Tema 8. Integrales

1. Concepto de integral indefinida

La derivada de una función permite conocer la tasa de variación (el cambio instantáneo) de un determinado fenómeno a partir de su función. Con la integración, el proceso es inverso: se trata de conocer la función inicial a partir de su derivada: partiendo del estudio de la variación de un fenómeno, llegar a conocer la función que lo explica.

1.1. Primitiva de una función

Si se conoce una función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x)$ $\to$ Se aplican las fórmulas.
El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama integración.

$F(x) \to$ (derivación) $\to$ $F'(x) = f(x)$ $\to$ (integración) $\to$ $F(x)$

A la función $F(x)$ se le llama primitiva o antiderivada de la función $f(x)$. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Ejemplos:
a) Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces, una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.
Observación:
Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando:
$F'(x) = \left(x^2 + 3x + 14\right)' = 2x + 3 = f(x)$. Todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + c$, donde c es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$.

b) Si $F(x) = \ln(3x+1)$, su derivada es $F'(x) = \dfrac{3}{3x+1}$; en consecuencia, una primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ será $F(x) = \ln(3x+1)$.

$\to$ Todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x+1) + c$ son primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$.

c) Para hallar una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$ hay que saber la fórmula de la "derivada de la raíz"; esto es, que si $y = \sqrt{x^3+17} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$. En consecuencia, una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$ será $y = F(x) = \sqrt{x^3+17}$.
Observación:
A lo largo de este tema se estudiarán los métodos básicos de integración, pero si no se conocen con soltura (y de memoria) las fórmulas de derivación el trabajo resultará inútil.

1.2. Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x)+c$, donde c es un número que se llama constante de integración. Se escribe así:

$\int f(x)dx = F(x)+c$, (dx indica la variable de integración; de derivación).

En consecuencia, la derivada y la integral son "operaciones" inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \quad \text{y} \quad \int\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)dx = f(x)$$

En la segunda igualdad debería sumarse una constante. No se hace para que quede más clara la idea fundamental.

Ejemplos:

a) $\int (2x+3)dx = x^2+3x+c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+c\right) = 2x+3$.

b) $\int \frac{3}{3x+1}dx = \ln(3x+1)+c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(\ln(3x+1)+c\right) = \frac{3}{3x+1}$.

c) $\int 4x^3dx = x^4+c$, pues $\frac{d}{dx}\left(x^4+c\right) = 4x^3$.

1.3. Propiedades de la integral indefinida

1) La <u>integral de un número por una función</u> es igual al número por la integral de la función:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Esto significa que los números que multiplican a una función pueden *entrar* y *salir* del integrando, según convenga. Así, por ejemplo: $\int f(x)dx = \frac{1}{k}\int kf(x)dx = k\int \frac{f(x)}{k}dx$.

Esta propiedad facilita el cálculo de integrales mediante el sencillo procedimiento de ajustar constantes.

Ejemplos:

a) Para hallar $\int 8x^3dx$ puede verse el ejemplo c) anterior y escribir:

$\int 8x^3dx = \int 2\cdot 4x^3dx = 2\left(\int 4x^3dx\right) = 2\left(x^4+c\right) = 2x^4+c´ \to$ (puede sustituirse $c´$ por c).

b) Obsérvese con un caso particular lo que se ha dicho más arriba sobre que la integral y la derivada son "operaciones" inversas:

$\to$ Primero se deriva, después se integra:

$\int\left(\frac{d}{dx}\left(4x^3\right)\right) = \int\left(12x^2\right)dx = \int\left(4\cdot 3x^2\right)dx = 4\int 3x^2dx = 4x^3+c$ (Se escribe la constante c).

$\to$ Primero se integra, después se deriva: $\frac{d}{dx}\left(\int\left(4x^3\right)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(x^4+c\right) = 4x^3 \to$ No hay c.

2) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Las propiedades 1) y 2) indican que la integral se comporta como un *operador lineal*.

Ejemplos:

a) Número por función:

$\to \int 5(2x+3)\,dx = 5\int (2x+3)\,dx = 5\left(x^2+3x+c\right) = 5x^2+15x+c'$ (da igual poner c que c').

$\to \int \frac{2x+3}{4}dx = \frac{1}{4}\int (2x+3)\,dx = \frac{1}{4}\left(x^2+3x+c\right) = \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+c$.

OJO: Esta propiedad solo se refiere a factores numéricos. Así: $\int x(2x+3)dx \neq x\int (2x+3)dx$.

b) Para hallar $\int 3x^3dx$ se escribe:

$\int 3x^3dx = \int 3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)x^3dx = 3\cdot\frac{1}{4}\left(\int 4x^3dx\right) = \frac{3}{4}\left(x^4+c\right) = \frac{3}{4}x^4+c \to$ (se deja la misma c).

c) Suma de funciones:

$\int \left(4x^3-2x\right)dx = \int 4x^3dx - \int 2xdx = \left(x^4+c_1\right)-\left(x^2+c_2\right) = x^4-x^2+c$ (las constantes c_1 y c_2 no son necesarias; basta con poner una sola c).

d) Sabiendo que $\int \cos xdx = \sin x + c$ y que $\int e^xdx = e^x + c$ (recuerda las derivadas de la función seno y de la exponencial), se obtienen:

$\to \int k\cos xdx = k\sin x + c \Rightarrow \int (-3\cos x)\,dx = -3\sin x + c$.

$\to \int \frac{\cos x}{k}dx = \frac{\sin x}{k}+c \Rightarrow \int \frac{\cos x}{5}dx = \frac{1}{5}\sin x + c$.

$\to \int pe^xdx = pe^x + c \Rightarrow \int 2e^xdx = 2e^x + c$; $\int \frac{1}{5}e^xdx = \int \frac{e^x}{5}dx = \int \frac{e^xdx}{5} = \frac{1}{5}e^x + c$.

$\to \int \left(3\cos x - 2e^x\right)dx = 3\int \cos xdx - 2\int e^xdx = 3\sin x - 2e^x + c$.

• Las propiedades anteriores se utilizan según convenga, de dentro a fuera o de fuera a dentro. Así, por ejemplo:

$$18\int \frac{1}{3x+1}dx = 6\cdot 3\int \frac{1}{3x+1}dx = 6\int \frac{3}{3x+1}dx = 6\left(\ln(3x+1)+c\right) = 6\ln(3x+1)+c.$$

Siempre se buscará un integrando del que se sepa hallar la primitiva.

Igualmente:

$$8\int \left(x^3-x\right)dx = 8\int x^3dx - 8\int xdx = 2\int 4x^3dx - 4\int 2xdx = 2x^4-4x^2+c.$$

2. Relación de integrales inmediatas

Las integrales de las funciones usuales, que conviene saber de memoria, son las siguientes. (Para agilizar la escritura, y por falta de espacio, cuando en la función compuesta se escribe f debería escribirse $f(x)$; por lo mismo, en todos los casos se omite la constante de integración, c).

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
Función simple	**Función compuesta**	**Ejemplos**
$\int kdx = kx$		$\int dx = x$; $\int(-4)dx = -4x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int f^n \cdot f'dx = \frac{f^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$; $\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}}dx = \sqrt{f}$	$\int \frac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x}}dx = \sqrt{5x^2-3x}$
$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$	$\int \frac{f'}{f}dx = \ln f$	$\int \frac{4}{x}dx = 4\ln x$; $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \ln(x^3+1)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'dx = \frac{a^f}{\ln a}$	$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$; $\int 3^{x^2} \cdot 2xdx = \frac{3^{x^2}}{\ln 3}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'dx = e^f$	$\int e^{x^2} \cdot 2xdx = e^{x^2}$; $\int e^{-3x}(-3)dx = e^{-3x}$
$\int \cos xdx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos fdx = \sin f$	$\int 5\cos(5x-2)dx = \sin(5x-2)$
$\int \sin xdx = -\cos x$	$\int f' \sin fdx = -\cos f$	$\int 6x^2 \sin\left(2x^3\right)dx = -\cos\left(2x^3\right)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$ $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = \tan f$ $\int (1+\tan^2 f)\cdot f'dx = \tan f$	$\int \frac{4}{\cos^2 4x}dx = \tan 4x$ $\int \left(1+\tan^2(3x+2)\right)\cdot 3dx = \tan(3x+2)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = \arcsin f$	$\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx = \arcsin(\ln x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = \arccos f$	$\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \arccos e^x$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}dx = \arctan f$	$\int \frac{4}{1+(4x)^2}dx = \arctan 4x$

Ejemplos:

a) $\int (3+x)^4 dx = \frac{(3+x)^5}{5} + c$.

b) $\int (2x-3)e^{x^2-3x}dx = e^{x^2-3x} + c$.

c) $\int (2x^3-1)^5 \cdot 6x^2 dx = \frac{(2x^3-1)^6}{6} + c$.

d) $\int \frac{2x}{x^2+6}dx = \ln(x^2+6) + c$.

e) $\int (\sin x)^2 \cdot \cos xdx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c \to$ Observa: $\int f^2 \cdot f'dx = \frac{f^3}{3}$, con $f = \sin x$.

