

b) Para $g(x) = ENT[x]$ (La parte entera de *x* se define como el número entero inmediatamente menor o igual a *x*).

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$g(x)$	1	1	1	$\to$ ¿? $\leftarrow$	2	2	2



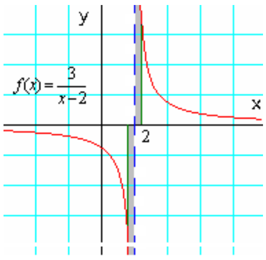
Para valores cercanos y menores que 2, la función toma siempre el valor 1; para valores cercanos y mayores que 2, siempre vale 2.

En este caso, $\lim_{x\to 2} ENT[x]$ no existe.

Observa que la función está definida en *x* = 2 y sin embargo no tiene límite en ese punto.

c) Para $h(x) = \dfrac{3}{x-2}$:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$h(x)$	–30	–300	–3000	$\to$ ¿? $\leftarrow$	3000	300	30

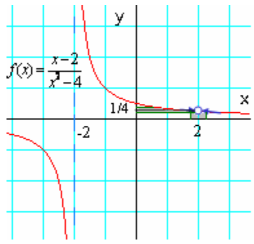


Para valores cercanos y menores que 2, la función toma valores grandes y negativos; para valores cercanos y mayores que 2, la función toma valores cada vez más grandes. En este caso, $\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}$ no existe.

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y que tampoco tiene límite en ese punto.

d) Para $i(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$:

		$x\to 2^-$				$2^+\leftarrow x$	
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$i(x)$	0,2564	0,2506	0,25006	$\to 0{,}25 \leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439



Para valores próximos y menores que 2, la función se acerca cada vez más a 0,25; y lo mismo hace para valores próximos y mayores que 2.

En este caso, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=0{,}25$.

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y sin embargo tiene límite en ese punto.

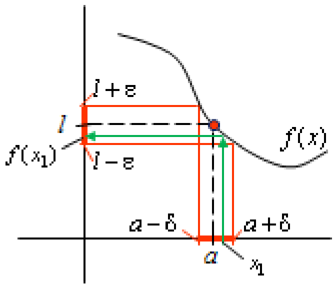
1.2. Definición de límite de una función en un punto (Optativo)

A la vista de los ejemplos anteriores, se concluye:

1) Para la existencia del límite de una función en un punto *a* no importa que la función esté o no definida en ese punto.

2) Lo que importa son los valores que toma la función en un entorno de ese punto *a*.

3) Existirá el límite, y su valor será *l*, cuando todos los puntos próximos a *a* se transformen, mediante la función, en puntos próximos a *l*. Esto es, si x_1 está cerca de *a*, entonces $f(x_1)$ está cerca de *l*. (Véase la figura adjunta).



Con más precisión:

4) Existirá el límite de $f(x)$, cuando $x\to a$, y su valor será *l*, si para cualquier entorno de *l*, $E_\varepsilon(l)$, puede encontrarse otro entorno de *a*, $E_\delta(a)$, de manera que todos los valores de $x\in E_\delta(a)$ se transformen, mediante $f(x)$, en puntos de $E_\varepsilon(l)$.

O con símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0 \;|\; \forall\, x, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Esta expresión se lee así: "límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a *a* es igual a *l*", equivale a decir que "para todo número épsilon mayor que cero, existe un número delta, también mayor que 0, tal que para todo *x* que cumpla que su diferencia con *a*, en valor absoluto, sea mayor que 0 y menor que delta, se cumple que la diferencia entre $f(x)$ y *l*, también en valor absoluto, es menor que el número épsilon elegido".

La condición, $0<|x-a|$, indica que *x* no toma el valor *a*, pues en tal caso $x – a = 0$.

La condición, $|x-a|<\delta$, indica que $x\in E_\delta(a)$.

La conclusión, $|f(x)-l|<\varepsilon$, significa que $f(x)\in E_\varepsilon(l)$.

1.3. Límites laterales

En la definición de límite no se distingue entre las posibilidades $x < a$ o $x > a$, pues al escribir $0 < |x - a| < \delta$ resulta indiferente: lo único que se pide es que x esté próximo a a.

No obstante, algunas veces conviene distinguir si $x \to a$ por la izquierda (siendo $x < a$), que se escribe $x \to a^-$; o si $x \to a$ por la derecha (siendo $x > a$), denotado por $x \to a^+$.

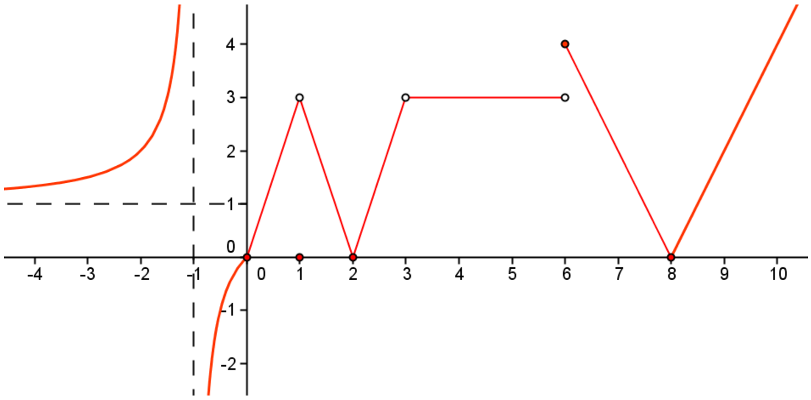
Esta distinción da lugar al estudio de los límites laterales.

- A $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda.
- A $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ se le llama límite lateral por la derecha.

$\to$ Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los límites laterales y que sean iguales.
Esto es, para que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

<u>Observación:</u>
Este estudio tiene interés cuando la función:
1) Está definida a trozos y se quiere calcular el límite en alguno de los puntos de unión de los diferentes trozos.
2) Tiene asíntotas verticales y se quiere determinar la posición de la curva respecto a ellas.

Ejemplo:
Si la función $f(x)$ es la dada por la gráfica siguiente, para los puntos que se indicarán, se cumple:



a) En $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe. No obstante, puede escribirse:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$. Por la derecha: $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

Puede observarse que la recta $x = -1$ es asíntota vertical de la curva.

b) En $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$. Tanto por la izquierda como por la derecha la función se acerca a 3; aunque $f(1) = 0$. (Recuerda que en el límite lo que importa es lo sucede en el entorno del punto, no lo que sucede en el punto).

c) En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$. Aunque $f(3)$ no está definida, los límites laterales tienden a 3.

d) En $x = 6$: $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$ no existe. Por la izquierda tiende de a 3; por la derecha, a 4.

