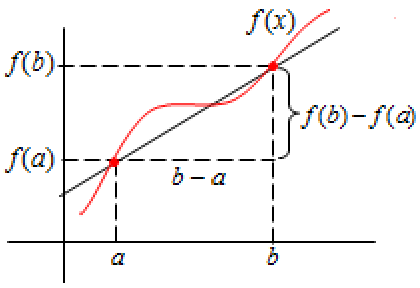
Tema 6. Derivadas

1. Derivada de una función en un punto

1.1. Tasa de variación de una función

Se llama tasa de variación media de una función $f(x)$, en el intervalo [a, b], al valor de la expresión:

$$Tvm[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



Este cociente da la media de cambio de $f(x)$ al pasar la variable x de a a b. (Puede llamarse también velocidad media de cambio o incremento medio, …).

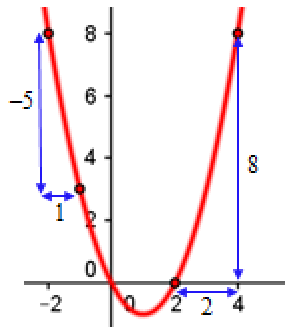
- Si el intervalo [a, b] se hace muy pequeño, lo que se consigue cuando $b \to a$, o haciendo $b = a + h$ con $h \to 0$,

se habla de tasa de variación instantánea, que se define como sigue:

$$Tvi(a) = \lim_{h\to 0}\left(Tvm[a, a+h]\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo:

a) La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos [–2, –1] y [2, 4] vale:



$$Tvm[-2,-1] = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{3-8}{1} = -5;$$

$$Tvm[2,\ 4] = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{8-0}{2} = 4.$$

b) La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos [2, 2 + h] vale:

$$Tvm[2,\ 2+h] = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

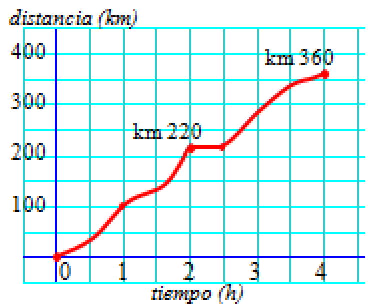
Si h = 1, $Tvm[2,\ 2+h] = Tvm[2,\ 3] = 2+1 = 3$;

Si h = 0,2, $Tvm[2,\ 2+h] = Tvm[2,\ 2{,}2] = 2+0{,}2 = 2{,}2$.

Si h = 0,01, $Tvm[2,\ 2+h] = Tvm[2,\ 2{,}01] = 2+0{,}01 = 2{,}01$.

Si $h \to 0$, $Tvm[2,\ 2+h] \to Tvi(2) = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$.

c) Entre Jaén y Cádiz hay 360 km por carretera. Si se viaja en automóvil, partiendo de Jaén a las 8 h y llegando a Cádiz a las 12 h, la velocidad media ha sido de 90 km/h. La velocidad media coincide con la tasa de variación media. (La gráfica adjunta indica la distancia recorrida en función del tiempo).



Aunque la velocidad media ha sido de 90 km/h, en determinados momentos la velocidad ha sido mayor o menor; incluso ha habido una parada de media hora.

La mayor o menor pendiente de la curva indica la velocidad aproximada en cada periodo de tiempo. (La velocidad media en las dos primeras horas ha sido de 110 km/h; en la primera hora se recorrieron 100 km; en la 2ª, 120 km)

La tasa de variación instantánea es la velocidad que marca el cuentakilómetros en cada instante.

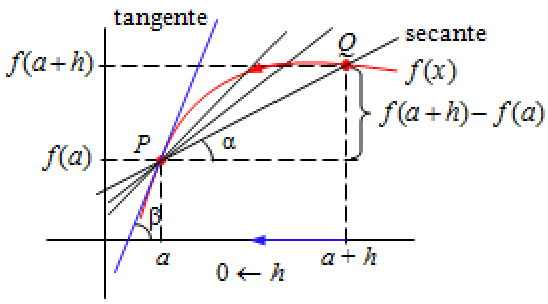
1.2. Definición de derivada

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si existe el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Este límite se denota por $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.

→ La derivada es el límite de un cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la variable dependiente (la $f(x)$) cuando la variable independiente (la x) pasa de a a $a + h$. El cociente mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra.



Cuando se impone que $h \to 0$ se está calculando s la tasa de variación instantánea de la función $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, qué le pasa a $f(x)$ cuando varía x en los alrededores de un punto a.

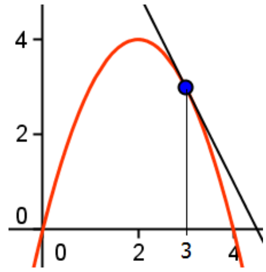
En el dibujo, la tasa de variación media en el intervalo $[a, a + h]$ es $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tan\alpha$, que da la pendiente de la recta secante, la que corta a la curva en los puntos P y Q.

Cuando $h \to 0$, el punto Q se acerca cada vez a P. Esto hace que la secante pase por dos puntos cada vez más próximos, hasta confundirse con la recta tangente.

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}.$$



Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -h^2 - 2h + 3$ y $f(3) = 3$, se tendrá:

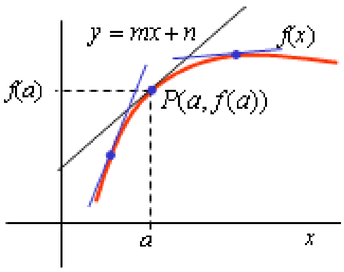
$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-h-2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-h-2) = -2.$$

Luego, $f'(3) = -2$. (Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre ambas variables vale –2).

1.3. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.



Como la ecuación de una recta es $y = mx + n$, si la pendiente $m = f'(a)$, se tiene que:

$$y = f'(a)x + n.$$

Si además la recta pasa por $P(a, f(a))$, se cumple que

$$f(a) = f'(a)\cdot a + n.$$

Restando ambas igualdades se obtiene la ecuación de dicha recta tangente, que es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Observaciones:
1) La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto.
2) La derivada da la pendiente de la recta tangente. (La pendiente de una recta indica lo que la variable *y* aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable *x*). La derivada puede variar de un punto a otro, pues la recta tangente forma ángulos distintos al deslizarse sobre una curva.

Ejemplo:
La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3).$$

Y como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene: $y - 3 = -2(x-3) \Rightarrow y = -2x + 9$.

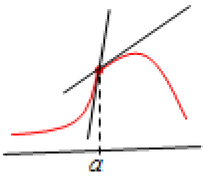
1.4. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.
Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:
1) Que la función sea continua en dicho punto.
2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

- **Derivadas laterales**

Izquierda: $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Derecha: $f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.
Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.
Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.



→ Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

- **Derivabilidad implica continuidad**

“Si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$”

Comprobar que este resultado es cierto es relativamente sencillo, pues si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

De la existencia de ese límite hay que deducir que la función es continua; esto es, que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; o lo que es lo mismo, que $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - f(a) \right) = 0$.

Para ello se hace $x = a + h$, y se observa que si $x \to a$, entonces $h \to 0$; y al revés.
Por tanto:

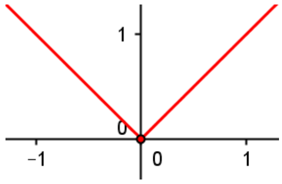
$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a) \right) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left(f(a+h) - f(a) \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(f(a+h) - f(a) \right)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(f(a+h) - f(a) \right)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En consecuencia, si la función es derivable en $x = a$ se deduce que es continua en $x = a$.

- **Continuidad no implica derivabilidad**
  "Si $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$"

→ La continuidad es una condición necesaria, pero no suficiente, de derivabilidad.
Para comprobar este resultado basta con dar un contraejemplo. El más sencillo es considerar la función $f(x)=|x|$, que es continua en $x = 0$ pero no derivable.



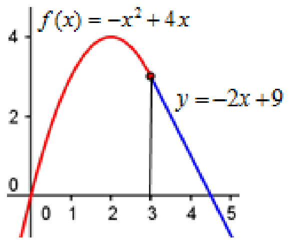
En efecto, $f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & \text{si } x<0 \\ x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

Su gráfica es la adjunta.
Las derivadas laterales en el punto $x = 0$ valen:

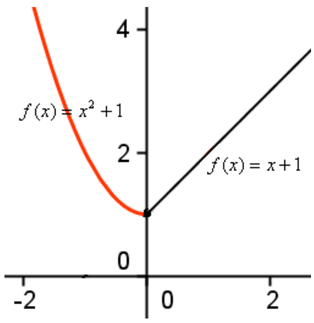
$$f´(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1; \qquad f´(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

Como son diferentes, la función $f(x)=|x|$ no es derivable en $x = 0$.

