Tema 12. Probabilidad

1. Experimentos aleatorios

Un experimento se llama aleatorio cuando no se puede predecir su resultado; además, si se repitiese el mismo experimento en condiciones análogas, los resultados pueden diferir.

Ejemplos:
a) El resultado del lanzamiento de una moneda o de un dado.
b) El número de veces que hay que lanzar un dado corriente, con las caras numeradas del 1 al 6, hasta que salga el número 6.
c) El día de nacimiento de la persona que espera al autobús; o el tiempo que deberá esperar hasta que llegue el autobús.

1.1. Espacio muestral

Cada uno de los resultados más simples de un experimento aleatorio recibe el nombre de suceso elemental. El conjunto de esos sucesos, se denomina espacio muestral asociado al proceso aleatorio; suele designarse por la letra E.

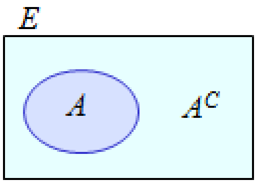
Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al experimento de lanzar una moneda son cara o cruz. El especio muestral es $E = \{C, X\}$.
→ Los sucesos asociados con el lanzamiento de un dado corriente, con las caras numeradas, son 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Así pues, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) El número de veces que hay que lanzar un dado corriente hasta que salga el número 6 varía desde 1 hasta infinito. El espacio muestral será $E = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

c) Los sucesos elementales asociados al día de nacimiento de una persona son cualquiera de los 365 días de un año.
→ El tiempo de espera hasta que llegue un autobús es siempre mayor que 0, pero su máximo es difícil de predecir; pongamos que varía entre 0 y 30 minutos.
Observación:
De los ejemplos anteriores se deduce que el espacio muestral puede ser finito (ejemplo a), infinito numerable (ejemplo b) o infinito continuo (ejemplo c).

1.2. Tipos de sucesos

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral. Puede ser elemental (simple) o compuesto (formado por más de un resultado del experimento). Suelen designarse mediante letras mayúsculas.
Como subconjuntos impropios de E, se consideran $\varnothing$ y E.
El suceso vacio, $\varnothing$, no posee ningún suceso elemental, se considera como suceso imposible.
El suceso E se cumple siempre; es el suceso seguro**.**
Si A es un suceso cualquiera, el suceso contrario de A, denotado por A^C o $\bar{A}$, es el que se verifica cuando no se cumple A. (Está formado por los sucesos elementales que no son de A; es el subconjunto complementario de A, respecto a E)
Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos. (John Venn: Inglés, 1834–1923).



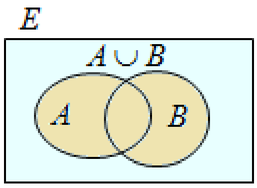
Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": P = {2, 4, 6}. El suceso P se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar"

b) En el caso de los días del año, son sucesos compuestos: "nacer un martes"; o "nacer en enero".
El suceso contario de "nacer en martes" es "nacer cualquier otro día de la semana".
Un suceso imposible sería nacer un 30 de febrero.

c) En el caso del tiempo de espera de un autobús son sucesos compuesto: "esperar entre 0 y 10 min"; "esperar más de 5 minutos"; …
El suceso contario de "esperar más de 5 minutos" es "esperar menos de 5 minutos".

1.3. Operaciones con sucesos

Los sucesos pueden operarse obteniéndose otros nuevos.

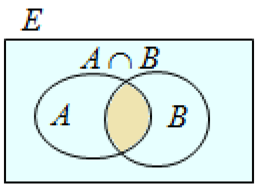


- <u>Unión</u> de A y B, $A\cup B$, es un suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.

En notación conjuntista:

$$A\cup B=\{x\in E \mid x\in A \text{ o } x\in B\}.$$

- <u>Intersección</u> de A y B, $A\cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hacen A y B a la vez. Está formado por los elementos comunes a A y a B.



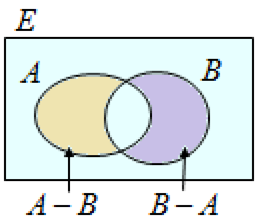
En notación conjuntista:

$$A\cap B=\{x\in E \mid x\in A \text{ y } x\in B\}.$$

Cuando $A\cap B=\varnothing$, los sucesos A y B se dicen <u>incompatibles</u>.
(Un suceso y su contrario son incompatibles).