$\to$ En cualquier otro punto el límite coincide con su valor de definición.
$\to$ También puede apuntarse que:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$. La recta $y = 1$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$.

2. Cálculo práctico de límites

2.1. Casos inmediatos

Si $f(x)$ es una función usual (polinómicas, racionales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto $x = a$, *suele cumplirse* que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto es, el límite se resuelve sustituyendo.

Observaciones:
1) Que la función pueda evaluarse en $x = a$ no es determinante para que exista el límite (no es ni necesario ni suficiente), como se vio con la función $g(x) = ENT[x]$, pero este es un caso de función definida a trozos, que debe ser estudiado mediante límites laterales.
2) No obstante, lo primero que debe hacerse para calcular un límite es sustituir x por a: hallar $f(a)$. Si existe $f(a)$ y la función no está definida a trozos, se aceptará que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
3) Como el lector sabrá, las funciones que cumplen que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, se llaman continuas. Se estudiarán más adelante.

Ejemplos:
Lo dicho puede comprobarse en los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3) = 2^2-3 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2+1}{2-1} = 3$.

c) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x^2-1} = \sqrt{2\cdot 5^2-1} = \sqrt{49} = 7$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}(\ln(x^2-2)) = \ln(3^2-2) = \ln 7$.

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-2} = \dfrac{0}{2} = 0$.

g) Esto no es así en el caso $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$, pues $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = -1$.

2.2. Algunas propiedades de las operaciones con límites

En relación con las operaciones algebraicas pueden aplicarse las siguientes propiedades.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, con A y B finitos, entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$;

4) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)} = A^B$;

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(\log_b f(x)\right) = \log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) = \log_b A$.

1) El límite de una suma es igual a la suma de los límites.

2) El límite de un producto es igual al producto de los límites.

3) El límite de un cociente es igual al cociente de los límites.

4) El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.

5) El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

Estas propiedades se aplican en ambos sentidos (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), según convenga.

3. Indeterminaciones: Resolución

Hay siete casos en los que al sustituir el valor $x = a$ en la función dada se llega a situaciones extrañas, no definidas, que reciben el nombre de indeterminaciones: formas indeterminadas. Escritas esquemáticamente, estas 7 indeterminaciones son:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0\cdot\infty] \quad [\infty-\infty] \quad [1^{\infty}] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

Observaciones:
1) Cuando en estas expresiones se escribe 0 se quiere significar que se está ante un valor tan pequeño como se quiera (infinitesimal). El concepto matemático que lo define es el de infinitésimo. Así, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Por tanto, la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ es el cociente de dos infinitésimos. Surge si se plantea un límite como el siguiente: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$; esto es, cuando $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en el punto $x = a$.

Igualmente, en las demás indeterminaciones, cada vez que se escribe 0 se está diciendo que la función es un infinitésimo en el punto en cuestión.
2) Análogamente, cuando se escribe 1 se quiere indicar una expresión que tiende a 1, que toma los valores 0,999… o 1,000…, sin que necesariamente tome nunca el valor 1.
3) Por último, cuando se escribe ∞ se quiere significar que la expresión toma valores tan grandes como se quiera: mayores (en valor absoluto) que cualquier número dado.

Ejemplos:
En los límites siguientes, al sustituir, aparecen las formas que se indican.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$. b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\cdot e^{x-2}\right) = [0\cdot\infty]$.

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}\right) = [\infty-\infty]$. e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = [1^{\infty}]$. f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = [0^0]$.

- Algunas veces estas formas indeterminadas pueden resolverse. Los métodos de resolución que emplearemos aquí son básicamente algebraicos, que consisten en aplicar las propiedades de las operaciones con límites y, cuando estas sean insuficientes, recurrir a transformaciones algebraicas en la función dada: simplificar, extraer factor común, sumar o restar, operar con potencias y raíces, con logaritmos…

Por ejemplo, restando las fracciones en límite d) anterior se obtiene:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{x}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{x}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{x^2-9}-\frac{x}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x^2-9}\right).$$

La indeterminación inicial, que era del tipo ∞ – ∞, ha pasado a la forma $\frac{3}{0}$, que no es indeterminada.

- **Resolución de algunas indeterminaciones**

A continuación se aplicarán métodos algebraicos para resolver, en algunos casos, las siguientes formas indeterminadas: $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$ y $[1^{\infty}]$.

→ Antes de continuar conviene aclarar (recordar) algunas operaciones con el número 0 y con el infinito. (En lo que sigue: k es un número fijo; k o $+k$ indica que es positivo; $-k$, negativo; y cuando se escribe ∞ sin signo, se supone positivo).

Con el 0 (recuerda que, aquí, 0 significa infinitesimal):

$0\cdot(\pm k) = 0$; $\frac{0}{\pm k} = 0$; $\frac{\pm k}{0} = \pm\infty$; $\left[\frac{0}{0}\right]$ es indeterminado.

$(\pm k)^0 = 1$; $0^{+k} = 0$; $0^{-k} = \frac{1}{0^{+k}} = \frac{1}{0} = \infty$; $\left[0^0\right]$ es indeterminado.

Con ∞:

$\pm\infty \pm k = \pm\infty$; $\infty + \infty = \infty$; $-\infty - \infty = -\infty$; $[\infty - \infty]$ es indeterminado.

$\pm k\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$; $\infty\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$; $\frac{\infty}{\pm k} = \pm\infty$; $\frac{\pm k}{\pm\infty} = 0$;

$(\pm\infty)^{+k} = \pm\infty$; $(\pm\infty)^{-k} = \frac{1}{(\pm\infty)^k} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ es indeterminado.

3.1. Límites de funciones racionales cuando $x \to a$. Indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

El único caso de límite no inmediato es cuando da lugar a la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$. Esto es, cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, pues $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Este caso puede resolverse simplificando la expresión inicial, ya que si $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, se verifica que $P(x) = (x-a)P_1(x)$ y $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$, de donde el cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Luego: $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}P_1(x)}{\cancel{(x-a)}Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Si el último límite no resulta inmediato se aplica nuevamente la regla anterior.

Observación: El teorema del factor dice: Para un polinomio $P(x)$, si $P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a$ es un factor de $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-a)P_1(x)$. El polinomio $P_1(x)$ se obtiene dividiendo.

Ejemplo:

El $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$, que no resulta inmediato, puede resolverse así:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

- **El caso $\frac{k}{0}$**

Cuando al hacer cualquier límite aparezca la expresión $\frac{k}{0}$, se pondrá que el valor de ese límite es infinito: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{k}{0}=\infty$. Esto significa que, aunque el límite no existe, el valor de la función se hace tan grande como se quiera, infinitamente grande.
En estos casos es conveniente estudiar los límites laterales en el punto, pues con frecuencia se obtienen signos distintos para el infinito.
Observación:
Es frecuente confundir los casos $\frac{0}{k}$ y $\frac{k}{0}$. El primero vale 0: $\frac{0}{k}=0$ $\to$ 0 entre *algo* = 0.