Ejemplos:



a) La función $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x, & x\leq 3 \\ -2x+9 & x>3 \end{cases}$ es continua y derivable en el punto donde se unen las funciones a trozos, en $x = 3$. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos.
(Recuerda que $y=-2x+9$ es la recta tangente a $f(x)=-x^2+4x$ en $x = 3$).



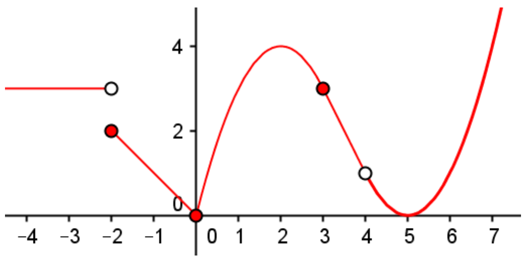
b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.
Gráficamente se ve que en el punto $x = 0$ la función hace un cambio brusco, tiene un pico.
Si se calculan las derivadas laterales en $x = 0$ se tiene:
→ Por la izquierda:

$$f´(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\left(h^2+1\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0^-} h=0.$$

→ Por la derecha:

$$f´(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(h+1)-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

c) Si se considera la función cuya gráfica es la adjunta, se cumple:
En $x = -2$: no es continua ⇒ no es derivable.
En $x = 0$: es continua, pero no es derivable (no coinciden las derivadas laterales: hay un pico).
En $x = 3$: es continua y derivable (las derivadas laterales son iguales; es el ejemplo a) de arriba).
En $x = 4$: no es continua ni derivable. (Si se definiese $f(4)=1$, la función sería continua y derivable.
En los demás puntos de su dominio es derivable.



2. Función derivada

El cálculo del valor de la derivada de una función en un punto *a* exige la resolución de un límite, en muchos casos engorroso. Si, además, para una misma función hay necesidad de calcular su derivada en distintos puntos esta dificultad se acrecienta. La manera de simplificar el proceso es hallar, de una vez, otra función genérica que dé el valor de la derivada en cualquier punto con sólo sustituir en ella. Esta función recibe el nombre de función derivada.

2.1. Definición

La función derivada de una función $f(x)$ es una nueva función que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f´(x)$ y se define así:

$$f´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si $y = f(x)$, se escribe $y´ = f´(x)$. También es frecuente escribir $f´(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ o $y´ = \dfrac{dy}{dx}$.

2.2. Derivada de algunas funciones

Para obtener la función derivada de cualquier función conviene seguir el proceso siguiente:
1) Dada $y = f(x)$, hallar $f(x+h)$.
2) Hallar y simplificar la diferencia $f(x+h) - f(x)$.
3) Escribir y simplificar el cociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
4) Resolver el límite $f´(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. En el cálculo de este límite suele estar la dificultad mayor.

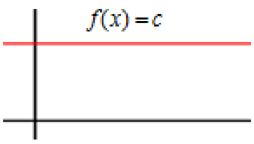
Para las funciones usuales existen una serie de fórmulas que dan su función derivada. Más adelante se dará una breve tabla con las más frecuentes.
Aquí, para que se aprecie el método a seguir (y quizás la dificultad de ello) se obtendrán las relacionadas con las funciones polinómicas.

- **Derivada de la función constante:** $f(x) = c$

1) $y = f(x) = c \Rightarrow f(x+h) = c$. 2) $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$.

3) y 4) $f´(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$.

Por tanto, si: $f(x) = c \Rightarrow f´(x) = 0$



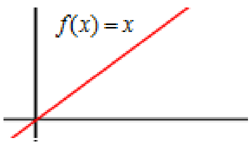
→ Geométricamente: la tasa de variación (la pendiente) de la recta $y = c$ es 0.

- **Derivada de la función lineal:** $f(x) = x$

1) $f(x) = x \Rightarrow f(x+h) = x + h$. 2) $f(x+h) - f(x) = x + h - x = h$.

3) y 4) $f´(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.

Por tanto, si: $f(x) = x \Rightarrow f´(x) = 1$



→ Geométricamente: la tasa de variación (la pendiente) de la recta $y = x$ es 1.

- **Derivada de una función cuadrática:** $f(x) = x^2 + 2x$

La función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ puede obtenerse así:

1) Se calcula $f(x+h)$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h.$$

2) Se halla $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - (x^2 + 2x) = h^2 + 2xh + 2h.$$

3) Se forma el cociente: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{h^2 + 2xh + 2h}{h}$.

4) Se resuelve el límite:

$$f´(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x + 2) = 2x + 2.$$

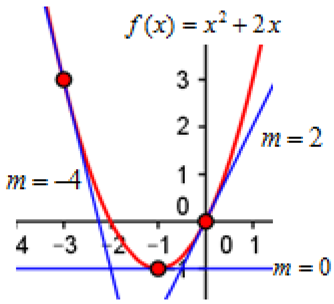
Por tanto, si $f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f´(x) = 2x + 2$.

Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Así:

$f´(0) = 2·0 + 2 = 2$; $f(-1) = 2·(-1) + 2 = 0$;

$f´(-3) = 2·(-3) + 2 = -4$.

Esos números dan, la pendiente *m* de las rectas tangentes en los puntos de abscisa 0, –1 y –3, respectivamente.



- **Derivada de la función** $y = f(x) = x^n$

1) $f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + h^n$. (Esta expresión se obtiene utilizado la fórmula de la potencia de un binomio).

2) $f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + h^n$.

3) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + h^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}.$$

4) $$f´(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}.$$

Por tanto, si:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f´(x) = nx^{n-1}$$

→ Esta regla es válida para cualquier valor de *n*, positivo, negativo, fraccionario…

Ejemplo:

a) Si $f(x) = x^5 \Rightarrow f´(x) = 5x^4$. Si $f(x) = x^7 \Rightarrow f´(x) = 7x^6$.

b) Si $f(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f´(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

c) Si $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Si $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1}{2x^{(n-1)/n}} = \dfrac{1}{n·\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Cuando las funciones no aparezcan en su forma más simple o cuando intervengan más de una función se aplicarán las siguientes propiedades.

1. Derivada de una constante por una función:

$$F(x)=k\cdot f(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $y=kx^n \Rightarrow y'=k\cdot nx^{n-1}$.

b) Si $y=7x^5 \Rightarrow y'=7\cdot 5x^4=35x^4$.

c) Si $y=\dfrac{-1}{4}x^4 \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{4}\cdot 4x^3=-x^3$.

d) Si $y=\dfrac{2}{x}=2x^{-1} \Rightarrow y'=2\cdot(-1)x^{-2}=\dfrac{-2}{x^2}$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x)=f(x)\pm g(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $f(x)=5x^3$ y $g(x)=-4x^6 \Rightarrow \left(f(x)+g(x)\right)'=\left(5x^3\right)'+\left(-4x^6\right)'=15x^2-24x^5$.

b) Si $y=\dfrac{1}{x}+5-x+2x^2 \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}-1+4x$.

3. Derivada de un producto de funciones:

$$F(x)=\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=4x^2-2x+1$ y $g(x)=3-5x^2+2x^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(f(x)\cdot g(x)\right)'=(8x-2)\cdot\left(3-5x^2+2x^4\right)+\left(4x^2-2x+1\right)\cdot\left(-10x+8x^3\right)=$$

$$=48x^5-20x^4-72x^3+30x^2+14x-6.$$

→ Si se multiplican antes las dos funciones y se deriva después, se obtiene:

$$f(x)\cdot g(x)=(4x^2-2x+1)\cdot(3-5x^2+2x^4)=8x^6-4x^5-18x^4+10x^3+7x^2-6x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x)\cdot g(x)\right)'=48x^5-20x^4-72x^3+30x^2+14x-6$$. (El resultado es el mismo).

4. Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to \left(F(x)\right)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Ejemplo:

a) Si $y=\dfrac{3x^2-2x+1}{4x-1} \Rightarrow y'=\dfrac{(6x-2)\cdot(4x-1)-(3x^2-2x+1)\cdot 4}{(4x-1)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{12x^2-6x-2}{(4x-1)^2}$.

b) Si $f(x)=\dfrac{-3}{2x^3+x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0\cdot\left(2x^3+x\right)-(-3)\cdot\left(6x^2+1\right)}{\left(2x^3+x\right)^2}=\dfrac{3\cdot\left(6x^2+1\right)}{\left(2x^3+x\right)^2}$.