3. Técnicas y métodos de integración

Cuando el cálculo de una integral no sea inmediato, lo que sucede cuando el integrando no coincide con alguna de las fórmulas anteriores, se recurrirá a algún método de integración. Estos métodos son procedimientos que permiten escribir el integrando inicial en otro equivalente cuya integral sea más sencilla de calcular.

3.1. Descomposición elemental

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas… (Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral).

Ejemplos:

a) $\int (6x^2+5x-1)\,dx \to$ Se descompone en suma de integrales.

$$\int (6x^2+5x-1)\,dx = 2\int 3x^2dx + \frac{5}{2}\int 2xdx - \int dx = 2x^3+\frac{5}{2}x^2-x+c.$$

b) $\int (x^2-3)^2 dx \to$ Se hace el cuadrado de la expresión.

$$\int (x^2-3)^2 dx = \int (x^4-6x^2+9)dx = \int x^4dx - \int 6x^2dx + \int 9dx = \frac{x^5}{5}-2x^3+9x+c.$$

c) $\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx \to$ Se hace la división del integrando.

$$\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx = \int \left(5+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx = \int 5dx + 4\int \frac{1}{x}dx - 3\int x^{-2}dx = 5x+4\ln x+\frac{3}{x}+c.$$

d) $\int \frac{4}{5-6x}dx \to$ Se ajustan las constantes buscando la integral del logaritmo: $\int \frac{-6}{5-6x}dx$.

$$\int \frac{4}{5-6x}dx = 4\cdot\frac{-1}{6}\int \frac{-6}{5-6x}dx = -\frac{4}{6}\ln(5-6x)+c.$$

e) $\int 4xe^{x^2-5}dx \to$ Se ajustan constantes buscando que quede $\int f´(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$.

$$\int 4xe^{x^2-5}dx = 2\cdot\int 2xe^{x^2-5}dx = 2e^{x^2-5}+c.$$

f) $\int \frac{3}{x^4}dx \to$ Se escribe como una potencia de exponente negativo; después se ajustan constantes. Así: $\int \frac{3}{x^4}dx = \int 3\cdot x^{-4}dx = 3\int x^{-4}dx = 3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+c = \frac{1}{x^3}+c$.

g) Igualmente:

$$\int \frac{1}{(1+3x)^2}dx = \int (1+3x)^{-2}dx = \frac{1}{3}\int 3(1+3x)^{-2}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{3(1+3x)}+c.$$

3.2. Ejercicios de integración por descomposición elemental

Ejercicio 1. Calcula la integral $\int 6x\left(x^2+4\right)^2 dx$ del siguiente modo:

1) Operando el integrando; 2) Ajustando constantes y aplicando la fórmula $\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$.

<u>Solución</u>:

1) Operando se tiene:

$$\int 6x\left(x^2+4\right)^2 dx = \int 6x\left(x^4+8x^2+16\right)dx = \int\left(6x^5+48x^3+96x\right)dx =$$

$$= \int 6x^5dx + \int 48x^3dx + \int 96xdx = x^6 + 12\int 4x^3dx + 48\int 2xdx = x^6+12x^4+48x^2+c\,.$$

2) Ajustando constantes:

$$\int 6x\left(x^2+4\right)^2 dx = 3\cdot\int 2x\left(x^2+4\right)^2 dx = \left(3\cdot\int f'\cdot f^2 dx = 3\cdot\frac{f^3}{3}\right) = 3\cdot\frac{\left(x^2+4\right)^3}{3}+c = \left(x^2+4\right)^3+c$$

Ejercicio 2. Calcula ajustando constantes las integrales: a) $\int \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$; b) $\int \frac{5x}{2\left(x^2+1\right)}dx$

<u>Solución</u>:

Hay que saberse las integrales:

a) $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)}+c$; b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left(f(x)\right)+c$.

Con esto:

a) Como la derivada del radicando, $f(x)=x^2+1$, es $f'(x)=2x$, la integral inicial puede escribirse e integrarse como sigue:

$$\int \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{5}{2}\sqrt{x^2+1}+c\,.$$

b) Como en el caso a), al ser $f'(x)=2x$, la integral inicial es:

$$\int \frac{5x}{2\left(x^2+1\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{5}{2}(2x)}{\left(x^2+1\right)}dx = \frac{5}{4}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)}dx = \frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)+c\,.$$

Ejercicio 3. Calcula ajustando constantes las integrales: a) $\int \sin(3x)dx$; b) $\int \cos\left(\frac{5x}{2}\right)dx$.

<u>Solución</u>:

Hay que saber:

$$\int f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)dx = -\cos\left(f(x)\right)+c;\quad \int f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)dx = \sin\left(f(x)\right)+c\,.$$

Con esto:

a) $\int \sin(3x)dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot\sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)+c$.

b) $\int \cos\left(\frac{5x}{2}\right)dx = \frac{2}{5}\cdot\int\frac{5}{2}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)dx = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{5x}{2}\right)+c$.

4. Integración por cambio de variable

Aunque la descomposición elemental (el ajuste de constantes) suele dar resultado en muchos casos, no siempre es sencillo, pues hay veces que no se *ve* lo que puede hacerse. Por eso, un método alternativo y válido para casos más complicados es el del cambio de variable.

Este método consiste en hacer un cambio de variable en el integrando ($x = g(t)$ o $t = h(x)$, según convenga) de manera que la integral inicial resulte más fácil de calcular.
El proceso es el siguiente:
Para calcular la integral $\int f(x)dx$, si se hace $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$.

Con esto, puede escribirse: $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

Aunque, aparentemente, está integral se vea más difícil, de lo que se trata es de que la nueva integral resulte casi inmediata: que se ajuste a alguna de las fórmulas de integración.
Muchas veces no se consigue, pues el cambio puede ser poco afortunado; en ese caso, habrá que hacer otro cambio. (A este nivel, suele indicarse el cambio adecuado).
→ Tres cosas más:
1) El cambio también afecta a la *dx*. Ya se ha indicado arriba: $dx = g'(t)dt$.
2) Casi siempre habrá que recurrir a algún ajuste de constantes en algún momento del proceso.
3) Una vez resuelta la integral en la variable *t* hay que deshacer el cambio inicial, pues la solución debe darse en función de *x*.

Ejemplos:
a) Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse el cambio: $t = 2x-3$.

Luego: $t^5 = (2x-3)^5$; $dt = 2dx \to dx = \frac{1}{2}dt$.

Sustituyendo en la integral inicial:

$$\int (2x-3)^5 dx = \int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{12}t^6 + c = \frac{1}{12}(2x-3)^6 + c.$$

b) Para calcular $\int e^{4x}dx$, si se hace: $u = 4x \Rightarrow du = 4dx \to dx = \frac{1}{4}du$.

Sustituyendo los cambios se tiene: $\int e^{4x}dx = \int e^u\cdot\left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c$.

c) La integral $\int \frac{4}{5-6x}dx$, hecha anteriormente mediante ajuste de constantes, se puede resolver haciendo el cambio: $t = 5-6x \Rightarrow dt = -6dx \to dx = -\frac{1}{6}dt$.

Luego, $\int \frac{4}{5-6x}dx = \int \frac{4}{t}\left(-\frac{1}{6}dt\right) = -\frac{4}{6}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{4}{6}\ln t + c = -\frac{4}{6}\ln(5-6x) + c$.