Ejemplos:
a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x-4}=\left[\frac{5}{0}\right]=\infty$. También puede ponerse $\pm\infty$.
El estudio de los límites laterales puede hacerse como sigue.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{2x-4}=\left[\frac{5}{0^-}\right]=-\infty$.
Observa que si x es un poco menor que 2: $x\to 2^- \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow 2x-4<0 \equiv 0^-$.
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x-1}{2x-4}=\left[\frac{5}{0^+}\right]=+\infty$.
Observa que si x es un poco mayor que 2: $x\to 2^+ \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow 2x-4>0 \equiv 0^+$.

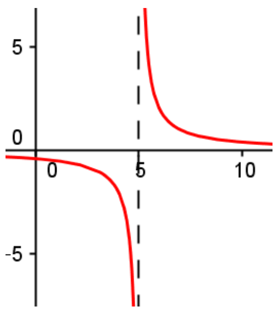
b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{x^2}=\left[\frac{-1}{0}\right]=-\infty$, pues cuando $x\to 0$ el numerador es negativo y el denominador positivo, tanto a la izquierda como a la derecha del 0.

- **Asíntotas verticales**

Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, la recta x = a una asíntota vertical (en x = a) de la función $f(x)$.

Ejemplos:
a) Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-1}{x^2}=\left[\frac{-1}{0}\right]=-\infty \Rightarrow$ la recta x = 0 es asíntota vertical de $f(x)=\frac{3x-1}{x^2}$.

b) Para $g(x)=\frac{2}{x-5}$, que no está definida en x = 5, se tiene que
$\lim\limits_{x\to 5}\frac{2}{x-5}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty$. Por tanto, la recta $x=5$ es asíntota vertical.
Si en este caso se estudian los límites laterales se cumple:
$\to$ por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{2}{x-5}=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty$.
$\to$ por la derecha: $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{2}{x-5}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=+\infty$.



3.2. La indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ puede resolverse de dos formas:

1. Descomponiendo en factores y simplificando, como para las funciones racionales.
2. Multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación, se opera y simplifica.

Observaciones:
1) Como las funciones con radicales de índice par no están definidas para valores negativos del radicando habrá que tenerlo en cuenta al plantear y resolver los límites. Así, por ejemplo, el $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ sólo puede plantearse por la derecha de $x = 3$, pues $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ no está definida cuando $x \to 3^-$. Por tanto, este límite habría que plantearlo así: $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ y su valor sería $+\infty$.
2) Si no se advierte nada, en todos los casos se tomará el signo positivo de la raíz.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-2x-3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{1}{x+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$

→ En este caso pueden discutirse los límites laterales; y lo mismo cuando $x \to -1$, que solo puede calcularse por la derecha, cuando $x \to -1^+$, pues la función no está definida para valores de $x \le -1$. (Su valor es $+\infty$).

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2x-1-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(2\sqrt{x}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\cdot\left(2\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(2\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4}{(x+1)\left(2\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{2}.$$

d) Los siguientes límites no son indeterminados:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}}{x+2}=\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}=\frac{0}{1}=0$; $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\frac{2x^2-1}{2x-1}}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{\sqrt{0^+}}=\frac{3}{0^+}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{\sqrt{x-2}}$ no existe: la función no está definida en un entorno de $x = 1$.

3.3. Límite finito de una función cuando $x \to \infty$

La función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+8}$ tiende a 2 cuando $x \to +\infty$.

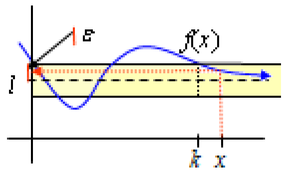
Efectivamente, si x = 1000, f(1000) = 1,983; si x = 10000, f(10000) = 1,9995;...

Se escribe, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+8} = 2$.

→ La definición precisa es la siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ k \text{ (grande)} \mid \forall\ x > k \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

(Para valores de $x > k$ la gráfica de f no se sale de la franja marcada).



Esta definición se lee así: "límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es igual a l", equivale a decir que "para todo número épsilon mayor que cero, existe un k grande, tal que para todo x mayor que k, se cumple que la diferencia entre $f(x)$ y l, es menor que el número épsilon elegido"

Si $x \to -\infty$ la definición es análoga:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ k \text{ (grande y negativo)} \mid \forall\ x > k \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

<u>Observación:</u>

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ se concluye que la recta $y = l$ es una <u>asíntota horizontal</u> de la curva $y = f(x)$.

Ejemplo:

Como se ha visto más arriba, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+8} = 2$. Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+8}$.

3.4. Límite infinito de una función cuando $x \to \infty$

La función $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-3}$ toma valores cada vez más grandes cuando $x \to +\infty$.

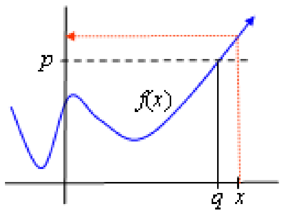
Efectivamente, si x = 100, f(100) = 101,03; si x = 1000, f(1000) = 1001,003; …

Se escribe: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x}{x-3} = +\infty$.

→ La definición precisa es la siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\ p \text{ (grande)}, \exists\ q \text{ (grande)} \mid \forall\ x > q \Rightarrow f(x) > p$$

Esta definición se lee así: "límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es igual a $+\infty$", equivale a decir que "para todo número p (grande), existe otro número q (también grande), tal que para todo x mayor que q, se cumple que la diferencia entre $f(x)$ es mayor que p elegido".



- El valor de estos límites muchas veces resulta inmediato, pues para calcularlos basta con sustituir y aplicar las operaciones con el infinito.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+5x+3\right)=\infty+\infty+3=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-5x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(x-5\right)\right)=\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+8)\right)=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-2x}=-\infty$.

→ Para cualquier polinomio se cumple que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$. El signo depende del grado y del coeficiente principal.

Por consiguiente: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{k}{P(x)}=\left[\dfrac{k}{\pm\infty}\right]=0$.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-2x+5)=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-5x\right)=(-\infty)^2-5\cdot(-\infty)=\infty+\infty=\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^2+2x)=\left[-\infty+\infty\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x(-4x+2)\right)=\infty\cdot\left(-\infty\right)=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2}{5}x^2+3x-57\right)=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4}{3x^2-2x}=0$.