5. Derivada de la inversa de una función:

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)} \to \left(F(x)\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f´(x)}{(f(x))^2}$$

Ejemplo:

Para la función $f(x)=3x^2-5x+1$ se tendrá: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{3x^2-5x+1}\right)'=\frac{-(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2}$.

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$y=\frac{1}{3x^2-5x+1} \Rightarrow y´=\frac{0\cdot\left(3x^2-5x+1\right)-1\cdot(6x-5)}{\left(3x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(6x-5)}{\left(3x^2-5x+1\right)^2}.$$

Observación: Salvo que se indique expresamente no es necesario operar los denominadores.

6. Derivada de la función compuesta:

$$F(x)=f(g(x)) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(g(x)\right)'=f´(g(x))\cdot g´(x)$$

Ejemplo:

a) Si $f(x)=3x^2$ y $g(x)=\frac{1}{4x}$, se tendrá:

$$f´(x)=6x \to \left[f´\left(g(x)\right)=6\left(g(x)\right)\right];\ \text{y}\ g´(x)=\left(\frac{1}{4x}\right)'=\frac{0\cdot4x-1\cdot4}{(4x)^2}=\frac{-4}{(4x)^2}=-\frac{1}{4x^2}.$$

Aplicando la fórmula $\left(F(x)\right)'=\left(f(g(x)\right)'=f´(g(x))\cdot g´(x)$:

$$F´(x)=6\left(g(x)\right)\cdot g´(x) \Rightarrow F´(x)=6\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4x^2}\right)=-\frac{6}{16x^3}=-\frac{3}{8x^3}.$$

b) Si $f(x)=\frac{3x}{4x+2}$ y $g(x)=x^3-5x \Rightarrow F(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{3g(x)}{4g(x)+2}$.

Su derivada será:

$$F´(x)=\frac{3g´(x)\left(4g(x)+2\right)-3g(x)\cdot4g´(x)}{\left(4g(x)+2\right)^2}.$$

Como $g(x)=x^3-5x \Rightarrow g´(x)=3x^2-5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F´(x)=\frac{3\left(3x^2-5\right)\cdot\left(4\left(x^3-5x\right)+2\right)-3\left(x^3-5x\right)\cdot4\cdot\left(3x^2-5\right)}{\left(4\left(x^3-5x\right)+2\right)^2} \Rightarrow F´(x)=\frac{18x^2-30}{\left(4x^3-20x+2\right)^2}.$$

→ Generalmente, si es posible, conviene hacer antes la composición de funciones y derivar después. Así:

$$F(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{3g(x)}{4g(x)+2} \Rightarrow F(x)=\frac{3\cdot\left(x^3-5x\right)}{4\left(x^3-5x\right)+2}=\frac{3x^3-15x}{4x^3-20x+2}.$$

Derivando:

$$F´(x)=\frac{\left(9x^2-15\right)\cdot\left(4x^3-20x+2\right)-\left(3x^3-15x\right)\cdot\left(12x^2-20\right)}{\left(4x^3-20x+2\right)^2}=\frac{18x^2-30}{\left(4x^3-20x+2\right)^2}.$$

4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales

4.1. Derivada de potencias y raíces

Son dos casos particulares de funciones compuestas: $y=\left(f(x)\right)^n$ e $y=\sqrt[n]{f(x)}$.

Sus derivadas son:

$$y=\left(f(x)\right)^n \Rightarrow y'=n\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)\,; \qquad y=\sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}}.$$

El caso particular de la raíz cuadrada es: $y=\sqrt{f(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Observación: Las raíces pueden considerarse como potencias de exponente racional. Por tanto, para hallar la derivada de una raíz puede utilizarse la fórmula de la derivada de una función potencial. Así, si $y=\sqrt[n]{f(x)}=\left(f(x)\right)^{1/n} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{n}\left(f(x)\right)^{1/n-1}\cdot f'(x)$.

Ejemplos:

a) Para $F(x)=\left(2x^3-5x+3\right)^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x)=4\left(2x^3-5x+3\right)^3\cdot\left(2x^3-5x+3\right)'=4\left(2x^3-5x+3\right)^3\cdot\left(6x^2-5\right).$$

b) Si $F(x)=\dfrac{1}{(4x)^2} \Rightarrow F(x)=(4x)^{-2} \Rightarrow F'(x)=-2\cdot(4x)^{-3}\cdot 4=-\dfrac{8}{(4x)^3}=-\dfrac{1}{8x^3}$.

Naturalmente, si se deriva como un cociente el resultado es el mismo. (Compruébalo).

c) Si $F(x)=\sqrt{x^3-x^2+1} \Rightarrow F'(x)=\dfrac{\left(x^3-x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^3-x^2+1}}=\dfrac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2+1}}$.

Si se escribe $F(x)=\left(x^3-x^2+1\right)^{1/2} \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^3-x^2+1\right)^{-1/2}\cdot\left(3x^2-2x\right)=\dfrac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2+1}}$.

4.2. Derivada de las funciones logarítmicas

- Logaritmo en base a: $f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$.

Para la función compuesta: $y=\log_a f(x) \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.

- Logaritmo neperiano: $f(x)=\ln x$, con $x>0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Para la función compuesta: $y=\ln f(x) \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y=\log\left(4x+5\right) \Rightarrow y'=\dfrac{4}{4x+5}\log e$. b) $y=\log\left(3x^2-x+2\right) \Rightarrow y'=\dfrac{6x-1}{3x^2-5x+2}\log e$.

c) $y=\ln(2x^4-3x) \Rightarrow y'=\dfrac{8x^3-3}{2x^4-3x}$. d) $y=3\cdot\ln\left(5x^4\right) \Rightarrow y'=3\cdot\dfrac{5\cdot 4x^3}{5x^4}=\dfrac{12}{x}$.

4.3. Derivada de las funciones exponenciales

- <u>Exponencial de base *a*</u>: $f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x \ln a$.

Para la función compuesta: $y=a^{f(x)}$, $a>0 \Rightarrow y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.

- <u>Exponencial de base *e*</u>: $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$.

Para la función compuesta: $y=e^{f(x)} \Rightarrow y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y=10^x \Rightarrow y'=10^x \ln 10$.

b) $y=3^{x^2-4x} \Rightarrow y'=(2x-4)\cdot 3^{x^2-4x}\ln 3$.

c) Si $y=e^{2x^3-3x} \Rightarrow y'=(6x^2-3)e^{2x^3-3x}$.

d) $y=e^{\frac{x}{5}-3} \Rightarrow y=\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}-3}$.

4.4. Potencial-exponencial

Se aplica cuando la variable *x* aparece tanto en la base como en el exponente de una potencia:

$$F(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}.$$

El caso más sencillo es $F(x)=x^x$.

Para hallar su derivada se aplican logaritmos y después se deriva. Así:

$$\ln F(x)=\ln x^x=x\ln x \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow F'(x)=F(x)\cdot(\ln x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x)=x^x\ln x+x^x.$$

Para el caso general el procedimiento es el mismo. Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la función $F(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}$, queda:

$$\ln F(x)=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln F(x)=g(x)\cdot\ln f(x)$$

Derivando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Despejando:

$$F'(x)=F(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\left(f(x)\right)^{g(x)-1}\cdot f'(x)$$

Ejemplo:

Para derivar la función $f(x)=\left(3x^2+1\right)^{(4x-1)}$ se hace lo siguiente:

1) Se aplican logaritmos: $\ln f(x)=\ln\left(3x^2+1\right)^{(4x-1)} \Rightarrow \ln f(x)=(4x-1)\ln\left(3x^2+1\right)$.

2) Se deriva en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\frac{6x}{3x^2+1} \Rightarrow f'(x)=f(x)\left(4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\frac{6x}{3x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(3x^2+1\right)^{4x-1}\cdot\left(4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\frac{6x}{3x^2+1}\right).$$

4.5. Otros casos de derivación logarítmica

Aplicar las propiedades de los logaritmos suele simplificar los cálculos de la derivada.

→ Recuerda esas propiedades:

$$\log\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \log\left(f(x)\right)+\log\left(g(x)\right);\quad \log\left(f(x)\right)^n = n\log\left(f(x)\right);$$

$$\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\log\left(f(x)\right)-\log\left(g(x)\right).$$

Por tanto, para derivar, se tendrá: $\left[\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right]' = \left[\log\left(f(x)\right)\right]' - \left[\log\left(g(x)\right)\right]'$.