- <u>Diferencia</u> de A y B, $A-B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los elementos de A que no son de B.

En notación conjuntista:



$$A-B=\{x\in E \mid x\in A \text{ y } x\notin B\}.$$

Análogamente,

$$B-A=\{x\in E \mid x\in B \text{ y } x\notin A\}.$$

En las figuras adjuntas se representa el resultado de estas operaciones mediante diagramas de Venn. Puede observarse que:

$$A-B=A-(A\cap B)=\overline{B}\cap A \text{ y } B-A=B-(A\cap B)=\overline{A}\cap B.$$

Ejemplos:
Al lanzar un dado con seis caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si el experimento consiste en lanzar 2 dados y observar sus resultados, los sucesos elementales serán: E = {(1, 1), ..., (1, 6), (2,1), …, (2,6), …, (6,1), …, (6,6)}; donde (1, 3) significa que en el primer dado ha salido un 1 y en el segundo un 3, y lo mismo en los demás casos.

Si en este experimento se consideran los sucesos:

A = "sacar puntuaciones iguales" = {(1, 1), (2, 2), …, (6, 6)}.

B = "sacar números pares" = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}.

Para tales sucesos se tiene:

A^C = "sacar puntuaciones distintas" y

B^C = "no sacar ambos pares" = "alguno de los resultados no es par"

Por tanto:

$A \cup B$ = {(1,1), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (4,2), (4,4), (4,6), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)}.

$A \cap B$ = {(2,2), (4,4), (6,6)}.

$A - B$ = {(1,1), (3,3), (5,5)}.

$B - A$ = {(2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)}.

1.4. Algunas relaciones de interés

En lo que sigue, A, B y C designan sucesos de un espacio muestral E.

En todos los casos se cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativas: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

Asociativas: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Complementarias: $A \cup A^C = E$; $A \cap A^C = \varnothing$

Diferencia: $A - B = A - A \cap B$; $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

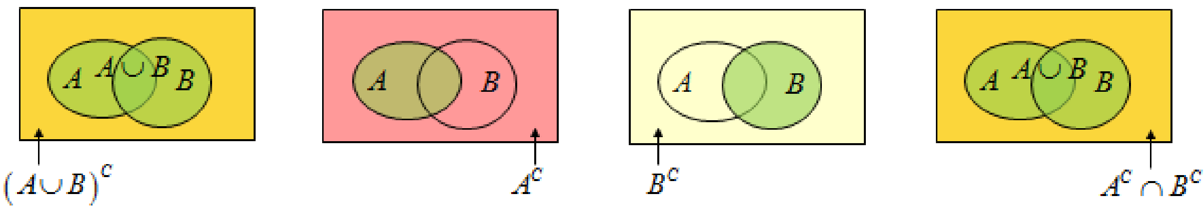
Para comprobarlo basta observar con atención las figuras anteriores.

Leyes de Morgan:

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \rightarrow$ el contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \rightarrow$ el contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

En la siguiente figura se da una explicación gráfica de la primera ley.



Ejemplo:

Si una persona sintoniza habitualmente dos emisoras de radio, "RadioA" y "RadioB", se pueden definir los siguientes sucesos:

A: escucha RadioA; B: escucha RadioB;

El suceso $A \cup B$ es "escucha alguna de las dos emisoras". Su contrario, $(A \cup B)^C$, es "no escucha ninguna emisora", que es equivalente a no escucha RadioA, (A^C), ni escucha RadioB, (B^C), suceso $A^C \cap B^C$.

El suceso $A \cap B$ es "escucha las dos emisoras". Su contrario $(A \cap B)^C$ es "no escucha las dos emisoras", que es equivalente a no escuchar A (A^C) o no escuchar B (B^C), suceso $A^C \cup B^C$.

2. Probabilidad: definiciones y propiedades

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado. A cada probabilidad se le asigna un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso.

→ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

Ejemplo:
a) Si se pregunta a 400 personas, elegidas al azar, sobre su interés por el fútbol y, de ellas, 125 afirman ser aficionadas, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo sea aficionada al fútbol es de $\frac{125}{400}=0,3121$.

b) Si una moneda se lanza 1500 veces y en 706 ocasiones ha salido cara, se admitirá que la probabilidad de obtener cara para esa moneda es $P(C)=\frac{706}{1500}\approx 0,47$.