3.5. Límites de funciones racionales cuando *x* → ∞. Indeterminación $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, al calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría la expresión indeterminada $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$; no obstante se resuelve muy fácilmente, pues su valor depende de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$:

- Si grado de $P(x)$ > grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$.
- Si grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.
- Si grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$.

Un procedimiento para justificar estos resultados consiste en dividir el numerador y el denominador de la función dada por la mayor potencia de *x* presente en la expresión, como se hace en el ejemplo b) siguiente. Además, en todos los casos se tendrán en cuenta los signos.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x}{2x^3-100}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+4x}{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-3x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3+\dfrac{4}{x}}{2+\dfrac{3}{x^2}}=-\dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-7}{5x+19}=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2-2x++3}=0$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2x}{x^3+4x^2+2}=2$.

- También puede optarse por escribir directamente:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$ → aquí se aplica el criterio de arriba.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+5x}{2x^2-4x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.   b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-x}{4x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{4} = -\infty$.

3.6. La indeterminación $\left[1^{+\infty}\right]$. El número *e*

El número *e* (definido por Leonhard Euler; Suiza, 1707–1783) es la base de los logaritmos neperianos. Es un número irracional (con infinitas cifras decimales no periódicas) que aparece en multitud de fenómenos naturales. En tu calculadora puedes obtener una aproximación: si tecleas $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\ln 1}$ = se obtiene 2,718281828.

El número *e* puede definirse a partir de un límite, diciendo que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

→ Utilizando la calculadora puedes apreciar cómo se comporta la función $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$,

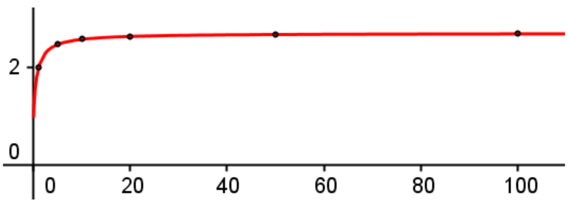
pues, por ejemplo:

$f(1) = 2^1 = 2$; $f(10) = 1{,}1^{10} = 2{,}5937423\ldots$;

$f(20) = 1{,}05^{20} = 2{,}653297\ldots$;

$f(100) = 1{,}01^{100} = 2{,}704813\ldots$;

$f(1000) = 1{,}001^{1000} = 2{,}712923\ldots$



Su gráfica es la adjunta.

→ Aplicando esta definición y las propiedades algebraicas de los límites, pueden darse otros resultados relaciones con el número *e*. Por ejemplo:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{px} = e^p$.   2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{px}\right)^{px} = e$.   3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^{x} = e^p$.

- Otra forma de resolver estos límites es aplicar la transformación:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}.$$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x} = \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^3 = e^3$.   b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{(-x)}\right)^{(-x)}\right)^{-1} = e^{-1}$.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{(-2)}{x}\right)^{x} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/(-2)}\right)^{x/(-2)}\right]^{(-2)} = e^{-2}$.

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}\right)^{\frac{3x^2}{x-6}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+4}-1\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{x-6}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-4}{x^2-4}\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{x-6}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3-12x^2}{x^3-6x^2-4x+24}\right)} = e^6$.

3.7. La indeterminación de la forma [∞ – ∞]

Cuando se plantea la indeterminación [∞ – ∞], tanto cuando $x \to a$ como cuando $x \to \infty$, el procedimiento general consiste en operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Estas otras formas se resolverían por cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x-3}{x-3}-\frac{x^2+1}{x^2-9}\right)$ es una forma indeterminada del tipo [∞ – ∞].

Para transformarla se opera la expresión dada: se hace la resta. Así:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x-3}{x-3}-\frac{x^2+1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(2x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}-\frac{x^2+1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2+3x-9}{x^2-9}-\frac{x^2+1}{x^2-9}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+3x-10}{x^2-9}\right)=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty\,.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right)=[\infty-\infty]$.

Para transformarla se opera como en el ejemplo anterior. Así:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x-3}-\frac{x^2+5x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(2x^2-3\right)\left(x+2\right)-\left(2x-3\right)\left(x^2+5x\right)}{\left(2x-3\right)\left(x+2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+12x-6}{2x^2+x-6}\right)=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=-\frac{3}{2}\,.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$ = (dividiendo por x) = 1.

→ Recuerda que para introducir el factor x dentro de la raíz debe elevarse al cuadrado.

3.8. La indeterminación de la forma [0 · ∞]

Para terminar este apartado de límites se plantea la indeterminación [0 · ∞].

Para resolverla suele dar resultado operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x+2}\cdot\frac{3x}{x^3-1}\right)$ = [∞ · 0]. Para transformarla basta con operar. Así:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x+2}\cdot\frac{3x}{x^3-1}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+15x^2}{x^4+2x^3-x-2}\right)=0\,.$$

4. Comportamiento de otras funciones en el infinito

El límite cuando $x \to \infty$ de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se calcula como sigue.

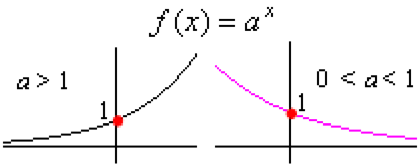
- **Funciones exponenciales**

Además de de las propiedades usuales (de la potenciación) se emplean las dos siguientes:

Si $f(x) = a^{g(x)}$, con $a > 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} a^{g(x)} = a^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$.

Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)}$.

En este contexto viene bien recordar la representación gráfica de las funciones exponenciales elementales.



Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = e^{+\infty} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{3x} = \left[2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}}\right] = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = e^{-\infty} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x-2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{2x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2}} = 2^0 = 1$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x-3} = +\infty^{+\infty} = +\infty$.

- **Funciones logarítmicas**

La propiedad particular que puede aplicarse aquí es: $\lim\limits_{x\to\infty}(\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{10x}{x+5}\right) = \log\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{x+5}\right) = \log 10 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+1}\right) = \ln 2$.

- **Funciones trigonométricas**

En ningún caso existen los límites en el infinito. Esto es: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tan x$ no existen, ya que dichas funciones son periódicas (repiten indefinidamente su comportamiento). Para funciones compuestas hay que determinarlo en cada caso.

Ejemplos:

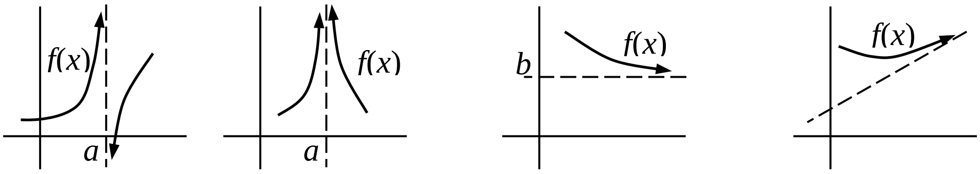
a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x^2+x+1} = 0$, pues $-1 \le \sin x \le 1$, mientras que el denominador tiende a ∞.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cos^2 x$ no existe. Como $0 \le \cos^2 x \le 1$, $f(x) = x\cos^2 x$ tomará valores entre 0 y x.