Ejemplos:

a) Si hay que derivar $f(x)=\ln\left(\frac{3x^2+4}{x^2}\right)$, aplicando la propiedad anterior:

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x^2+4}{x^2}\right) = \ln\left(3x^2+4\right)-\ln\left(x^2\right) = \ln\left(3x^2+4\right)-2\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{6x}{3x^2+4}-\frac{2}{x}=\frac{6x^2-6x^2-8}{3x^3+4x}=\frac{-8}{3x^3+4x}.$$

b) Para derivar la función $f(x)=\ln\left(3x^4+2x^2+1\right)^5$ se puede hacer lo siguiente:

$$f(x)=\ln\left(3x^4+2x^2+1\right)^5 = 5\ln\left(3x^4+2x^2+1\right).$$

Derivando: $f'(x)=5\cdot\frac{12x^3+4x}{3x^4+2x^2+1}=\frac{60x^3+20x}{3x^4+2x^2+1}$.

4.6. Derivada de las funciones trigonométricas

Las reglas de derivación de las funciones trigonométricas se obtienen aplicando las fórmulas trigonométricas y las propiedades de la derivada de las operaciones con funciones.

- Función seno: $f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=\cos x$.

Para la función compuesta se tiene: $y=\operatorname{sen} f(x) \Rightarrow y'=f'(x)\cos f(x)$.

Ejemplos:

a) $f(x)=\sin\left(4x^2\right) \Rightarrow f'(x)=\cos\left(4x^2\right)\cdot\left(4x^2\right)'=8x\cdot\cos\left(4x^2\right)$.

b) $f(x)=\sin\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}$.

- Función coseno: $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x$.

Para la función compuesta: $y=\cos f(x) \Rightarrow y'=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$.

Ejemplo:

a) $f(x)=\cos(2x+5) \Rightarrow f'(x)=-\sin(2x+5)\cdot(2x+5)'=-\cos(2x+5)\cdot 2=-2\cos(2x+5)$.

b) $f(x)=\cos\left(5x^2-3x\right) \Rightarrow f'(x)=-\sin\left(5x^2-3x\right)\cdot\left(5x^2-3x\right)'=-\cos\left(5x^2-3x\right)\cdot(10x-3)$.

- Función tangente: $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Estas fórmulas pueden obtenerse teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Para la función compuesta: $y = \tan f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y = \tan(7x) \Rightarrow y' = \left(1 + \tan^2(7x)\right) \cdot 7$.

b) $y = 3\tan x \Rightarrow y' = 3\left(1 + \tan^2 x\right)$.

c) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$.

d) $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{5} \Rightarrow y' = \dfrac{2x\cos x^2}{5}$.

e) $y = \ln \cos x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$.

f) $y = \sin(\ln x) \Rightarrow y' = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$.

4.7. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

→ Recuerda el significado de estas "funciones":

$y = \text{arcsen}\, x \Leftrightarrow x = \text{sen}\, y$; $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$; $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

(Estas funciones tienen poco interés para las Ciencias Sociales).

- Función arcoseno: $f(x) = \text{arcsen}\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Para la función compuesta: $y = \text{arcsen}\, f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

- Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Para la función compuesta: $y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

- Función arcotangente: $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Para la función compuesta: $y = \arctan f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$.

Ejemplos:

a) $y = \text{arcsen}\,(x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

b) $y = \arccos\left(x^2\right) \Rightarrow y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

c) $y = \arctan\left(1+x^2\right) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

4.8. Tabla de la derivada de las funciones usuales

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella: *c*, *n*, *a* y *e* son números; *x* designa la variable independiente e *y* o *f* representan funciones de *x*.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	**Derivada**	**Función compuesta**	**Derivada**
$y=c$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n,\ \forall\, n\in\mathbf{R}$	$y'=nx^{n-1}$	$y=(f(x))^n,\ \forall\, n$	$y'=n(f(x))^{n-1}f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=a^x,\ a>0$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^{f(x)},\ a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cos f(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\tan f(x)$	$y'=f'(x)\left(1+\tan^2 f(x)\right)$
$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\operatorname{arcsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\arctan f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

4.9. Derivadas sucesivas

A la función derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda; se escribe $f''(x)$. De manera análoga se puede definir la derivada tercera: $f'''(x)$, que es la derivada de la derivada segunda. Y también la derivada de orden 4: $f^{4)}(x)\ldots$

A la derivada de orden *n* se le llama derivada *n*–ésima; y se escribe $f^{n)}(x)$.

Ejemplos:

a) $f(x)=-x^2+4x \Rightarrow f'(x)=-2x+4$. La derivada segunda es $f''(x)=-2$.

b) $f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^4 \Rightarrow f''(x)=20x^3 \Rightarrow f'''(x)=60x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{4)}(x)=120x \Rightarrow f^{5)}(x)=120 \Rightarrow f^{6)}(x)=0$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(x)=\dfrac{-2\cdot 3}{x^3} \Rightarrow f^{4)}(x)=\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{x^4}\ldots$

$\to$ Si se escribe: $\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-1\cdot x^{-2} \Rightarrow f''(x)=-1\cdot(-2)x^{-3}=2x^{-3}\ldots$

4.10. Ejercicios de derivación

A continuación se proponen y derivan algunas funciones. (Procura derivar por tu cuenta antes de ver la solución).

1. $f(x)=\left(-x^2+4x\right)\left(x^3-2x\right) \Rightarrow f'(x)=(-2x+4)\cdot\left(x^3-2x\right)+\left(-x^2+4x\right)\cdot\left(3x^2-2\right)$.

2. Derivada primera y segunda de: $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-5} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3(x^2-5)-3x\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^2}=\dfrac{-3x^2-15}{\left(x^2-5\right)^2}$.

La derivada segunda es:

$$f''(x)=\frac{-6x\cdot(x^2-5)^2-\left(-3x^2-15\right)\cdot 2\left(x^2-5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^4}=\frac{-6x\cdot(x^2-5)-\left(-3x^2-15\right)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-6x^3+30x+12x^3+60x}{\left(x^2-5\right)^3}=\frac{6x^3+90x}{\left(x^2-5\right)^3}.$$

3. $f(x)=(x^3-2x^2-3)^5 \Rightarrow f'(x)=5\left(x^3-2x^2-3\right)^4\cdot\left(3x^2-4x\right)$.

4. $f(x)=\sqrt{3x^2-2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$.

5. $y=2-7x^3+\dfrac{4}{x^5}-5\sqrt{x} \Rightarrow y'=-7\cdot 3x^2+\dfrac{-4\cdot 5x^4}{x^{10}}-\dfrac{5}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'=-21x^2-\dfrac{20}{x^6}-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

6. a) $y=3^{4x-1} \Rightarrow y'=4\cdot 3^{4x-1}\cdot\ln 3=3^{4x-1}\cdot\ln 81$. b) $y=e^{x^2-x} \Rightarrow y'=(2x-1)e^{x^2-x}$.

7. $y=2^{-x^3+2x}+e^{-0,5x} \Rightarrow y'=(-3x^2+2)2^{-x^3+2x}\ln 2-0,5e^{-0,5x}$.

8. Derivada primera y segunda de: $f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x$.

La derivada segunda es: $f''(x)=(2+2x)e^x+\left(2x+x^2\right)e^x=\left(2+4x+x^2\right)e^x$.

9. a) $y=\ln(x^4+x) \Rightarrow y'=\dfrac{4x^3+1}{x^4+x}$. b) $y=\log(3x^2+2) \Rightarrow y'=\dfrac{6x}{3x^2+2}\log e$.

10. $y=\ln\left((2x-1)(x^2-x)\right)$ = $\ln(2x-1)+\ln(x^2-x) \Rightarrow y'=\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{x^2-x}$.

11. Derivada primera y segunda de: $f(x)=x^2\ln(3x)$:

$$f'(x)=2x\ln(3x)+x^2\cdot\frac{3}{3x}=2x\ln(3x)+x \Rightarrow f''(x)=2\ln(3x)+2x\cdot\frac{3}{3x}+1=2\ln(3x)+3.$$

12. $f(x)=\cos\left(2-x^3\right) \Rightarrow f(x)=-\sin\left(2-x^3\right)\cdot\left(-3x^2\right)=3x^2\cdot\sin\left(2-x^3\right)$.