<u>Observación</u>: En ninguno de los casos anteriores es imprescindible cambiar de variable. Así, en el ejemplo a), puede hacerse:

$$\int (2x-3)^5 dx = \frac{1}{2}\int 2(2x-3)^5 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^6}{6} + c = \frac{1}{12}(2x-3)^6 + c.$$

4.1. Algunos cambios de variable estándar

Como ya se ha indicado, es frecuente que se indique un cambio adecuado. De hecho, esto cambios se pueden generalizar para distintos tipos de integrales. Aquí, para practicar el método, se darán los cambios.

Ejercicio 1

Halla, mediante el cambio $\sqrt{1+x}=u$, la integral $\int x\sqrt{1+x}dx$.

(Observa que con este cambio puede evitarse la raíz cuadrada).

Solución:

Si $\sqrt{1+x}=u \Rightarrow 1+x=u^2 \Rightarrow x=u^2-1;\ dx=2udu$.

Llevando estos valores al integrando, resulta:

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \int\left(u^2-1\right)\cdot u\cdot\left(2udu\right)=\int\left(2u^4-2u^2\right)du=2\int u^4du-2\int u^2du=\frac{2}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+c.$$

Deshaciendo el cambio, $u=\sqrt{1+x}$, se tendrá

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+c.$$

Ejercicio 2

Calcula, mediante el cambio $e^x=t$, la integral $\int\frac{e^x}{2+e^x}dx$.

Solución:

Si $e^x=t \Rightarrow e^xdx=dt$.

Por tanto: $\int\frac{e^x}{2+e^x}dx=\int\frac{1}{2+e^x}\cdot e^xdx=\int\frac{1}{2+t}dt=\ln\left(2+t\right)+c=\ln\left(2+e^x\right)+c$.

Ejercicio 3

Calcula, haciendo el cambio $\sin x=t$, la integral $\int\left(\sin^2 x\right)\cdot\cos xdx$.

Solución:

Si $\sin x=t \Rightarrow \cos xdx=dt$.

Sustituyendo: $\int\left(\sin x\right)^2\cdot\cos xdx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{(\sin x)^3}{3}+c$.

Ejercicio 4

Calcula, haciendo el cambio $\ln x=t$, la integral $\int\frac{2\ln x}{x}dx$.

Solución:

Si $\ln x=t \Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$. Además, la integral dada puede escribirse de otra manera.

$$\int\frac{2\ln x}{x}dx=2\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \to \text{Sustituyendo: } 2\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=2\int tdx=t^2+c.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int\frac{2\ln x}{x}dx=\left(t^2+c\right)=\left(\ln x\right)^2+c.$$

5. Integración de fracciones racionales

Las fracciones racionales son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el denominador es de grado menor o igual que el numerador, la expresión anterior puede escribirse así: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ y $R(x)$ son, respectivamente, el cociente y el resto de la división. (Como debe saberse, el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$)

Con esto: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

Aquí estudiaremos solo dos casos:

1) cuando $Q(x)$ es de primer grado: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$.

2) cuando $Q(x)$ es de segundo grado: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$.

5.1. Fracciones racionales con denominador de primer grado: $Q(x) = ax+b$

La descomposición se hace dividiendo.

La división de $P(x):(ax+b)$ puede hacerse por cualquier método; así, por ejemplo, si a = 1, se hace aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplos:

a) La expresión $\dfrac{x^2-3x+4}{x}$ puede escribirse como suma de fracciones dividiendo cada término del numerador por x: $\dfrac{x^2-3x+4}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x} = x-3+\dfrac{4}{x}$.

Con esto:

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x}dx = \int \left(x-3+\frac{4}{x}\right)dx = \int xdx - \int 3dx + \int \frac{4}{x}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln x + c.$$

b) La expresión $\dfrac{2x^3-3x+2}{x+1} = 2x^2-2x-1+\dfrac{3}{x+1}$. Esta descomposición se obtiene dividiendo por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & & -2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}$$

$\to$ El cociente de la división es $C(x) = 2x^2-2x-1$; el resto, r = 3.

Con esto, la integral $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx$ se hace como sigue:

$$\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx = \int \left(2x^2-2x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \text{(descomponiendo en sumas de integrales)}$$

$$= \int 2x^2dx - \int 2xdx - \int dx + \int \frac{3}{x+1}dx = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 3\ln(x+1) + c.$$

5.2. Fracciones racionales con denominador de segundo grado: $Q(x)=ax^2+bx+c$.
Método de descomposición en fracciones simples

Si el numerador, $P(x)$, es de grado mayor o igual que 2, se hace la división, obteniéndose:

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}=C(x)+\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\Rightarrow\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx=\int C(x)dx+\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$$

La única integral que presenta dificultades es la segunda. Para resolverla se recurre al método de descomposición de la expresión $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ en suma de fracciones simples.

Este método presenta distintas opciones dependiendo de las raíces de $ax^2+bx+c=0$.

Caso 1. Si hay dos raíces reales simples: $x = x_1$, $x = x_2 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

La descomposición que se hace es: $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}$.

Con esto:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{A}{a(x-x_1)}dx+\int\frac{B}{(x-x_2)}dx=\frac{A}{a}\ln(x-x_1)+B\ln(x-x_2)+c$$

Los valores de A y B se determinan por el llamado método de *identificación de coeficientes*.

Ejemplos:

a) Para hallar la integral $\int\frac{2x}{x^2+x-2}dx$ se procede así:

– Se hallan las raíces de $x^2+x-2=0$. Son $x = 1$ y $x = -2$.
Por tanto, la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{\boxed{2x}}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{\boxed{A(x+2)+B(x-1)}}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow 2x=A(x+2)+B(x-1).$$

El método de *identificación de coeficientes* consiste en igualar los coeficientes de los términos del mismo grado de ambos miembros de la igualdad. Esto es:

$$2x=A(x+2)+B(x-1)\Rightarrow 2x+0=(A+B)x+2A-B\Rightarrow\begin{cases}2=A+B\\0=2A-B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2/3\\B=4/3\end{cases}.$$

Con esto: $\int\frac{2x}{x^2+x-2}dx=\int\frac{2/3}{x-1}dx+\int\frac{4/3}{x+2}dx=\frac{2}{3}\ln(x-1)+\frac{4}{3}\ln(x+2)+c$.

b) Para calcular $\int\frac{x^2-7}{x^2+x-2}dx$, primero hay que dividir el integrando, obteniéndose:

$$\frac{x^2-7}{x^2+x-2}=\frac{(x^2+x-2)-x+2-7}{x^2+x-2}=1+\frac{-x-5}{x^2+x-2}.$$ (Se divide por cualquier método).

Ahora se descompone la segunda fracción (las raíces son las de arriba: $x = 1$ y $x = -2$).

$$\frac{-x-5}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow -x-5=A(x+2)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=1\end{cases}.$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^2-7}{x^2+x-2}dx=\int\left(1+\frac{-x-5}{x^2+x-2}\right)dx=\int\left(1+\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx=x-2\ln(x-1)+\ln(x+2)+c$$

Caso 2. Si hay una sola raíz real doble, $x = x_1 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$.

Se hace la descomposición: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{a(x-x_1)^2} + \dfrac{B}{(x-x_1)}$.

Con esto: $\displaystyle\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)^2}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx = \frac{-A}{a(x-x_1)} + B\ln(x-x_2) + c$.

Ejemplos:

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+4x+4}dx$.

– La ecuación $x^2+2x+4=0$ tiene una sola raíz doble, $x = –2$. Por tanto:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2} \Rightarrow x-2 = A+B(x+2).$$

Se identifican coeficientes:

$$x-2 = Bx+A+2B \Rightarrow \begin{cases} 1=B \\ -2=A+2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=-4 \end{cases}.$$

Luego,

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{-4}{(x+2)^2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \frac{4}{x+2} + \ln(x+2) + c.$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{3x^2-6x+3}dx$.

– La ecuación $3x^2-6x+3=0$ tiene una sola raíz, $x = 1$, doble: $3x^2-6x+3=3(x-1)^2$. Por tanto:

$$\frac{2x-3}{3x^2-6x+3} = \frac{A}{3(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A+3B(x-1)}{3(x-1)^2} \Rightarrow 2x-3 = A+3B(x-1).$$

Se identifican coeficientes:

$$2x-3 = 3Bx+A-3B \Rightarrow \begin{cases} 2=3B \\ -3=A-3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2/3 \\ A=-1 \end{cases}.$$

Luego,

$$\int \frac{2x-3}{3x^2-6x+3}dx = \int \frac{-1}{3(x-1)^2}dx + \int \frac{2/3}{x-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{-1}{(x-1)^2}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\ln(x-1) + c.$$

Observaciones: 1) En el caso b), el coeficiente 3 de la x^2 no debe olvidarse.