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$. Como recordarás, la función $f(x) = \tan x$ tiene asíntotas verticales en los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. Aplicación de los límites para hallar las asíntotas de una función

Las asíntotas de una curva son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de la función. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.



Asíntotas verticales Asíntota horizontal Asíntota oblicua

Los criterios para determinar las asíntotas de una curva son:

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.
- La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.
- La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si:

  $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, ($m \neq 0$ y $m \neq \infty$); $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = n$, ($n \neq \infty$).

5.1. Asíntotas en funciones racionales

Un caso particularmente frecuente se da con las funciones racionales: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

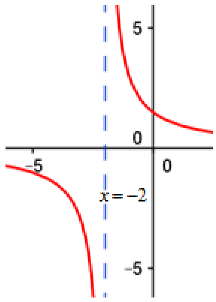
Estas funciones:

– *pueden* tener asíntotas verticales en las raíces del denominador: en las soluciones de $Q(x) = 0$; y siempre que el límite en ese punto se haga infinito.

– tienen asíntotas horizontales si el grado de $P(x)$ es menor o igual que el grado de $Q(x)$.

– tienen una asíntota oblicua siempre que el grado de $P(x)$ = 1 + grado $Q(x)$.

Ejemplos:



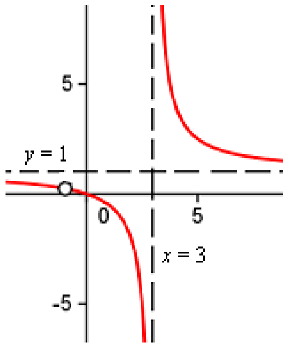
a) La función $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, tiene una asíntota vertical en $x = –2$, ya que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3}{x+2} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty .$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x+2} = 0$.

b) La función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3}$, que no está definida en los puntos $x = 3$ y $x = –1$, tiene una asíntota vertical en $x = 3$, pero no en $x = –1$.

En efecto:

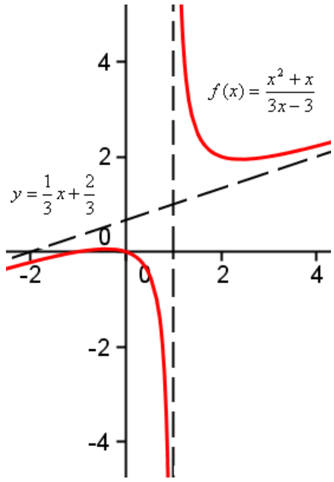


$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{12}{0}\right] = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{4} \neq \infty .$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, pues: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = 1$.

c) La función $f(x)=\dfrac{x^2+x}{3x-3}$ tiene dos asíntotas, una vertical (la recta x = 1) y otra oblicua, la recta $y=mx+n$, siendo:



$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x}{3x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x^2-3x}=\frac{1}{3};$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3x-3}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-3}=\frac{2}{3}.$$

La asíntota es la recta $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

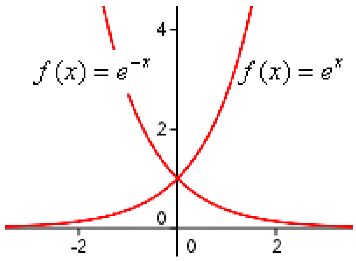
5.2. Asíntotas en funciones exponenciales y logarítmicas

- Las <u>funciones exponenciales</u> suelen tener asíntotas horizontales.

En concreto, $f(x)=e^x$ tiene una asíntota horizontal hacia –∞, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=e^{-\infty}=0$. La asíntota es el eje *OX*.

Igualmente, $f(x)=e^{-x}$ tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=e^{-\infty}=0$.

Sus gráficas son las adjuntas.



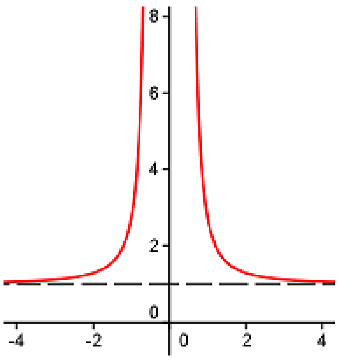
Otros casos no son tan inmediatos, pero para determinar sus asíntotas suele dar resultado estudiar el comportamiento del exponente.

Ejemplo:

La función $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$, que no está definida en x = 0 tiene una asíntota vertical en ese punto, pues $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}=+\infty$.

También tiene una asíntota horizontal hacia ambos lados del ∞, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$.

La asíntota es la recta y = 1.



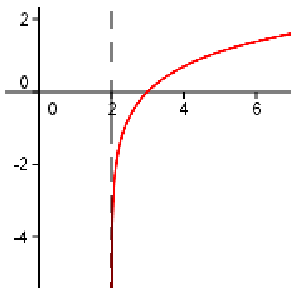
- Las <u>funciones logarítmicas</u> suelen tener asíntotas verticales.

En concreto, $f(x)=\ln x$, que sólo está definida para valores de x > 0, tiene a la recta x = 0, como asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. (Su gráfica se hizo anteriormente).

→ Los casos $\lim\limits_{x\to a}\ln(g(x))$ no son tan inmediatos, pero para determinar sus asíntotas suele dar resultado estudiar los puntos en los que la función $g(x)$ se anula.

Ejemplo:

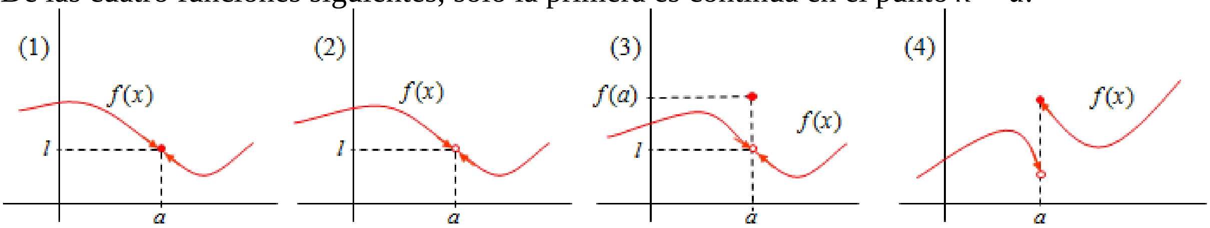
La función $f(x)=\ln(x-2)$, que está definida solo para valores de x > 2, tiene a la recta x = 2 como asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=-\infty$.