13. $y=3\sin(4x) \Rightarrow y'=3\cdot\cos(4x)\cdot 4=12\cos(4x)$.

14. a) $y=\sin\left(x^2+1\right) \Rightarrow y'=2x\cdot\cos\left(x^2+1\right)$. b) $y=3\sin(4x+1) \Rightarrow y'=12\cos(4x+1)$.

15. $y=\left(\sin(5x)\right)^2 \Rightarrow y'=2\sin(5x)\cdot\cos(5x)\cdot 5=10\sin(5x)\cdot\cos(5x)$.

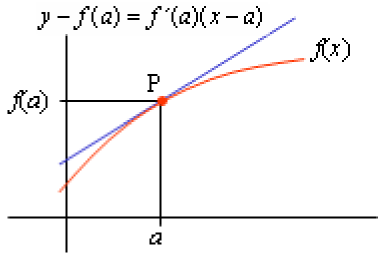
16. $y=\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+3\cos 5x-\operatorname{tag}x^2 \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}-15\operatorname{sen}5x-(1+\operatorname{tag}x^2)\cdot 2x$.

17. a) $y=\cos^3(x^2-2x) \Rightarrow y'=3\cos^2\left(x^2-2x\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2-2x\right)\right)\cdot(2x-2)$.

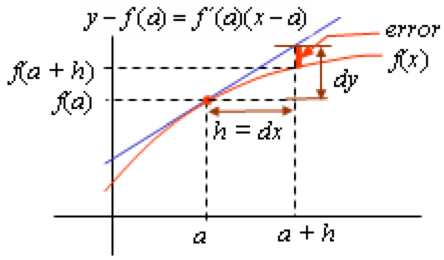
b) $y=\cos^2(x^3-2x) \Rightarrow y'=-2\cos(x^3-2x)\cdot\sin(x^3-2x)\cdot(3x^2-2)$.

18. $y=x\tan(5x-3) \Rightarrow y'=\tan(5x-3)+x\left(1+\tan^2(5x-3)\right)\cdot 5$.

5. Idea de diferencial de una función



Como se indicó anteriormente, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $P(a, f(a))$, viene dada por $y - f(a) = f´(a)(x - a)$.
Esta recta, cuya pendiente es $f´(a)$, es la función lineal que mejor aproxima a $f(x)$ en un entorno del punto a.

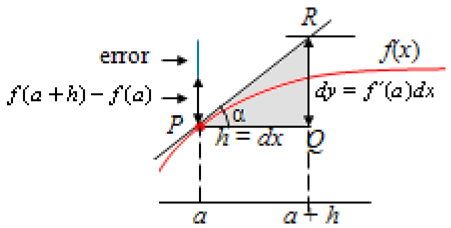


• Se llama diferencial de $f(x)$ en el punto $x = a$ al producto $f´(a)\cdot dx$. Esto es, $dy = df(a) = f´(a)dx$.
En general, si $y = f(x) \rightarrow dy = df(x) = f´(x)dx$

Ejemplos:
a) Para $y = x^3 + 3x^2 - 5x \Rightarrow dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$.

b) Si $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}dx$. c) Si $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$.

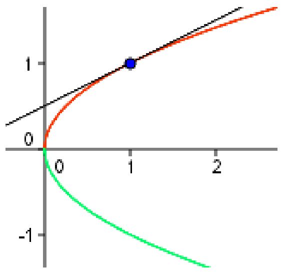
• <u>Cuantitativamente</u>, la diferencial da la diferencia de los valores que toma la recta tangente en los puntos a y $a + h = a + dx$ (en general, puntos: x y $x + dx$).



• <u>Geométricamente</u>, la diferencial es el incremento sobre la recta tangente. Como puede verse en el triángulo PQR de la figura adjunta:

$$\tan\alpha = \frac{RQ}{PQ} = \frac{dy}{dx} = f´(a) \Rightarrow dy = f´(a)dx.$$

• Parece evidente que si $dx = h$ es un valor pequeño, también será pequeño el valor de dy, y más pequeña aún, la diferencia entre el valor sobre la curva $f(x)$ y el valor sobre la recta tangente. (En la figura se indica esa diferencia con el nombre de error).
Esto permite concluir que, en un entorno del punto a, la función $y = f(x)$ y la recta tangente, $y = f(a) + f´(a)(x - a)$, toman valores aproximados: $[y = f(x)] \approx [y = f(a) + f´(a)(x - a)]$
Esto es, haciendo $x = a + h$: $f(a + h) \approx f(a) + f´(a)\cdot h$, para h pequeño.



Ejemplo:
Para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$, se procede así:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y´ = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \text{si } x = 1,\ y(1) = 1,\ y´(1) = ½.$$

Luego, la tangente es: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

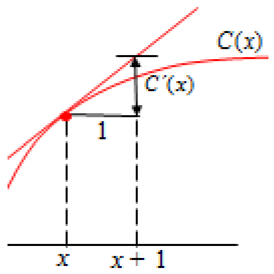
Por tanto, en el punto $x = 1$, la función $y = \sqrt{x}$ puede aproximarse por la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Así, la raíz cuadrada de 1,1, $\sqrt{1,1} \approx \frac{1}{2}\cdot 1,1 + \frac{1}{2} = 1,05$.

<u>Observación</u>: Lo que se hace es utilizar una función lineal, fácil de manejar, para calcular una raíz cuadrada.

- **El concepto de marginalidad en Economía (una aplicación de la diferencial)**

Si se designa por $C(x)$ la función de coste total por la producción de *x* unidades de un determinado producto, cabe preguntarse por el coste adicional que supone la fabricación de una unidad más de producto. Esto es, ¿cuánto vale $C(x+1)-C(x)$?



Como se ha visto más arriba, en general $f(a+h) \approx f(a) + f´(a) \cdot h$.
Si se cambia $f(x)$ por $C(x)$, *a* por *x* y *h* por 1, queda:

$C(x+1) \approx C(x) + C´(x) \cdot 1 \Rightarrow C´(x) \approx C(x+1) - C(x)$.

Luego, el coste de la unidad *x* + 1 viene dado, aproximadamente, por el valor de $C´(x)$. (La diferencia —la diferencial— de los costes es $d\left(C(x)\right) = C´(x) \cdot dx$; si $dx = 1$, entonces $d\left(C(x)\right) = C´(x)$).

A $C´(x)$ se le llama <u>coste marginal</u> y designa el incremento aproximado de la función de costes al producir una unidad más. Por tanto, es el coste de la última unidad producida, la unidad *x* + 1, cuando ya se han fabricado *x*. Este coste es variable: depende del valor de *x*, del número que unidades que se hayan producido anteriormente.

Análogamente, si $I(x)$ y $B(x)$ son las funciones de ingresos y de beneficio obtenidos por la venta de *x* unidades de un producto, sus derivadas $I´(x)$ y $B´(x)$ dan el <u>ingreso y el beneficio marginal</u>. Esto es, el ingreso o beneficio (variable) por la venta de la unidad *x* + 1 de dicho producto.
En los tres casos, $C´(x)$, $I´(x)$ y $B´(x)$ coinciden, aproximadamente, con el coste extra necesario para producir la unidad *x* + 1, y con el ingreso o beneficio adicional al vender la unidad *x* + 1: son aproximaciones por derivadas.

Ejemplos:

a) Si la función de costes viene dada por $C(x) = 0,02x^2 + 4x + 80$ unidades monetarias (u.m.), se tiene:
El coste de fabricar 20 unidades es $C(20) = 0,02 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 + 80 = 168$ u.m.
El coste de fabricar 21 unidades es $C(21) = 0,02 \cdot 21^2 + 4 \cdot 21 + 80 = 172,82$ u.m.,
$\rightarrow$ El coste adicional (exacto) por la fabricación de la unidad nº 21 es la resta:
$C(21) - C(20)$ = 172,82 – 168 = 4,82 u.m.
$\rightarrow$ El coste marginal (aproximado) que supone pasar de fabricar 20 unidades a fabricar 21, es $C´(20)$, la derivada en el punto *x* = 20.
Como $C´(x) = 0,04x + 4 \Rightarrow C´(20) = 0,04 \cdot 20 + 4 = 4,80$ u.m.
Es evidente que la aproximación es bastante buena: se comete un error de 0,02 u.m.
Obsérvese que el cálculo, en cualquier nivel de producción *x*, es bastante sencillo: no hay que hacer la resta $C(x+1) - C(x)$; basta con calcular $C´(x)$). Así, por ejemplo, el coste marginal que supone fabricar la unidad nº 31 es $C´(30) = 5,2$ u.m.

b) Si la función de ingresos para ese mismo producto es $I(x) = 200x - x^2$, entonces la función de beneficios será $B(x) = I(x) - C(x) = 200x - x^2 - \left(0,02x^2 + 4x + 80\right) = -1,02x^2 + 196x - 80$.
La función de ingreso marginal es $I´(x) = 200 - 2x \Rightarrow I´(20) = 160$ u.m.
La función de beneficio marginal es $B´(x) = -2,04x + 196 \Rightarrow B´(20) = 155,2$ u.m.
Naturalmente $B´(x) = I´(x) - C´(x)$ y, por tanto, el beneficio marginal por la fabricación y venta de unidad nº 21 es $B´(20) = I´(20) - C´(20) = 160 - 4,80 = 155,2$ u. m.