2) También para el caso b): la integral $\displaystyle\int \frac{-1}{(x-1)^2}dx = -\int (x-1)^{-2}dx = -\frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-1}$.

3) Algunas veces estas integrales resultan inmediatas. Así, por ejemplo:

$$\int \frac{4}{x^2+10x+25}dx = \int \frac{4}{(x+5)^2}dx = -\frac{1}{x+5} + c \to \text{(se aplica lo dicho arriba).}$$

4) Igualmente, $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx = \ln(x^2-3x+2) + c \to$ Debe observarse que el numerador es la derivada del denominador.

6. Método de integración por partes

Este método suele ser apropiado cuando en el integrando figuran funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas multiplicadas entre ellas o por expresiones polinómicas.
El método consiste en descomponer el integrando en dos partes: una de ellas se llama u; la otra, que se designa por dv, suele ser el mayor trozo (la mayor parte) del integrando que pueda integrarse fácilmente. Una vez integrada dv surgirá otra integral que deberá ser más sencilla que la inicial.
El esquema es el siguiente: $\int udv = uv - \int vdu$

Esta fórmula se obtiene a partir de la propiedad de la diferencial (de la derivada) del producto de dos funciones, $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Así:

$$d\left(f(x)\cdot g(x)\right) = d\left(f(x)\right)\cdot g(x) + f(x)\cdot d\left(g(x)\right) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

(Recuérdese que $df(x) = f'(x)dx$).
Despejando:

$$f(x)g'(x)dx = d\left(f(x)\cdot g(x)\right) - f'(x)g(x)dx.$$

Integrando, miembro a miembro, se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int d\left(f(x)\cdot g(x)\right) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

De manera esquemática:

$$d(u\cdot v) = d(u)\cdot v + u\cdot d(v) = vdu + udv \Rightarrow udv = d(u\cdot v) - vdu) \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Observación: Para la elección de las partes u y dv no hay un criterio concreto; pero, como se ha indicado más arriba, puede ser recomendable tomar dv como la parte más grande del integrando que se pueda integral de forma inmediata. El resto del integrando será u.

Ejemplo:
a) Para integral $\int x(\sin x)dx$ pueden tomarse las siguientes partes:

(1) $u = x$ y $dv = \sin xdx \Rightarrow du = dx$; $v = \int \sin xdx = -\cos x$.

(2) $u = \sin x$ y $dv = xdx \Rightarrow du = \cos xdx$; $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$.

(3) $u = x\sin x$ y $dx = dv \Rightarrow du = (\sin x + x\cos x)dx$; $v = \int dx = x$.

Si se hace (1): $\int x(\sin x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c$.

Si se hace (2): $\int x\sin xdx = \sin x\cdot\dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2}\cos xdx$. (La segunda integral es más complicada que la primera. Por tanto, esta partición no es acertada).
Si se hace (3): $\int x\sin xdx = x\sin x\cdot x - \int x(\sin x + x\cos x)dx$. (También la segunda integral es más complicada que la inicial. Tampoco es acertada esta partición).

6.1. Ejemplos para practicar

Ejemplo a). Calcula la integral $\int xe^x dx$.

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$.

Se tiene: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$.

Ejemplo b). Halla $\int x^2 \ln x dx$.

Haciendo: $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Por tanto: $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$.

Ejemplo c). Para calcular $\int e^x \cos x\, dx$ hay que reiterar el método. Observa:

Haciendo: $u = e^x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du = e^x dx$; $v = \sin x dx$.

Luego: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$.

La segunda integral, $\int e^x \sin x\, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = e^x$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = e^x dx$; $v = -\cos x$.

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \boxed{\int e^x \sin x\, dx} = e^x \sin x - \boxed{\left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Rightarrow \text{(trasponiendo la integral)}$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x.$$

Despejando se tiene: $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$.

Ejemplo d). Para hallar $\int x\ln(1+x^2)dx$ hay que aplicar el método de partes y el de descomposición en fracciones.

Primero partes. Se hace: $u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}dx$; $xdx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$.

Luego,

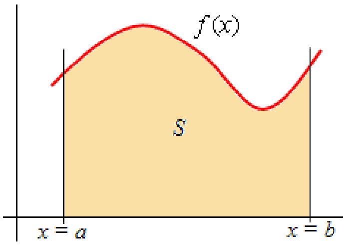
$$\int x\ln(1+x^2)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \text{(descomponiendo en fracciones)}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

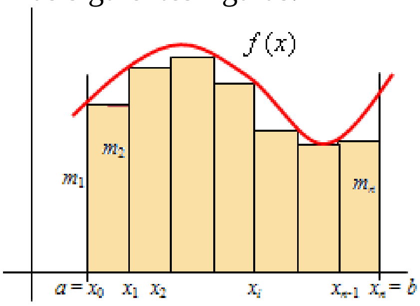
$\to$ Observa que $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

7. Integral definida: área bajo una curva

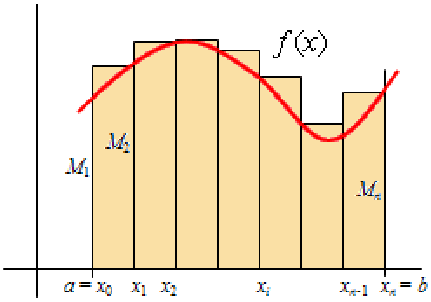
La integral definida permite calcular el área del recinto limitado, en su parte superior por la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa, en su parte inferior por el eje *OX*, y en los laterales por las rectas $x = a$ y $x = b$. Esto es, el área *S* del recinto coloreado en la figura adjunta.



En la antigüedad esta área se calculaba, de manera aproximada, sumando las superficies de *muchos* rectángulos de base muy pequeña y de altura el mínimo (o el máximo) de la función en cada uno de los subintervalos en los que se divide el intervalo [*a*, *b*], tal y como puede observarse en las siguientes figuras.



La suma de las áreas de los rectángulos "interiores" se llama suma inferior; puede denotarse por s_1. Evidentemente esta suma es menor que la superficie *S*: $s_1 < S$



La suma de las áreas de los rectángulos "exteriores" se llama suma superior; puede denotarse por S_1. Evidentemente esta suma es mayor que la superficie *S*: $S < S_1$

Cuando se divide el intervalo en otros más pequeños se dice que se hace una partición del intervalo. Aquí se divide en *n* subintervalos que pueden ser de la misma amplitud, o no. Si se parte por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, las bases de los rectángulos considerados serán:

$$x_1 - x_0,\ \ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_i - x_{i-1},\ \ldots,\ x_n - x_{n-1}$$

- Si la altura mínima de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ es m_i, la suma de las superficies de los rectángulos "interiores" será:

$$(x_1 - x_0)\cdot m_1 + (x_2 - x_1)\cdot m_2 + \ldots + (x_i - x_{i-1})\cdot m_i + \ldots + (x_n - x_{n-1})\cdot m_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot m_i = s_1$$

- Si la altura máxima de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ es M_i, la suma de las superficies de los rectángulos "exteriores" será:

$$(x_1 - x_0)\cdot M_1 + (x_2 - x_1)\cdot M_2 + \ldots + (x_i - x_{i-1})\cdot M_i + \ldots + (x_n - x_{n-1})\cdot M_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot M_i = S_1$$

- Si las partes (las bases) de los rectángulos se hacen más pequeñas, las sumas de sus áreas se aproximan más al valor real. Así, en un proceso de paso al límite, se obtienen dos sucesiones de sumas: una creciente, $\left\{s_i\right\}$, la suma de áreas "interiores"; otra decreciente, $\left\{S_i\right\}$, la suma de áreas "exteriores". Estas sucesiones cumplen que $\lim_{n\to\infty}\left\{s_i\right\} = S = \lim_{n\to\infty}\left\{S_i\right\}$.

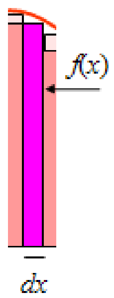
Al valor de este límite se le llama **integral definida de *f*(*x*) entre *a* y *b*** y se escribe como sigue: $\int_a^b f(x)dx$.