6. Continuidad de una función en un punto

Una función es continua en un punto cuando el límite de la función en dicho punto es igual al valor de la función en él.
La definición es la siguiente: $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Esto implica que:
1) La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$.
2) Existe el límite en $x = a$: existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
3) El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l = f(a)$.
De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$.



$f(x)$ es continua en $x = a$ — $f(x)$ no es continua en $x = a$: $f(a)$ no está definida — $f(x)$ no es continua en $x = a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ — $f(x)$ no es continua en $x = a$: no existe el límite en $x = a$

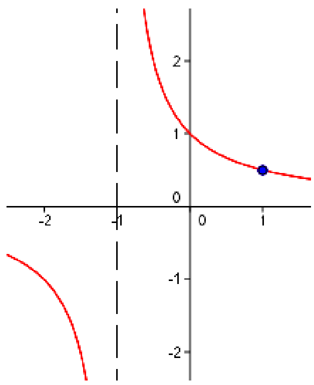
6.1. Discontinuidad evitable

Cuando una función no es continua de dice que es discontinua. La causa más común de la discontinuidad está en que la función no esté definida en un punto. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)}$ es discontinua en $x = -2$ y en $x = 1$.
Hay casos en los que la discontinuidad es evitable. Así sucede para las funciones dadas en las gráficas (2) y (3) de más arriba.

- Una función $f(x)$ tiene una <u>discontinuidad evitable</u> en el punto $x = a$ cuando tiene límite en ese punto.

En el caso (2) la discontinuidad se evita definiendo $f(a) = l$.
En el caso (3) la discontinuidad de evita (imponiendo) redefiniendo $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
En el caso (4) la discontinuidad no puede evitarse, pues la gráfica da un *salto* en el punto $x = a$. (Se llama discontinuidad de salto finito).

Ejemplo:



La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, pues en esos dos puntos no está definida.
Si se hace el límite en esos puntos, se tiene:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

En el primer caso, en $x = -1$, no existe límite; por tanto, la discontinuidad no puede evitarse.
En cambio, en $x = 1$ sí puede evitarse. Se evita definiendo aparte $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

6.2. Continuidad lateral

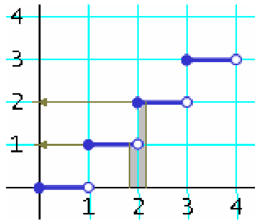
La función representada en la grafica (4) puede considerarse continua por la derecha del punto $x = a$. En cambio, no es continua a su izquierda.

Una función $f(x)$ es <u>continua por la derecha</u> en el punto $x = a$ (en a^+) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Una función $f(x)$ es <u>continua por la izquierda</u> en el punto $x = a$ (en a^-) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Ejemplos:

a) La función $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ no es continua en $x = -2$, pues en ese punto no está definida. En consecuencia, tampoco es continua por ninguno de los lados del punto $x = -2$.



b) La función $f(x) = ENT[x]$ es discontinua para todo $x \in \mathbf{Z}$, pues la función no tiene límite para ningún valor entero de x.

No obstante, la función es continua por la derecha de todo x. Por ejemplo, por la derecha de $x = 2$, se cumple que $\lim\limits_{x \to 2^+} ENT[x] = 2 = ENT[2]$.

En cambio, no es continua por la izquierda de cualquier x entero. Por ejemplo, para el mismo $x = 2$, por su izquierda se cumple que $\lim\limits_{x \to 2^-} ENT[x] = 1 \neq ENT[2]$.

6.3. Propiedades de las funciones continuas

Aunque sea de manera escueta conviene indicar algunas propiedades relacionadas con las operaciones de las funciones. Estas propiedades son:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces:

- $f(x) \pm g(x)$ es continua en $x = a$.
- $f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.
- $\dfrac{1}{f(x)}$ es continua en $x = a$ si $f(a) \neq 0$.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en a cuando $g(a) \neq 0$.

Las propiedades anteriores permiten concluir que la mayoría de las funciones usuales son continuas en todos los puntos de su dominio. Así, sin ser exhaustivo, puede afirmarse que:

1) <u>Las funciones polinómicas</u>, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, son continuas siempre, para todo número real x.

Ejemplos:

Son funciones continuas:

a) $f(x) = 2$ $\to$ Las funciones constantes se representan mediante una recta horizontal.

b) $f(x) = 2 - x$ $\to$ La función polinómica de primer grado es una recta.

c) $f(x) = 2 + 3x - x^2$ $\to$ La función polinómica de segundo grado es una parábola.

d) $f(x) = x^5 - 2x$ $\to$ Todos los polinomios, de cualquier grado, son funciones continuas.

2) Las funciones racionales, $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$, son continuas en todos los puntos de su dominio; esto es, siempre que $b_0+b_1x+...+b_mx^m\neq 0$.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+2}$ es continua siempre, para todo número real, pues su denominador siempre es distinto de 0.

b) La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$ es continua para todo número real distinto de 1, 2, y –3. Para esos tres valores se anula el denominador.

→ Aunque ya se ha advertido, conviene insistir en dos cuestiones:
1) Si en un punto de discontinuidad el límite es infinito, entonces la función racional tiene una asíntota vertical.
2) Si en un punto de discontinuidad existe el límite, entonces la función tiene una discontinuidad evitable.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)}$ no está definida en los puntos x = 1 y x = 2. Por tanto, no es continua en esos puntos.

Como en x = 1, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{-1}{0}\right]=\infty\Rightarrow$ la recta x = 1 es una AV de la curva.

Como en x = 2, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-1}=2\Rightarrow$ la discontinuidad es evitable. Se evita definiendo la función como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)}, & \text{si } x\neq 1,\ 2\\ 2, & \text{si } x=2\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ 2, & \text{si } x=2\end{cases}.$$

b) En este contexto suelen plantearse problemas como el que sigue: ¿Para qué valores de k puede evitarse alguna discontinuidad en la función $f(x)=\dfrac{x^2-kx}{x^2+2x-3}$?

→ La función es discontinua en los puntos x = 1 y x = –3, soluciones de $x^2+2x-3=0$.

- En x = –3: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-kx}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x(x-k)}{(x+3)(x-1)}=\left[\dfrac{9+3k}{0}\right]$. Este límite es ∞ salvo, quizás, si

k = –3, en cuyo caso: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-kx}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{3}{4}$.

Por tanto, en x = – 3 la discontinuidad es evitable si k = –3.