6. Derivabilidad de las funciones definidas a trozos

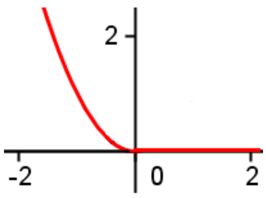
Como se indicó anteriormente, la relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:
“si $f(x)$ es derivable en $x = a$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $x = a$”
Pero, el recíproco no es cierto: “si $f(x)$ es continua en $x = a$ $\not\Rightarrow$ $f(x)$ es derivable en $x = a$”
Esta relación exige que para comprobar la derivabilidad de una función en el punto $x = a$ sean necesarios dos pasos:
1) Comprobar que la función es continua en ese punto. Por tanto, los límites laterales deben ser iguales a $f(a)$. Esto es: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
2) Comprobar que las derivadas laterales son iguales: $f'(a^-) = f'(a^+)$. Esto es:

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

El estudio de derivabilidad debe hacerse para las funciones definidas a trozos en los puntos de unión de los distintos intervalos de definición. (En los demás puntos de definición se siguen los criterios generales).

Ejemplos:

a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua y derivable en $x = 0$.

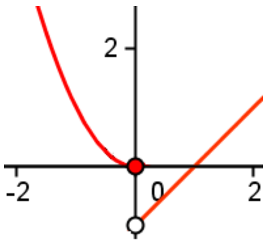


Continua:

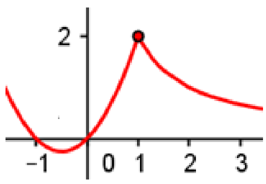
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0 \to \text{Coinciden.}$$

Derivable:
Se hace $f'(x)$, $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (se ha excluido $x = 0$)
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0 \Rightarrow$ La función es derivable en $x = 0$.

b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$.
Por tanto, no puede ser derivable en ese punto.



c) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \ge 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$, pero no es derivable en ese punto.



Continua:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + x\right) = 2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2 \to \text{Coinciden.}$$

Derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 3;\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -2\,.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 0$.
Observa que la función tiene “un pico” en $x = 1$.

6.1. Derivabilidad de funciones definidas a trozos. Casos con parámetros

→ En este contexto suelen plantearse ejercicios como los que siguen:

Ejercicio 1

¿Qué el valor debe tener *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ ax-1 & x\geq 1 \end{cases}$ sea derivable en $x = 1$?

Solución:
La función está definida mediante dos funciones polinómicas, que son derivables siempre. Por tanto, el único punto dudoso es $x = 1$.
En ese punto hay que determinar el valor o valores de *a* que la función sea continua en $x = 1$. Después hay que ver si es derivable o no.
Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax-1\right)=a-1.$$

Coinciden cuando $2=a-1 \Rightarrow a = 3$. Por tanto, la función dada es continua si $a = 3$. (Ahora hay que estudiar si la función es derivable para ese valor).
Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2x+1\right)=3;\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} 3=3.$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en $x = 1$ cuando $a = 3$.

Ejercicio 2

Sea $f(x)=\begin{cases} ax+x^2, & x<3 \\ b+\sqrt{x+1}, & x\geq 3 \end{cases}$. Halla los valores de *a* y *b* para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 3$.
Solución:
Continuidad:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(ax+x^2\right)=3a+9;\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(b+\sqrt{x+1}\right)=b+2.$$

Por tanto, la función será continua cuando $3a+9=b+2$. [1]
Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} a+2x, & \text{si } x<3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & \text{si } x>3 \end{cases}$$ → Las derivadas laterales en $x = 3$ deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(a+2x\right)=a+6;\ \lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{4} \Rightarrow a+6=\frac{1}{4}. \qquad [2]$$

Deben cumplirse las dos condiciones a la vez: $3a+9=b+2$ y $a+6=\frac{1}{4}$.

De $a+6=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{4}-6=-\frac{23}{4}$. Sustituyendo en [1]: $3\left(-\frac{23}{4}\right)+9=b+2 \Rightarrow b=-\frac{41}{4}$.

Por tanto, la función derivable en $x = 3$ (y en todo **R**) es: $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{23}{4}x+x^2, & x<3 \\ -\dfrac{41}{4}+\sqrt{x+1}, & x\geq 3 \end{cases}$.

Problemas Propuestos

Derivada de una función en un punto

1. Calcula la tasa de variación media de:
a) $f(x)=x^2-3x+1$, en el intervalo [1, 4]. b) $g(x)=\sqrt{x+1}$, en el intervalo [–1, 3].
c) $h(x)=2x+1$, en el intervalo [2, 4].

2. Calcula, aplicando la definición, la derivada de:
a) $f(x)=x^2-3x+1$, en el punto $x = 2$. b) $g(x)=\sqrt{x+1}$, en el punto $x = 3$.
c) $h(x)=2x+1$, en cualquier punto.

3. Utilizando la definición, calcula la derivada de $f(x)=x^3-3x$ en el punto $x = 1$.

4. Utilizando la definición, halla la derivada de la función $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}$ en el punto $x = 3$.
Comprueba, mediante las reglas de derivación que tu resultado es correcto.

5. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\le 3\\ -2x+9 & x>3\end{cases}$ es derivable en el punto $x = 3$.

6. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x+1, & x\ge 0\end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

7. En qué puntos no son derivables las funciones:
a) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ b) $f(x)=\sqrt{x}$ c) $f(x)=x^3-5x^2+4$
En cada caso indica el porqué.

8. Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores de una factoría ha determinado que el promedio de piezas producidas por trabajador viene dado por la función $P(t)=25t+5t^2-t^3$, siendo t las horas transcurridas a partir del comienzo de la jornada.
a) ¿Qué media de piezas produce un trabajador en la segunda y tercera horas?
b) ¿Cuál es la tasa de producción de un trabajador a las 3 horas de comenzar la jornada?

9. La temperatura (en °C) de un refresco, h horas después de ser introducido en un frigorífico, viene dada por $T(h)=\dfrac{30h^2+15}{8h^2-2h+1}$.
Halla:
a) Su temperatura cuando $h = 0$, $h = 1$ y $h = 3$
b) La tasa de variación media de la temperatura entre $h = 0$ y $h = 3$.
c) La tasa de variación instantánea de la temperatura cuando $h = 1$ y $h = 3$.

10. El efecto de una anestesia *t* horas después de ser administrada viene dada por la expresión, $A(t)=\dfrac{16-t^2}{16}$ (con $0 \le t \le 4$).
Halla:
a) El cambio medio del efecto durante la primera hora.
b) El cambio medio en el intervalo de tiempo [2, 2+*h*].
c) La variación del efecto en el instante $t = 2$.

Derivabilidad de funciones definidas a trozos

11. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 0 \\ \ln(1+x^2), & \text{si } x > 0 \end{cases}$, es derivable en todo **R**.

12. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2, & x < 0 \\ -1+\sqrt{x+1}, & 0 \le x \end{cases}$ es continua y derivable en todo **R**. Haz un esbozo de su gráfica dando valores.

13. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$.

14. Determina los puntos en los que no son derivables las funciones:
a) $f(x)=|x+1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

Casos con parámetros

15. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ halla:
a) El valor o valores de *a* para que *f* sea continua.
b) El valor o valores de *a* para que *f* sea derivable.

16. ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

17. Halla el valor de *a* que hace que la función $f(x)=\begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**. Para el valor hallado haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2].

18. Demuestra que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{si } x \le 0 \\ x-ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

19. Halla el valor de *a* para que $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2+ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**.

20. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$:

a) ¿Pará qué valores de a y b es continua en $x = 2$?
b) ¿Pará qué valores de a y b es derivable en $x = 2$?

21. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\leq 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto $x = 0$.

22. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\sin(ax) & \text{si } x\leq 0 \\ ax^2+bx+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$.

23. (Selectividad 2011). Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x\leq -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si } x>-1 \end{cases}.$$

Calcúlense a, b para que f sea continua y derivable en $x = –1$.

Cálculo de derivadas

24. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=(1+2x)\cdot(x-x^2)^3$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ c) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x}$

25. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

26. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ b) $f(x)=(2x+2)\sqrt{x^2-2x}$ c) $f(x)=(1-x)^2e^{3x}$

27. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ b) $f(x)=x^2\sqrt{x^4-2x}$ c) $f(x)=\ln(2x^2+2)-\sin\dfrac{x}{2}$

28. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$ b) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ c) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$

29. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{1/x}$ b) $f(x)=x^2e^{1/x}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ d) $f(x)=e^{x^2-\frac{1}{x}}$

30. Dada $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$, halla los valores de $f´(1)$ y $f´´(1)$.

31. Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

32. Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\dfrac{1}{2}$.

33. a) Halla los puntos en los que se anula la derivada de $f(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

b) Halla los puntos en los que es positiva la derivada de $f(x)=2x^3-3x^2$.

c) Halla los puntos en los que es negativa la derivada de $f(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)$.

34. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:

a) $f(x)=-2xe^{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ c) $f(x)=(1-x)^2e^x$ d) $f(x)=\ln(2x^2+2)$

35. Deriva, simplificando los resultados, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2}$ b) $f(x)=(5x-4)^2e^{3x}$ c) $f(x)=\ln\left(3x^2+2x\right)-\cos\left(\dfrac{x-3}{3}\right)$

36. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado cuando se pueda; calcula en todos los casos $f´(1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}$ b) $f(x)=(2-3x)\sqrt{3x^4-2x}$ c) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$

37. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f´(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\sqrt[5]{x^2-2}$

c) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ d) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

38. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=2^{3x^2-x}$ b) $f(x)=\left(\cos x^2\right)^3$ c) $f(x)=\left(\cos 2x\right)^3$ d) $y=\operatorname{tag}(3x+2)$

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2)$ f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3$ g) $y=\arcsin 3x$ h) $y=\arcsin\dfrac{x}{3}$

i) $y=\sqrt{9-x^2}$ j) $y=\arcsin x^3$ k) $y=\sqrt{1-x^6}$ l) $y=\arccos(1+x)$

m) $y=\arctan 4x$ n) $y=\arctan\dfrac{x}{4}$ o) $y=\ln\left(16+x^2\right)$ p) $y=\arctan\sqrt{x}$

Tangente a una curva

39. Halla y representa gráficamente la recta tangente a $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el punto $x=0,5$.

40. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:

a) $f(x)=-x^2+4x$ en el punto $x = 3$. b) $y=\dfrac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$. d) $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1}$ en el punto $x = 1$.

e) $f(x)=e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$. f) $f(x)=\ln(x-3)$ en el punto $x = 4$.

41. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)).

42. La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\dfrac{2}{3}$. ¿Cuál debe ser el valor de b?

43. Halla la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=x$ en el punto (1, 1).

44. Determina los puntos de la curva $y=x^3-3x^2+2$ en los cuales la recta tangente es paralela $y=9x+5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

45. Determina el valor de p para que la recta tangente a la curva $y=e^{px}$, en el punto de abscisa $x = 1$, pase por el origen de coordenadas.

46. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ en el punto de abscisa $x = e$.

47. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x-e^{-3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

48. Halla el valor de n para que la recta de ecuación $y=5x+n$ es tangente a $f(x)=x^2-x+4$ en el punto de abscisa 3.

49. La recta tangente a la curva $y=x^3$ tiene pendiente 3 y pasa por el punto (0, –2). ¿Cuál es el punto de tangencia?

Diferencial de una función

50. Halla la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $u = \cos^2 x$ d) $u = \sqrt{x+1}$

51. ¿Cuál es el incremento (la variación aproximada) de cada una de las siguientes funciones cuando, partiendo de x = 2, la variable x se incrementa en 0,2?

a) $f(x) = \ln(x-1)$ b) $f(x) = xe^{2-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

52. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64} = 8$, utilizando la diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x}$, halla el valor aproximado de $\sqrt{65}$.

Aplicaciones a la economía

53. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0{,}1x^2 + 3x + 100$ unidades monetarias (u.m.). Si todas las unidades producidas se venden a un precio (en u.m.) dado por $p(x) = 25 - 0{,}3x$, calcula:

a) El coste marginal por la producción de la décima unidad.
b) El incremento exacto por la producción de la décima unidad.
c) La función de ingresos y de beneficios.
d) El ingreso y beneficio marginal por la venta de la décima unidad.

54. La ganancia anual de una empresa es $G(t) = \sqrt{144 + 2t + 4t^2} - 12$, t en años, contado desde el 1 de enero de 2010.

a) ¿A qué ritmo estaba aumentando la ganancia a principios de 2015?
b) ¿En qué porcentaje?

55. El beneficio de una multinacional viene dado por la expresión $B(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}8x - 2{,}1$ millones de euros; siendo x los años trascurridos desde comienzos de 2010. Se pide:

a) ¿Cuánto fue la tasa de crecimiento medio del beneficio durante los años 2014 y 2015?
b) ¿Cuánto valía esa tasa al comenzar el año 2017? ¿Qué porcentaje de crecimiento supuso?
c) ¿En qué momento el beneficio deja de crecer?

56. La función de coste total de un determinado producto es $C(x) = 5000 + 3x - 0{,}05x^2 + 0{,}001x^3$ (unidades monetarias: u.m.).

Halla:

a) La función de coste medio unitario. ¿Cuánto cuesta fabricar 100 piezas? ¿A cuánto sale cada una?
b) La función de coste marginal.
c) El coste marginal de la unidad número 101. Compra el resultado con el coste unitario cuanto se fabrican 100 piezas; comenta la diferencia.

57. Contesta a las mismas preguntas para la función $C(x) = 4x - 2\sqrt{x+100}$.

58. La función de ingreso total por la venta de *x* unidades de un determinado producto es $I(x) = \frac{500x}{x+4}$.
Halla:
a) La función de ingreso marginal.
b) El ingreso marginal por la unidad 51.

59. El coste de fabricación de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,2x^2 + 4x + 57$ (en u.m.). Si todas las unidades producidas se venden a un precio (también en u.m.) dado por $p(x) = 9 - 0,05x$, calcula:
a) El coste marginal por la producción de la unidad veintiuna.
b) La función de ingresos y de beneficios.
c) El ingreso y beneficio marginal por la venta de la unidad veintiuna.

60. Contesta a las mismas preguntas del problema anterior, siendo:
1) $C(x) = 0,25x^2 + 3x + 67$ e $I(x) = 90x - 0,2x^2$. Unidad vigésimo quinta.
2) $C(x) = 0,1x^3 - 5x^2 + 500x + 200$ y $p(x) = 3000 - 0,5x$. Unidad 101.

61. A interés continuo, un capital C_0 se convierte al cabo de *t* años en $C(t) = C_0 e^{rt}$, siendo *r* la tasa de interés anual (en tanto por 1). Si se considera un capital inicial de 50000 euros a un interés del 3%, halla la tasa de cambio instantáneo de $C(t)$. ¿A qué ritmo está creciendo el capital a los 6 años, y a los 10 años?

Otros problemas

62. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halla y simplifica la derivada de las funciones:

a) $y = \ln\left(x^2 + 5x\right)^3$ b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 2x}$ c) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

63. Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = \ln(2x-1)$ c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

64. En determinadas condiciones una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 2 + 0,5e^{0,4x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y *x* el tiempo en días desde el momento presente. Calcula:
a) La tasa de crecimiento al terminar el 2º, 4º y 6º día.
b) ¿En qué momento la población está creciendo a un ritmo de dos mil mosquitos por día?

65. Una población de conejos se ajusta al número dado por la función $P(t) = \frac{20000}{1+199e^{-0,42t}}$, *t* en años desde el momento presente.
a) ¿Cuántos conejos hay actualmente? ¿Y dentro de 10 años?
b) ¿A cuánto tiende su número?
c) ¿Cuál es la tasa de crecimiento ahora y dentro de 10 años? ¿Qué porcentaje de crecimiento representan dichas tasas?