7.1. Aclaraciones sobre la integral definida

Como se acaba de decir, la integral definida entre *a* y *b* se escribe $\int_a^b f(x)dx$.

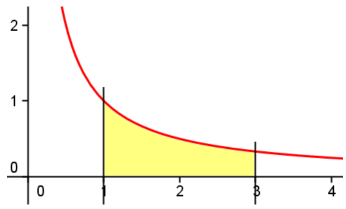
Aquí le daremos sentido solo cuando la función $f(x)$ sea continua y el intervalo [*a*, *b*] sea finito.

$\rightarrow$ El signo $\int$ es en realidad una ese (S de suma) estirada. Los números *a* y *b* son los límites (en el sentido de bordes) de integración: *a* es el límite inferior; *b*, el superior. La función $f(x)$ se llama integrando. Así pues, $\int_a^b f(x)dx$ indica que hay que integrar (sumar) $f(x)$ desde el punto *a* hasta el punto *b*.



- El símbolo *dx* se lee diferencial de *x*, y alude a la diferencia de dos valores: $dx = x_i - x_{i-1}$, siendo *x* la variable independiente de la función *f*.
- La variable *x* puede designarse con cualquier otra letra, por ejemplo *t*. Esto es, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
- La expresión $f(x)\cdot dx$ puede considerarse el área del rectángulo señalado a la derecha, cuya base es *dx* y su altura, $f(x)$; ambos variables, con *dx* pequeña.
- La integral definida toma un valor numérico, que coincide con un área cuando la función es positiva en todo el intervalo de integración.

Ejemplo:
La superficie sombreada en la figura adjunta, donde la gráfica es la de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, vendrá dada por el valor de $\int_1^3 \dfrac{1}{x}dx$.



7.2. Propiedades de la integral definida

Existen una serie de propiedades que permiten calcular el valor de la integral definida a partir de la integral indefinida. La más importante recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo integral,** siendo su aplicación más utilizada la llamada **regla de Barrow**.
Otras propiedades son:

1. La integral definida de un número por una función es igual al número por la integral de la función: $k\cdot\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k\cdot f(x)dx$. En particular, si $k = -1$, $\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$.

2. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales definidas de cada una de esas funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

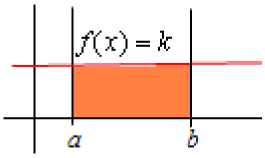
3. El intercambio de los límites de integración cambia el signo de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Por consiguiente, si $b = a$, $\int_a^a f(x)dx = 0$. (El número 0 es el único que es igual a su opuesto).

4. Si $f(x)=k$, siendo *k* una constante, $\int_a^b k dx = k\cdot(b-a)$.

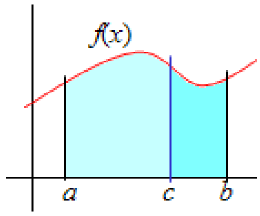
(Es el área de un rectángulo de base *b* – *a* y altura *k*).



5. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y $a<c<b$, se cumple que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En el caso de $f(x)>0$ en [*a*, *b*], la interpretación de la integral como área permite una compresión inmediata de esta propiedad: el área desde *a* hasta *b* es igual al área desde *a* hasta *c* más el área desde *c* hasta *b*.



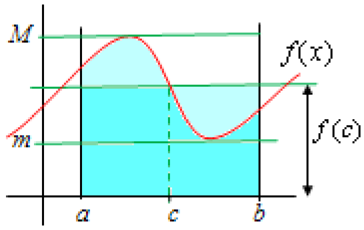
6. <u>Teorema del valor medio del cálculo integral</u>

Si $f(x)$ es una función continua en [*a*, *b*], existe un número *c* ∈ [*a*, *b*] tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Esto es, existe un rectángulo de base *b* – *a* y altura $f(c)$ que tiene la misma área que la determinada por la integral. A $f(c)$ se le llama valor medio de $f(x)$ en el intervalo [*a*, *b*].

La demostración de esta propiedad se basa en la consideración de que la "función área" es continua y está comprendida entre $(b-a)\cdot m$ y $(b-a)\cdot M$, siendo *m* y *M* los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en el intervalo. Por tanto, "la función área", la integral, toma todos los valores intermedios; luego será igual al área de un rectángulo cuya altura esté entre *m* y *M*: $m\le f(c)\le M$.

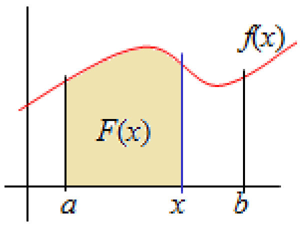


8. Teorema fundamental del cálculo integral

El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $f(x)$ es una función continua en [*a*, *b*] y $F(x)$ se define como $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es derivable en [*a*, *b*] y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

<u>Aclaración</u>: Si se observa la figura adjunta, cuando $f(x)$ es positiva, la función $F(x)$ determina el área por debajo de la curva de $f(x)$ desde *a* hasta *x*. Por consiguiente, el área entre *a* y *b* podría obtenerse restando $F(b)-F(a)$; pero esto supone conocer $F(x)$, que es lo que proporciona este teorema, cuya conclusión es la siguiente:



La integral definida de una función, $\int_a^b f(x)dx$, puede hallarse encontrando otra función $F(x)$, tal que $f(x)=F'(x)$; esto es, encontrando una primitiva de $f(x)$, haciendo $\int f(x)dx$.

En definitiva, la integral definida y la indefinida están relacionadas.

La aplicación práctica de este resultado se concreta con la regla de Barrow.

8.1. Regla de Barrow (Inglés, 1630–1677)

Si $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, y conociendo que $F'(x)=f(x)$, cualquier otra primitiva, $G(x)$, de $f(x)$, se diferenciará de $F(x)$ en una constante; esto es, $F(x)-G(x)=c$. O lo que es lo mismo: $F(x)=G(x)+c$; o bien, $F(x)=\int_a^x f(t)dt=G(x)+c$, para todo *x* de su dominio.

Eligiendo los valores *x* = *a* y *x* = *b*, se tendrá que:

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=G(a)+c;\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)+c$$

Como $F(a)=G(a)+c=0 \Rightarrow c=-G(a)$. Luego, $F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$.

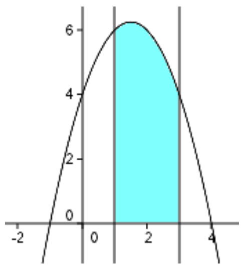
Por consiguiente, el valor de la integral definida es

$\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$, siendo $G(x)$ cualquier primitiva de $f(x)$.

→ Esta regla suele escribirse así: $\int_a^b f(x)dx=\left(F(x)\right)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, siendo $F'(x)=f(x)$.

Ejemplos:

a) La superficie sombreada en la figura adjunta, donde $f(x)=-x^2+3x+4$, viene dada por la integral



$$\int_1^3\left(-x^2+3x+4\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}3^3+\frac{3}{2}3^2+4\cdot 3\right)-\left(-\frac{1}{3}1^3+\frac{3}{2}1^2+4\cdot 1\right)=\frac{33}{2}-\frac{31}{6}=\frac{34}{3}\ \text{u}^2.$$

Nota. La unidad de medida de esta área (u^2) será la correspondiente a cada caso: m^2, dam^2 o la que sea. Si suponemos que la variable *x* viene dada en cm, el resultado de este ejemplo sería 34/3 cm^2.

b) Algunas veces suele pedirse calcular la superficie encerrada entre una curva $y=f(x)$ y el eje *OX*. En estos casos no se dan los extremos *a* y *b* del intervalo, sino que hay que determinarlos. Para ello, basta con resolver la ecuación $f(x)=0$, pues *a* y *b* son los puntos de corte de la gráfica con el eje *OX*.

Así, si se desea calcular la superficie encerrada entre la curva $f(x)=-x^2+3x+4$ y el eje *OX*, los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $-x^2+3x+4=0$. (En la figura anterior se observa que esos puntos son –1 y 4).

Por tanto, el área pedida vendrá dada por la integral $\int_{-1}^4\left(-x^2+3x+4\right)dx$.