Observación:
Aquí se está admitiendo la llamada ley de los grandes números. El valor que se acepta es siempre aproximado; y, parece lógico afirmar que cuántas más veces se realice el experimento más seguridad habrá en el resultado. En situaciones concretas se podrá (deberá) dar una cota de error.

2.1. Regla de Laplace (Francés, 1749–1827)
Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso *A* se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}.$$

Ejemplos:
a) Si en una bolsa hay 4 rojas (*R*), 2 blancas (*B*) y 3 verdes (*V*), todas del mismo peso y tamaño, la probabilidad de extraer al azar una bola roja, una bola blanca o una bola verde es:

$$P(R)=\frac{4}{9};\ P(B)=\frac{2}{9};\ P(V)=\frac{3}{9}.$$

b) En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
1) Si una persona ha comprado 3 papeletas, la probabilidad de que le toque el premio es:

$$P(A)=\frac{3}{1000}=0,003.$$

2) La probabilidad de que el número premiado termine en 5 es $P(xy5)=\frac{100}{1000}=0,1$, pues hay 100 números que terminan en 5, 1 de cada 10.

3) La probabilidad de que el número premiado termine en 55 será $P(x55)=\frac{10}{1000}=0,01$. Hay 10 números que terminan en 55, 1 de cada 100.

2.2. Definición axiomática de probabilidad

La probabilidad puede definirse afirmando que es una función P que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso A se cumple que: $0 \le P(A) \le 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro E es 1: $P(E) = 1$.
3. Si A y B son sucesos incompatibles, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$\to$ De estos axiomas se extraen algunas consecuencias (propiedades) de interés:

- **Probabilidad del suceso contrario**

Conociendo la probabilidad de un suceso A puede hallarse la de su contrario A^C, pues, como

$$A \cup A^C = E \Rightarrow P\left(A \cup A^C\right) = P(E) = 1 \Rightarrow P(A) + P\left(A^C\right) = 1 \Rightarrow P\left(A^C\right) = 1 - P(A).$$

Por tanto, la probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$.

Ejemplo:

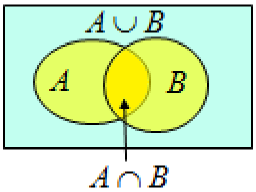
Si al extraer una bola de una urna, la probabilidad de que sea roja es $P(R) = \frac{4}{9} \Rightarrow$ probabilidad de que no sea roja será: $P(\text{no } R) = P\left(R^C\right) = P\left(\overline{R}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

2.3. Probabilidad de la unión de sucesos

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, que se da tanto en A como en B).



$\to$ Si los sucesos son incompatibles:

$$P(A \cap B) = 0 \text{ y } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$\to$ Para n sucesos incompatibles dos a dos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Ejemplos:

a) Si se sabe que las probabilidades de los sucesos A, B y $A \cap B$ son: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}9.$$

b) En una baraja de 40 cartas hay 10 cartas de cada uno de los palos (oros, copas, espadas y bastos). Cada palo tiene numeradas 7 cartas, del 1 (el as) hasta el 7; las otras 3 cartas se llaman figuras (sota, caballo y rey). Los sucesos B = "la carta es de bastos" y F = "la carta es una figura" son compatibles, pues en cada palo, de las 10 cartas 3 son figuras. En total hay 12 figuras.
Se tienen las probabilidades:

$$P(B) = \frac{10}{40};\ P(F) = \frac{12}{40};\ P(B \cap F) = \frac{3}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}.$$

2.4. Probabilidad de la diferencia de sucesos

Para dos sucesos cualesquiera, A y B se tiene que: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

→ Es una consecuencia de que $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, y como $A-B$ y $A\cap B$ son incompatibles, entonces $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$.

Ejemplo:

Para los sucesos del ejemplo anterior, con: $P(A)$ = 0,5, $P(B)$ = 0,7 y $P(A\cap B)=0,3$, se tiene:

La probabilidad de que se cumpla A pero no B es: $P(A-B)$ = 0,5 – 0,3 = 0,2.

La probabilidad de que se cumpla B pero no A es:

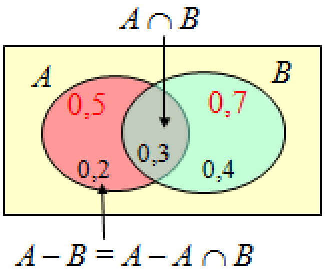
$P(B-A)$ = 0,7 – 0,3 = 0,4.