66. Una población de 100000 bacterias se introduce en un cultivo, siendo su número al cabo de t horas $f(t)=10^5\left(1+\ln\left(t^2+1\right)\right)$.
a) ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 4 horas? ¿Cuál es su tasa de crecimiento en ese instante?
b) ¿En qué instante la velocidad de crecimiento es de 70000 bacterias/hora?

67. La eficacia de un analgésico t horas después de ser administrado viene dada por la expresión $E(t)=1-\cos^2 t \ \ (0\le t\le \pi)$
Halla:
a) La variación de la eficacia (mejoría) cuando t = 1, t = 2 y t = 3.
b) El instante en el que la mejoría vale 1.

68. (Propuesto en Selectividad, 2011)
Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm), en una ciudad está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes, por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}$.
La evolución del tamaño de población en esta ciudad en t años se estima que está dado por la relación, $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?

69. El radio se descompone radiactivamente de acuerdo con la función $r(t)=n\cdot e^{-0{,}0004t}$ 1, siendo n la cantidad inicial de radio y t el tiempo en años. Calcula la velocidad de descomposición de 10 gramos de radio a los 50, 500 y 5000 años.

Soluciones

1. a) 2. b) 0,5. c) 2. **2**. a) 1. b) 1/4. c) 2. **3**. 0.
4. –5. **5**. Sí. **6**. No.
7. a) x = –3. b) $x \le 0$. c) Siempre es derivable.
8. a) 32. b) 28. **9**. a) 15; 6,4; 4,25. b) –3,58. c) –4,29 ºC/h, –0,23 ºC/h.
10. a) $-\frac{1}{16}$. b) $-\frac{4+h}{16}$. c) –1/4. **13**. Derivable siempre.
14. a) x = –1. b) x = 0; x = 2. **15**. a) a = 1 o a = 2. b) a = 1.
16. a = 2. **17**. a = 1. **19**. a = 0.
20. a) $b=-2a$, con a arbitrario. b) a = –2 y b = 4.
21. a = 2 y b = 0. **22**. b = 5; $a=\frac{5}{2}$. **23**. a = 1/2; b = 3.
24. a) $f'(x)=\left(3+2x-14x^2\right)\left(x-x^2\right)^2$; –52. b) $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $\frac{1}{2}$. c) $f'(x)=\frac{2x-1}{2x^2-2x}$; $-\frac{3}{4}$.
25. a) $f'(x)=\frac{2x^4-3x^2+3}{\left(x^2-1\right)^2}$; no existe. b) $f'(x)=2x\left(1+x\right)e^{2x-2}$; 0.
c) $f'(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x)$; 0.

26. a) $f'(x)=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$. b) $f'(x)=\dfrac{4x^2-4x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. c) $f'(x)=\left(3x^2-4x+1\right)e^{3x}$.

27. a) $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$. b) $f'(x)=\dfrac{4x^5-5x^2}{\sqrt{x^4-2x}}$. c) $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

28. a) $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$. b) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}+2x}$. c) $\dfrac{-1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$. d) $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2(x+3)}$.

29. a) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$. b) $f'(x)=(2x-1)e^{1/x}$. c) $\dfrac{e^{1/x}}{x^2\left(1+e^{1/x}\right)^2}$. d) $f'(x)=\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x^2-\frac{1}{x}}$.

30. $f'(x)=\dfrac{-10x^2-6}{(x^2-3)^4}$; $f''(x)=\dfrac{60x^3+108x}{(x^2-3)^5}$; –1; –21/4.

31. $x=\pm\dfrac{1}{2}$; $x=0$ o $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **32**. $\dfrac{40}{27}$; $\dfrac{16}{3}$. **33**. a) 0. b) $x<0$ o $x>1$. c) $x<-1$.

34. a) $f'(x)=-2e^{x^2}(1+2x^2)$; –2. b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)\cdot\left(\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)$; 0.

c) $f'(x)=\left(x^2-1\right)e^x$; –1. d) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; 0.

35. a) $f'(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$. b) $f'(x)=(15x-2)(5x-4)e^{3x}$. c) $f'(x)=\dfrac{6x+2}{3x^2+2x}+\sin\left(\dfrac{x-3}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}$.

36. a) $f'(x)=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2}$; no existe. b) $f'(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{6x^3-1}{\sqrt{3x^4-2x}}$; –8.

c) $f'(x)=\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2}$; 0.

37. a) $f'(x)=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{\left(x^2-1\right)^2}$; no existe. b) $f'(x)=2x(1+x)e^{2x-2}$; 0. c) $\dfrac{2x}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^2-2\right)^4}}$; $-\dfrac{2}{5}$.

d) $f'(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x)$; 0.

38. a) $y'=(6x-1)\cdot 2^{3x^2-1}\ln 2$. b) $f'(x)=-6x\cdot\sin x^2\cdot\left(\cos x^2\right)^2$. c) $f'(x)=-6\cdot\sin 2x\cdot(\cos 2x)^2$.

d) $y'=\dfrac{3}{\cos^2(3x+2)}$. e) $y'=\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$. f) $y'=3(x+2)^2\left(1+\mathrm{tag}^2\,(x+2)^3\right)$.

g) $y'=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$. h) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. i) $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$. j) $y'=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. k) $y'=\dfrac{-3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$.

l) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x(-x-2)}}$. m) $y'=\dfrac{4}{1+16x^2}$. n) $y'=\dfrac{4}{16+x^2}$. o) $y'\dfrac{2x}{16+x^2}$. p) $y'=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

39. $y=-4x+4$

40. a) $y=-2x+9$. b) $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$. c) $y=-x+4$. d) $y=-\dfrac{18}{25}x+\dfrac{48}{25}$. e) $y=-x+3$.

f) $y=x-4$.

41. $y = 2x$. **42**. $b = -\frac{7}{3}$. **43**. $y = x^2 - x + 1$.

44. (–1, –2) y (3, 2). $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$. **45**. p = 1.

46. $y = \frac{1}{e}$. **47**. $y = 4x - 1$. **48**. –5. **49**. (1, 1).

50. a) $dy = \left(6x^2 - 6x\right)dx$. b) $dy = -e^{-x}dx$. c) $du = 2\cos x \cdot (-\sin x)dx$. d) $du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$.

51. a) 0,2. b) –0,2. c) 0,1. **52**. 8,0625.

53. a) 4,8. b) 4,9. c) $I(x) = 25x - 0,3x^2$; $B(x) = -0,4x^2 + 22x - 100$. d) 19,6; 14,8.

54. a) 1,32. b) 33,5% **55**. a) 0,8. b) 0,4; 7,1%. c) 9.

56. a) $c(x) = \frac{5000}{x} + 3 - 0,05x + 0,001x^2$; 58 por pieza. b) $C'(x) = 3 - 0,1x + 0,003x^2$. c) 23.

57. a) $c(x) = 4 - \frac{2\sqrt{x+100}}{x}$; 3,717. b) $C'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{x+100}}$. c) 3,93.

58. a) $I'(x) = \frac{2000}{(x+4)^2}$. b) 0,69.

59. a) 12. b) $I(x) = 9x - 0,05x^2$; $B(x) = -0,25x^2 + 5x - 57$. c) 7; –5.

60. 1) 15; $I(x) = 90x - 0,2x^2$; $B(x) = -0,45x^2 + 87x - 67$; 80,4; 65,4.

2) 2500; $I(x) = 3000x - 0,5x^2$; $B(x) = -0,1x^3 + 4,5x^2 + 2500x - 200$; 2900; 400.

61. $C'(t) = 1500e^{0,03t}$; 1795,83€/año; 2024,79 €/año.

62. a) $y' = \frac{6x+15}{x^2+5x}$. b) $f'(x) = \frac{2x-1}{2x^2-2x}$. c) $y' = \frac{-4x}{x^4-1}$.

63. a) $f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. b) $f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot((n-1)!)\cdot 2^n}{(2x-1)^n}$. c) $f^{n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

64. a) 450, 990 y 2200 mosquitos/día. b) 5,758.
65. a) 100; 5200. b) 2000. c) 41,79, 1579; 20,9%, 31,45%.
66. a) 383321; 47059 bacterias/hora. b) t = 2,45 h.
67. a) 0,91; –0,76; –0,28. b) $t = \pi/4$.
68. 0,24 ppm.
69. –0,00392, –0,00327, –0,00054 g/año.