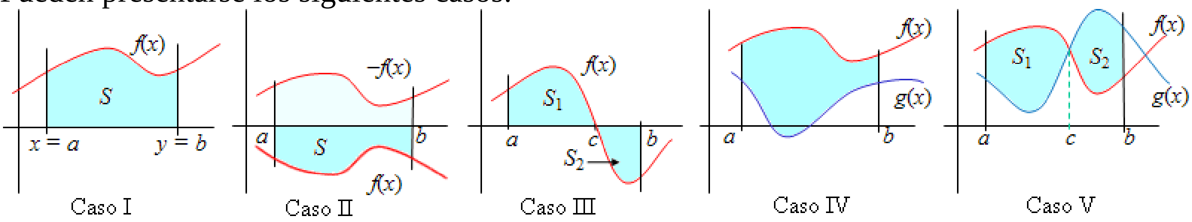
Su valor es: $\int_{-1}^4\left(-x^2+3x+4\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Bigg|_{-1}^4=\frac{56}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{125}{6}$ u².

c) Conviene saber que la integral definida no siempre está relacionada con un área y que, por tanto, podría plantearse, sin más, el cálculo de, por ejemplo: $\int_0^1\left(2-e^x\right)dx$.

Su valor es $\int_0^1\left(2-e^x\right)dx=\left(2x-e^x\right)\Big|_0^1=2-e-(0-1)=3-e$.

9. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos

Pueden presentarse los siguientes casos:



Caso I. La función $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo de integración.

El área S viene dada por: $S = \int_a^b f(x)dx$

El ejemplo a) visto anteriormente sirve de aclaración.

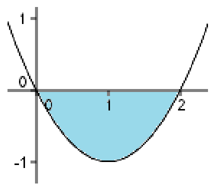
Caso II. La función es negativa en todo el intervalo de cálculo: $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Es evidente que el recinto por debajo del eje, limitado por $f(x)$ es y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual al recinto superior, limitado por $-f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo:

El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX viene dada por:



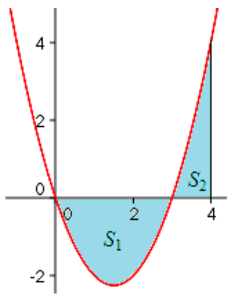
$$S = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Caso III. La función corta al eje OX en el intervalo de integración. El punto c, de corte, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplos:

a) El área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$ y el eje OX, en el intervalo [0, 4] viene dada por:



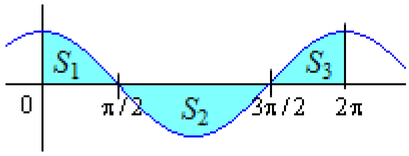
$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx + \int_3^4 \left(x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4 = -\left(9 - \frac{27}{2}\right) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = \frac{19}{3}.$$

Debe observarse que $f(x) = x^2 - 3x$ corta al eje OX en la abscisa $x = 3$; que la curva queda por debajo del eje OX entre 0 y 3; y por arriba del eje entre 3 y 4. Para ello resulta conveniente hacer una representación gráfica.

Ejemplo b) El área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje OX en el intervalo [0, 2π], viene dada por la suma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx.$$



Por la simetría de la curva, el área es

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 4\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4 \text{ u}^2.$$

Caso IV. Si el recinto viene limitado por dos curvas, con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$:

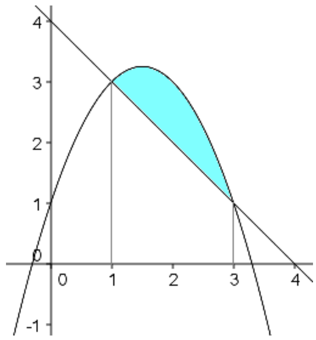
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

En particular, cuando se pretende hallar el área comprendida entre dos curvas, habrá que determinar las abscisas a y b: se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejemplo: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x + 4$, que es el representado en la figura adjunta, viene dada por

$$S = \int_1^3 \left(-x^2 + 3x + 1 - (-x + 4)\right)dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^3 = 0 - \left(-\frac{4}{4}\right) = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$



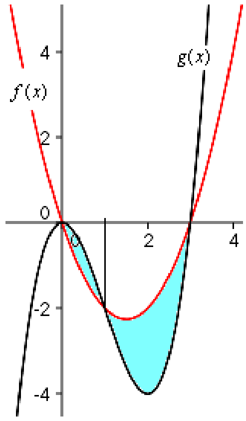
Los límites de integración, 1 y 3, se obtienen resolviendo la ecuación: $-x^2 + 3x + 1 = -x + 4$.

Caso V. Si las curvas se cortan en $c \in [a, b]$:

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

El punto c se halla resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejemplo: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2$, que es el sombreado en la figura adjunta, viene dada por:



$$S = \int_0^1 \left((x^3 - 3x^2) - (x^2 - 3x)\right)dx + \int_1^3 \left((x^2 - 3x) - (x^3 - 3x^2)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \left(-\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12} \text{ u}^2.$$

Los puntos de corte de las curvas se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ $x^2 - 3x = x^3 - 3x^2$. Se obtienen: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. (Hay que ver qué curva va por encima).

9.1. Otras aplicaciones de la integral definida

Algunas de estas aplicaciones son las que se estudian en los ejercicios que siguen.

Ejercicio 1. Se sabe que la población de una ciudad está aumentando a razón de $p(x)=500+40\sqrt{x}$ personas por mes, siendo x el número de meses transcurridos desde el momento presente. Si la población actual es de 800000 personas.
a) ¿Cuál será la población dentro de un año?
b) ¿En cuántos habitantes aumentará durante el segundo año?
Solución:
a) La función $p(x)=500+40\sqrt{x}$ indica la tasa de crecimiento de la población. Por tanto, el crecimiento total de la población en el primer año será:

$$\int_0^{12}\left(500+40\sqrt{x}\right)dx=\int_0^{12}\left(500+40x^{1/2}\right)dx=\left(500x+40\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^{12}=\left(500x+\frac{80x\sqrt{x}}{3}\right)\Bigg|_0^{12}=$$

$\approx 7108{,}51\ \to 7109$ personas.
Por tanto, la población dentro de un año será de 800000 + 7109 = 807109 personas.
b) El crecimiento en el segundo año viene dado por:

$$\int_{12}^{24}\left(500+40\sqrt{x}\right)dx=\left(500x+\frac{80x\sqrt{x}}{3}\right)\Bigg|_{12}^{24}\approx 15135,35-7108,51\approx 8027 \text{ personas.}$$

Ejercicio 2. El consumo de agua mineral en una ciudad crece exponencialmente (continuamente) a razón de un 8 % anual. Si el consumo actual es de 2 millones de litros por año, ¿cuánta agua se consumirá durante los próximos cinco años?
Solución:
La función que da el consumo anual en el instante t es $C(t)=2\cdot e^{0,08t}$ millones de litros
(Recuerda que la expresión del crecimiento continuo (del interés continuo) es $C(t)=C_0\cdot e^{rt}$, siendo C_0 la cantidad inicial y r la tasa de crecimiento).
El volumen de agua consumida en los cinco próximos años viene dado por:

$$\int_0^{5}\left(2e^{0,08t}\right)dt=\frac{2}{0,08}\int_0^{5}\left(0,08e^{0,08t}\right)dt=25\left[e^{0,08t}\right]_0^5=25\left(1,4918-1\right)=12,295 \text{ mill. de litros}$$

Ejercicio 3. La función de ingreso marginal para un determinado producto es $i(x)=20-0,001x$ euros, siendo x es el número de unidades vendidas. Halla:
a) ¿Qué ingreso se obtendrá por la venta de 20000 unidades?
b) ¿Cuánto es el ingreso adicional al pasar de 20000 a 21000 unidades?
Solución:
El ingreso total por la venta de 20000 unidades viene dado por:

$$\int_0^{20000}\left(20-0,001x\right)dx=\left[20x-\frac{0,001x^2}{2}\right]_0^{20000}=400000-200000=200000 \text{ €.}$$

b) El ingreso adicional es:

$$\int_{20000}^{21000}\left(20-0,001x\right)dx=\left[20x-\frac{0,001x^2}{2}\right]_{20000}^{21000}=199500-200000=-500 \text{ €}$$

$\to$ Desde el punto de vista económico no le conviene vender más de 20000 unidades. Observa que si $x = 20000$, el ingreso marginal es 0, y decreciendo…