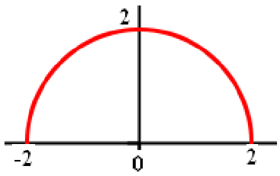
- Igualmente, en x = 1 la discontinuidad puede evitarse cuando k = 1, definiendo $f(1)=\dfrac{1}{4}$.

3) Las funciones con radicales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ está definida cuando $x^2-4\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 4$, lo que exige que $x\geq 2$ o $x\leq -2$. No está definida en el intervalo (–2, 2).
Por tanto, es continua para todo $x\geq 2$; y para todo $x\leq -2$. En el primer caso por la derecha; en el segundo, por la izquierda.
(El lector interesado podrá comprobar que esta función determina la hipérbola $x^2-y^2=4$).

b) La función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ es continua solo en el intervalo [–2, 2], que es su dominio de definición.
En efecto, $4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$.
Esta función determina la semicircunferencia $x^2+y^2=4$.



c) Las funciones seno y coseno son continua siempre. Si aparecen en cocientes habrá que aplicar el criterio general de denominadores no nulos.

→ La función $f(x)=\dfrac{x+2}{1-\cos x}$, por ejemplo, no es continua en los puntos en los que no está definida, que son $x=2k\pi$: en esos valores se anula el denominador.
(Recuerda: $1-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=0^{\circ}, 360^{\circ}, 2\cdot 360^{\circ}...\ \rightarrow\ x=2k\pi$).

→ La función $f(x)=\dfrac{x+3}{2-\sin x}$ siempre es continua. Su denominador no se anula en ningún caso: $2-\sin x>0$ siempre. (Recuerda que $-1\leq \sin x\leq 1$).
En cambio, la función $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{x+3}$ es discontinua en el punto x = –3. En ese punto la función tiene una asíntota vertical.

d) Las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=\ln x$ son continuas cuando x > 0, que es cuando están definidas. Para las funciones $f(x)=\log(A(x))$ y $g(x)=\ln(A(x))$ siempre hay que exigir que $A(x)>0$. Así:

→ $f(x)=\log(x-3)$ es continua cuando x > 3.

→ $f(x)=\log(x^2-1)$ es continua para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. No está definida si $x\leq -1$ o si $x\geq 1$: cuando $x \in [-1, 1]$,

→ $g(x)=\ln(x^2+1)$ es continua para $x \in$ **R**, pues $x^2+1>0$ siempre.

→ $g(x)=\dfrac{2}{1-\ln x}$ es continua si $x\in(0,+\infty)-\{e\}$.

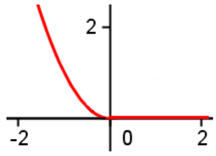
(Recuerda que $1-\ln x=0 \Rightarrow x=e$; y que el logaritmo está definido para x > 0).

e) La función $f(x)=(x-3)e^{2x+1}$ es continua en todo **R**.

→ En cambio, $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$ no es continua en x = –2, ya que no está definida en ese punto.

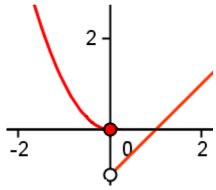
→ la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ no es continua en x = 0, pues no está definida en ese punto.

4) Las funciones definidas a trozos serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.



Ejemplos:

a) La función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es continua en todo **R**.



b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 0 \\ x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$.

$\to$ En este contexto suelen plantearse ejercicios como los que siguen:

Ejercicio 1

Halla el valor que debe tener a para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\ge 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$.

Solución:

La función está definida mediante dos funciones polinómicas, que son continuas siempre. Por tanto, el único punto dudoso es $x = 1$.

En ese punto la función está definida y vale $f(1)=3-a$, que depende del valor de a.

El valor de a, si existe, se encuentra imponiendo que los límites laterales en $x = 1$ coincidan.

Por la izquierda:

Si $x\to 1^-$, $f(x)=x^2+x\to 2$.

Por la derecha:

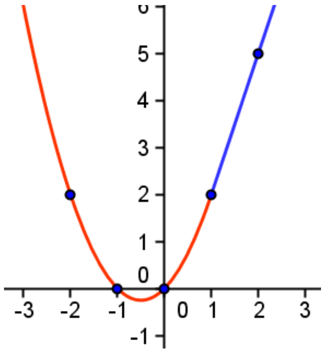
Si $x\to 1^+$, $f(x)=3x-a\to 3-a$.

Deben ser iguales: $2=3-a \Rightarrow a=1$.

La función continua será: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-1 & x\ge 1 \end{cases}$.

Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:

(–2, 2); (–1, 0); (0, 0); (1, 2); (2, 5).



Ejercicio 2

¿Qué valor hay que asignar a k para que la función $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+k, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$? Haz un esbozo gráfico de su curva.

Solución:

Los límites laterales (en $x = 0$) deben coinciden con $f(0)=e^0=1$.

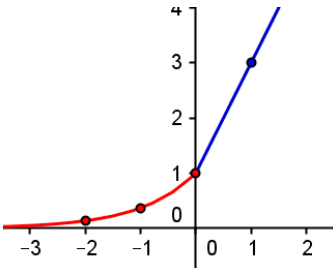
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=e^{0^-}=1$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+k)=k$.

Por tanto, la función es continua cuando $k = 1$.

Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:

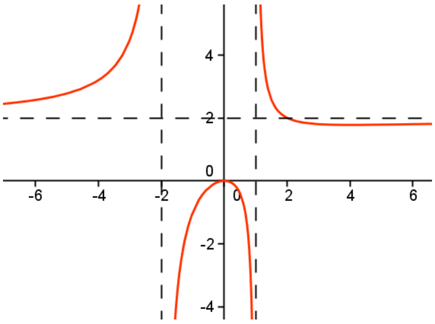
(–2, 0,135); (–1, 0,368); (0, 1); (1, 3).



Problemas Propuestos

Cálculo de límites

1. Para la función representada en la figura adjunta, determina:
a) Su dominio.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) El valor del límite de la función cuando:
$x \to -\infty$; $x \to -2$; $x \to 0$; $x \to 1$; $x \to +\infty$
d) En los puntos $x = -2$ y $x = 1$, indica el signo de los límites laterales.



2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$, calcula su límite en los siguientes puntos:

a) $x = -1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = 3$

3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x}{x^2+x-12}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+x-1}$

4. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2+4x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$.

5. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}$

6. Halla, en función de los valores de p, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-p}$

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$

8. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+10x}{x^3-3x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-4}{2x-5x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2}{x^2+12x}$

9. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3-2x}}$

10. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{3x+4}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$

11.Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)$

12. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \tan\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)$

13. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$

14. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{1/(x-2)}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{x/(x+2)}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)$

15. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{x/2}}{1+x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

16. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)$

17. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

<u>Asíntotas de una función</u>

18. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$. Halla sus asíntotas y la posición de la curva respecta de ellas.

19. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Indica también la posición de la gráfica de $f(x)$ respecto de sus asíntotas.

20. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$, halla con detalle sus asíntotas; e indica la posición de la curva respecto a ellas.

21. Determina las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$.

22. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$. Indica la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

23. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

24. Sea $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}$. Halla su dominio y sus asíntotas.

25. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x-2}$ b) $f(x)=2+e^x$ c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ d) $f(x)=e^{-2x}$

26. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x-3)$ b) $f(x)=\log\dfrac{1}{x}$ c) $f(x)=\log(x^2-4)$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$

Continuidad

27. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=x^3+8$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

i) $f(x)=e^{x-2}$ j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ k) $f(x)=\log(5x-6)$ l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$

m) $f(x)=\tan 2x$ n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ o) $f(x)=\cos(2x-1)$ p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$

28. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } x>1 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{si } x\le 0 \\ x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0 \\ \sin x, & \text{si } x>0 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x\le 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } x>1 \end{cases}$

29. a) ¿Cuántas discontinuidades tiene la función $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2-3x+2}$?
b) ¿Qué valor hay que dar a $f(2)$ para que la discontinuidad pueda evitarse en $x = 2$?

30. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$, calcula su límite en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.
¿En qué puntos es discontinua la función? ¿Tiene alguna discontinuidad evitable?

31. Estudia la continuidad de función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$. ¿Si tuviese alguna discontinuidad evitable cómo podría evitarse?

32. Determina el tipo de discontinuidades que presenta la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$.

33. La función $f(x)=\dfrac{x^2+kx+4}{x^2-4}$ es discontinua en los puntos $x = -2$ y $x = 2$. ¿Podría evitarse alguna discontinuidad para algún valor de k?

34. ¿Para qué valores de a es continua en $x = 1$ la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1 \\ 2x+a, & \text{si } x>1 \end{cases}$?

35. Determina los valores de a para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ 2a+\sin x & 0<x \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

36. ¿Puede la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x}, & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ ser continua en toda la recta real para algún valor de a?

37. Halla para qué valores de a la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le a \\ a+2 & x>a \end{cases}$ es continua en todo **R**.

38. Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x-a & x<-\pi \\ \cos x+b & -\pi\le x<0 \\ e^x-1 & x\ge 0 \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

39. Determina la continuidad de las funciones:
a) $f(x)=|x-1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

Otros problemas

40. ¿Existe algún valor de *p* para el que la función $f(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}$ tenga solamente una asíntota vertical?

41. Aplicando alguno de los siguientes resultados:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{px}=e^p$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{px}\right)^{px}=e$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^{x}=e^p$

resuelve los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$

42. Aplicando la transformación $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$, halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

43. Comprueba que la función $f(x)=2x+\sin x$ no tiene asíntotas.

44. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{-x^2}$ b) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x)=e^{x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

45. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{si } x<0 \\ x^2+2x, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ es continua en el punto $x = 0$.

46. Sea $f(x)=\begin{cases} ax+x^2, & -2\le x<0 \\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\le 3\end{cases}$. Halla los valores de *a* y *b* para que $f(x)$ sea continua en el intervalo [–2, 3], sabiendo que también se cumple que $f(-2)=f(3)$.

47. Dependiendo de los valores de *p*, ¿tiene la función $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-px+1}$ alguna discontinuidad? Si la tuviese, ¿podría evitarse en algún caso?

Soluciones

1. **R** – {–2, 1}. b) $x=-2$ y $x=1$, $y=2$.
c) 2; ±∞; 0; ±∞; 2. d) +∞; –∞; –∞, +∞.
2. a) 3/4. b) 4/5. c) 0. d) ∞.
3. a) 1/7. b) ∞. c) 4/3.
4. a) –9. b) ∞. c) 0.
5. a) –1. b) 12. c) 0.
6. a) Si $p \neq 2$ el límite será infinito; si p = 2, vale 2.
b) Si $p \neq 4$ el límite valdrá 0; si p = 4, vale 3.
7. a) 1/2. b) 8. c) 1.
8. a) 0. b) –3/5. c) ∞.
9. a) 1/2. b) 1/2. c) 0.
10. a) ∞. b) ∞. c) 0.
11. a) ∞. b) $\log\frac{5}{2}$. c) –∞. d) 3.
12. a) 0. b) 0. c) ∞. d) ±∞.
13. a) ±∞. b) 0. c) π/4. d) no existe.
14. a) No existe: 0; +∞. b) 3. c) 1/3.
15. a) 1. b) ±∞; $x=-1$. c) 0; y = 0. d) +∞.
16. a) ∞. b) 2/3. c) 3.
17. a) 1. b) 5/2. c) –5/2.
18. x = –1; y = 2.
19. x = 2; y = 2.
20. x = 2; x = 3; y = 0.
21. x = 0, x = 2; y = 0.
22. x = 1; $y=2x+3$.
23. x = 0; $y=x+2$.
24. $x \neq 0$. x = 0; $y=-2x$.
25. a) No. b) $y=2$. c) y = 0. d) y = 0.
26. a) x = 3. b) x = 0. c) $x = -2^-$; $x = 2^+$.
d) x = 1; y = 0.

27. b) x = –2. c) $\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$. e) x < 2.
h) [0, 2]. j) 0. k) $x \leq 6/5$. m) $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$.
n) 1.
28. a) x = 1. d) x = 0. e) x = 2. f) $x \geq 2$.
29. a) x = 1 y x = 2. b) –1.
30. x = 0, x = 1, x = 2 y x = 3.
En x = 0 y x = 3, $f(0)=f(3)=\frac{1}{2}$.
31. Discontinua en x = –1 o x = 1.
En x = 1, $f(1)=\frac{1}{2}$.
32. Evitable en x = 1, $f(1)=\frac{2}{9}$.
No evitable en x = 8.
33. Si k = 4, puede evitarse en x = –2.
Si k = –4, puede evitarse en x = 2.
34. a = –1.
35. a = 1/2.
36. a = 0.
37. a = –1 o a = 2.
38. b = –1; a = 2.
39. Continuas siempre.
40. p = ±1; p = ±2.
41. a) $e^{1/2}$. b) $e^{1/2}$. c) e^{-4}.
42. a) e^2. b) e^2. c) e^{-4}.
44. a) y = 0. b) x = 1; y = 1. c) No tiene.
d) y = 0; y = 2.
45. b = 0; a puede ser cualquiera.
46. b = –1; a = 3/2.
47. Si p > 2 o p < –2, la función tiene dos discontinuidades; si p = ±2, tiene una discontinuidad. No pueden evitarse.