Problemas Propuestos

Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+6x-3)\,dx$ b) $\int (3-2x+3x^4)\,dx$ c) $\int \left(3x^2+x-2\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int x(4-4x^2)\,dx$ e) $\int 5x(1-2x^2)^2\,dx$ f) $\int (2-3x)^2\,dx$

g) $\int \frac{3}{2\sqrt{x+1}}\,dx$ h) $\int (x+x^{1/2}-x^{2/3})\,dx$ i) $\int \frac{3}{x^2}\,dx$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2\,dx$ b) $\int (3x^2-2x)^2\,dx$ c) $\int \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

d) $\int (1-x)^3\,dx$ e) $\int x(1-x)^3\,dx$ f) $\int \frac{(x-1)^3}{x}\,dx$

3. Calcula:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$ b) $\int \sqrt{x}\,(7x^2+3)\,dx$ c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}\,dx$ e) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ f) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4. Halla las integrales:

a) $\int \frac{3}{7x-4}\,dx$ b) $\int \frac{5x}{3+3x^2}\,dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ d) $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$

5. Resuelve las integrales:

a) $\int \cos(4x+3)\,dx$ b) $\int \left(\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 5x\right)dx$ c) $\int \left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{5}\right)dx$

d) $\int x\cos(3x^2)\,dx$ e) $\int \left(\cos(2x)-3e^{2x-3}\right)dx$ f) $\int \cos x\cdot(\sin x)^2\,dx$

g) $\int (\sin 2x-3\cos 5x)\,dx$ h) $\int (\sin x+\cos x)^2\,dx$ i) $\int (\sin x-\cos x)^2\,dx$

6. Halla:

a) $\int e^{4x}dx$ b) $\int e^{x/3}dx$ c) $\int xe^{1-x^2}\,dx$

d) $\int 4^x\,dx$ e) $\int 4\cdot 3^x\,dx$ f) $\int 20x\cdot 3^{x^2}\,dx$

7. Calcula:

a) $\int \frac{e^{-2x}}{5}dx$ b) $\int 2xe^{3x^2}dx$ c) $\int 20e^{0,2x}dx$

d) $\int \left(e^x + e^{-x}\right)dx$ e) $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$ f) $\int \left(e^{2x} - \sin 2x\right)dx$

Integración por cambio de variable

8. Calcula las siguientes integrales haciendo el cambio que se indica:

a) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \rightarrow (1-x^2 = t)$ b) $\int (\sin x)^3 dx \rightarrow (\cos x = t)$

c) $\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} \rightarrow (t = \ln x)$ d) $\int x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx \rightarrow (4+x^2 = t)$

9. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

10. Haciendo el cambio $2^x = t$, calcula la integral: $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx$.

11. Haciendo el cambio que se indica, calcula:

a) $\int \left(-3xe^{x^2}\right)dx \rightarrow (t = x^2)$ b) $\int 4x^2e^{5x^3}dx \rightarrow (t = 5x^3)$

12. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, halla:

a) $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ b) $\int \frac{3e^x}{2+5e^x}dx$

Integración por descomposición en fracciones racionales

13. Calcula, descomponiendo el integrando, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x-3}{x}dx$ b) $\int \frac{2x^2+3x+5}{x^2}dx$ c) $\int \frac{3x^3+2x^2-6x}{6}dx$

d) $\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4}dx$ e) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3}dx$ f) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ h) $\int \left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx$ i) $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$

14. a) Comprueba que $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x^3+x}$. b) Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3+x}dx$.

15. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx$ b) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx$ c) $\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx$

d) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx$ e) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx$ f) $\int \frac{2x^3-3x^2+2}{x+1}dx$

16. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$ c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$ d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

17. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$ d) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$

18. Halla:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$ c) $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx$

Método de integración por partes

19. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int xe^{2x}dx$ c) $\int x^2 \cdot e^{3x}dx$

d) $\int 2x^3e^{x^2}dx$ e) $\int (x\ln x)dx$ f) $\int x^2\sin(2x)dx$

20. Utilizando el método de integración por partes, calcula $\int \frac{x}{e^x}dx$.

21. A partir del resultado de $\int \ln x dx$, calcula las siguientes integrales:

a) $2\int \ln x dx$ b) $\int \ln(2x)dx$ c) $\int \ln x^2 dx$ d) $\int (\ln x)^2 dx$

Otras integrales

22. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2}{1+x^2}dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{2}{1-x^2}dx$ d) $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx$

23. Integra:

a) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$ d) $\int \tan^2 x dx$

24. Dada la función $f(x)=3x^2-6x+10$, halla una primitiva $F(x)$ que verifica que $F(1)=8$.

25. Halla una primitiva de $f(x)=e^x+3x$ que pase por el punto (0, 2).

26. Dada la función $f(x)=\dfrac{2a+3}{(x-3)^2}$, determina el valor de a para que una de sus primitivas, $F(x)$, pase por los puntos (2, 0) y (1, 2). Indica $F(x)$.

Integrales definidas

27. Halla el valor de:

a) $\int_1^3\left(3x^2-2x+1\right)dx$ b) $\int_{-2}^{3}\left(x^2+2\right)dx$ c) $\int_0^2\left(x^3+4x-2\right)dx$

28. Halla el valor de:

a) $\int_0^7\dfrac{4}{\sqrt{5x+1}}dx$ b) $\int_0^{\sqrt{3}}x\sqrt{1+x^2}\,dx$ c) $\int_1^4\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)dx$

29. Halla el valor de:

a) $\int_0^2 e^{2x}dx$ b) $\int_2^{10}20e^{0,1x}dx$ c) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx$

30. Calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2\right)dx$ b) $\int_1^4\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)dx$ c) $\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx$

31. Calcula el valor de $a>0$ en los siguientes casos:

a) $\int_0^3\left(x^2+a\right)dx=15$ b) $\int_0^3\dfrac{1}{x+1}dx=a$ c) $\int_0^a\dfrac{1}{x+1}dx=3$

Cálculo de áreas de recintos planos

32. Haz su la representa gráfica de la función $f(x)=x^2-2x+3$. Calcula el área limitada por la curva de f y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 2$.

33. Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$ y el eje OX.

34. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3 & \text{si } 0\le x<1\\ x-1 & \text{si } 1\le x\le 3\end{cases}$.

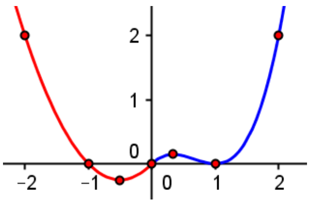
a) Haz su gráfica. ¿Es continua?
b) Calcula el área de la región determinada por su gráfica y las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

35. Halla el área encerrada entre la curva $y=\dfrac{1}{x}$ y el eje OX, entre $x = 1$ y $x = e^2$.

36. Calcula el área de la región limitada por $y = \dfrac{4}{x}$, el eje *OX* y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

37. Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje *OX*.

38. La gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es la adjunta. (Esta función se representó en el problema propuesto 2 del tema anterior).
Halla el área del recinto limitado por la curva y el eje *OX*.



39. Calcula el área de la región limitada por la curva de la función $f(x) = e^x$, el eje *OX* y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

40. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x}$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 2].

41. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = \sin 2x$ y el eje *OX* en el intervalo $[0, \pi]$.

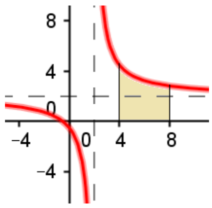
42. Calcula el área de la región limitada por la función $y = \dfrac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

43. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

44. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

Otros problemas

45. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ es la adjunta.
Halla el área del recinto sombreado.
(Esta función se representó en el problema 23 del tema anterior).



46. Halla la superficie del recinto plano limitado por la curva de ecuación $f(x) = -x^2 + 4x$, la recta tangente a ella en el punto de abscisa $x = 3$ y el eje *OX*.

47. Determina el área encerrada entre la curva $y = e^x$, el eje *OY* y la la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$.

48. (Propuesto en Selectividad) El número de pasajeros que pasan por la terminal de un aeropuerto se ajusta durante un día determinado a la función $P(t) = 432t - t^3$, siendo t el tiempo en horas y $P(t)$ el número de viajeros en el momento t.
a) Representa la gráfica de la función en el contexto del problema. ¿Cuál fue la máxima afluencia del día y en qué momento se da?
b) ¿Qué cantidad de viajeros pasa por esa terminal desde las 0 horas hasta las 18 horas?

49. Dada la curva de ecuación $y = x^2$, calcula el área el recinto plano limitado por dicha curva, la recta tangente a ella en el punto (1, 1) y el eje OY.

50. Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) Haz un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) Calcula el área de ese recinto.

51. El ritmo de crecimiento de una población de palomas en una ciudad viene dado por la función $p(x) = 2x - 0,5x^2$, x en años, y $p(x)$ en miles de palomas. Si actualmente hay 2500 palomas:
a) ¿Cuántas palomas habrá dentro de x años?
b) ¿En cuánto aumentará la población de palomas durante el segundo semestre a partir del momento actual?
c) ¿Hasta cuándo aumentará la población de palomas? ¿Qué número máximo alcanzará?

52. Supongamos que se rompe una tubería y que t minutos después se pierde agua a razón de $f(t) = 100 + 1,5t$ litros por minuto.
a) ¿Cuál es la función que da el agua perdida al cabo de t minutos?
b) ¿Cuánta agua se perderá si no se repara la tubería durante la segunda hora?

53. La función de coste marginal de la unidad x de un producto viene dada por $c(x) = 4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Halla la función de coste total si el coste de funcionamiento de la empresa es de 100 u.m.

54. Un fabricante de cosméticos espera vender dentro de x meses 10000 barras de labios por mes a un precio de $p(x) = 2 + 0,2\sqrt{x}$ euros por barra de labios. ¿Cuál será el ingreso total del fabricante en los próximos 18 meses si se cumplen sus previsiones?

55. Una empresa de de compraventa de coches de segunda mano tiene estipulado que el ritmo de depreciación, en porcentaje, de un coche nuevo viene dado por $d(t) = 10 + 0,75e^{0,15t}$, t en años.
Calcula:
a) El valor de un coche con t años.
b) El valor de un coche con dos años si nuevo costón 30000 €.
c) ¿En cuánto se depreciará dicho coche en los siguientes tres años?

Soluciones

1. a) $\frac{x^3}{3}+3x^2-3x+c$. b) $3x-x^2+\frac{3}{5}x^5+c$. c) $x^3+\frac{1}{2}x^2-2\frac{x^{3/2}}{3/2}+c$. d) $2x^2-x^4+c$.

e) $-\frac{5}{12}\left(1-2x^2\right)^3+c$. f) $4x-6x^2+3x^3+c$. g) $3\sqrt{x+1}+c$.

h) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{3}{5}x^{5/3}+c$. i) $-\frac{3}{x}+c$.

2. a) $\frac{5}{2}x^2-\frac{20}{3}x^3+5x^4+c$. b) $\frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{4}{3}x^3+c$. c) $\frac{1}{6}\ln\left(1+3x^2\right)+c$.

d) $x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4+c$. e) $\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+c$. f) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-\ln x+c$.

3. a) $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+c$. b) $2x^{7/2}+2x^{3/2}+c$. c) $5\ln x-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+c$. d) $-\frac{8}{3}\sqrt{3-x^3}+c$.

e) $-5\sqrt{1-x^2}+c$. f) $5\arcsin x+c$.

4. a) $\frac{3}{7}\ln(7x-4)+c$. b) $\frac{5}{6}\ln\left(3+3x^2\right)+c$. c) $\frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)+c$. d) $3\arctan x+c$.

5. a) $\frac{1}{4}\sin(4x+3)+c$. b) $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{15}\sin 5x+c$. c) $6\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x+c$.

d) $\frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+c$. e) $\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{3}{2}e^{2x-3}+c$. f) $\frac{1}{3}(\sin x)^3+c$. g) $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{5}\sin 5x+c$.

h) $x+\sin^2 x+c$. i) $x+\cos^2 x+c$

6. a) $\frac{1}{4}e^{4x}+c$. b) $3e^{x/3}+c$. c) $-\frac{1}{2}e^{1-x^2}+c$. d) $4^x\cdot\frac{1}{\ln 4}+c$. e) $\frac{4}{\ln 3}\cdot 3^x+c$. f) $\frac{10}{\ln 3}\cdot 3^{x^2}+c$

7. a) $-\frac{1}{10}e^{-2x}+c$. b) $\frac{1}{3}e^{3x^2}+c$. c) $100e^{0,2x}+c$. d) $e^x-e^{-x}+c$. e) $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+c$.

f) $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos 2x+c$.

8. a) $-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+c$. b) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+c$. c) $-\ln\left(4-\ln x\right)+c$. d) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}+c$.

9. $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$. **10.** $\frac{1}{\ln 2}\cdot\arctan\left(2^x\right)+c$.

11. a) $-\frac{3}{2}e^{x^2}+c$. b) $\frac{4}{15}e^{5x^3}+c$. **12.** a) $\frac{-1}{1+e^x}+c$. b) $\frac{3}{5}\ln\left(2+5e^x\right)+c$.

13. a) $2x-3\ln x+c$. b) $2x+3\ln x-\frac{5}{x}+c$. c) $\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+c$. d) $-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3\ln x+c$.

e) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\ln x-\frac{5}{8x^2}+c$. f) $\left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c$. g) $\frac{4}{3}x^{3/4}-\frac{12}{7}x^{7/12}+c$.

h) $x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+c$. i) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln(x+3)+c$.

14. b) $\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$.

15. a) $\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x^2+c$. b) $\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\ln x+c$. c) $x^2-3x-\frac{5}{x}+c$.

d) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5\ln x + c$. e) $x^3 - 2x^2 + 8x - 13\ln(x+1) + c$.

f) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - 3\ln(x+1) + c$.

16. a) $3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + c$. b) $\frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$.

c) $-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-3) + c$. d) $\frac{1}{10}\ln(x-2) - \frac{1}{10}\ln(x+3) + c$.

17. a) $\frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$. b) $\frac{1}{2}\ln(x^2-1) + c$. c) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$.

d) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + c$.

18. a) $3\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + c$. b) $\frac{-3}{x-1} + \ln(x-1) + c$. c) $5\arctan x + 2\ln(1+x^2) + c$

19. a) $x\sin x + \cos x + c$. b) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$. c) $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$.

d) $x^2e^{x^2} - e^{x^2} + c$. e) $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$. f) $-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$.

20. $-xe^{-x} - e^{-x} + c$.

21. a) $2(x\ln x - x) + c$. b) $(\ln 2)\cdot x + x\ln x - x + c$. c) $2(x\ln x - x) + c$.

d) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

22. a) $2\arctan x + c$. b) $\ln(1+x^2) + c$. c) $\ln(1+x) + \ln(1-x) + c$. d) $-\frac{2}{1+x} + c$.

23. a) $e^x + c$. b) $e^x - \ln(1+e^x) + c$. c) $\frac{1}{3\cos^3 x} + c$. d) $\tan x - x + c$.

24. $F(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$. **25.** $F(x) = e^x + \frac{3x^2}{2} + 1$. **26.** $F(x) = \frac{4}{x-3} + 4$.

27. a) 20. b) 65/3. c) 8. **28.** a) 8. b) 7/3. c) $2 - \ln 4$.

29. a) $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$. b) $200(e - e^{0,2})$. c) $-\frac{1}{6}(e^{-2} - e)$.

30. a) –1/3. b) 21/2. c) $\frac{1}{2}\ln 2$. **31.** a) 2. b) ln 4. c) $e^3 - 1$.

32. 7/3 u^2. **33.** 16/3. **34.** b) 11/3. **35.** 2. **36.** 4ln 4.

37. 32/3. **38.** 1/4. **39.** $e^2 - 1$. **40.** $4\ln 2 - 2$. **41.** 2.

42. $\frac{15}{2} - 4\ln 4$. **43.** 1/3. **44.** 1/3. **45.** 5ln 3. **46.** 7/12.

47. $\frac{e}{2} - 1$. **48.** a) 12 h; 3456. b) 43740. **49.** 1/3. **50.** a) $y = x$. c) 4/3.

51. a) $P(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + 2,5$ miles. b) 604 palomas. c) $x = 4$; 7833 palomas.

52. a) $F(t) = 100t + 0,75t^2$. b) 14100 litros.

53. $C(x) = 4x - 2\sqrt{x} + 100$. **54.** 360050.91 euros.

55. a) $V(t) = 105 - 10t - 5e^{0,15t}$, en %. b) 23475 €. c) 33,835%; valdrá 13324,50 €