La probabilidad de que no se cumpla A es: $P\left(A^C\right)$ = 1 – 0,5 = 0,5.

La probabilidad de que no se cumpla B es: $P\left(B^C\right)$ = 1 – 0,7 = 0,3.

La probabilidad de que no se cumpla ni A ni B es:

$P\left[(A\cup B)^C\right]=1-P(A\cup B)$ = 1 – 0,9 = 0.1.



3. Algunos ejercicios de probabilidad relacionados con las propiedades vistas

Ejercicio 1. En el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de 2 dados con las caras numeradas, se consideran los sucesos A = "los dos resultados son iguales" y B = "los dos resultados son números mayores de 4". Determina las probabilidades siguientes sucesos:

a) A y A^C b) B y B^C c) $A\cup B$ y $A\cap B$ d) $(A\cup B)^C$ y $(A\cap B)^C$

Solución:

Hay 36 resultados posibles: (1, 1), (1, 2), …, (2, 2), …, (5,5), (5, 6), …, (6, 5), (6, 6). Luego:

a) El suceso A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}, luego:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\Rightarrow P\left(A^C\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

b) B = {(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)} ⇒ $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $P\left(B^C\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

c) $A\cup B$ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)}; $A\cap B$ = {(5, 5), (6, 6)} ⇒

$$P(A\cup B)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}\ ;\ P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

d) Del resultado anterior se deduce que:

$$P\left[(A\cup B)^C\right]=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9};\ P\left[(A\cap B)^C\right]=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}.$$

Observación. Pueden comprobarse las propiedades:

→ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}-\frac{2}{36}=\frac{8}{36}$.

→ $P\left[(A\cup B)^C\right]=P\left(A^C\cap B^C\right)=\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$ → Hay 28 sucesos que no son resultados dobles ni ambos mayores que 4.

→ $P\left[(A\cap B)^C\right]=P\left(A^C\cup B^C\right)=\frac{34}{36}=\frac{17}{18}$ → Hay 34 resultados que son no iguales o alguno de ellos menor o igual que 4.

Ejercicio 2. Si una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara (*C*) es doble que la obtener cruz (*X*), ¿cuánto vale la probabilidad de cada uno de esos sucesos?
Solución:

Como $P(C)+P(X)=1 \Rightarrow 2\cdot P(X)+P(X)=1 \Rightarrow 3P(X)=1 \Rightarrow P(X)=\frac{1}{3}$.

Por tanto, para esa moneda, se cumple que $P(X)=\frac{1}{3}$ y $P(C)=\frac{2}{3}$.

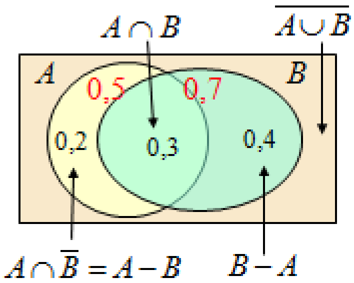
Ejercicio 3. Si *A* y *B* son sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(B) = 0{,}7$, $P(A \cap B) = 0{,}3$ y $P\left(A\cap \bar{B}\right)=0{,}2$, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $P(A)$ b) $P(B-A)$ c) $P(A\cup B)$ d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)$

Solución:
La situación se representa mediante el diagrama de Venn adjunto; a partir de él puede observarse:

$$A\cap \bar{B}=A-B=A-(A\cap B)\Rightarrow A=\left(A\cap \bar{B}\right)\cup(A\cap B),$$

que son sucesos incompatibles.



Luego:
a) $P(A)=P\left(A\cap \bar{B}\right)+P(A\cap B)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.

b) $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}7-0{,}3=0{,}4$.

c) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}9$.

d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}9=0{,}1$.

Ejercicio 4. En un Centro Escolar el 80 % de los alumnos practican algún deporte, el 25 % tocan un instrumento musical y el 15 % realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno de ese Centro elegido al azar no realice ninguna de las dos actividades.
Solución:
Sean *D* y *M* los sucesos "practicar algún deporte" y "tocar un instrumento musical, respectivamente.
Sus probabilidades son:

$$P(D)=0{,}80;\ P(M)=0{,}25;\ P(D\cap M)=0{,}15.$$

La probabilidad de realizar alguna de esas dos actividades es:

$$P(D\cup M)=P(D)+P(M)-P(D\cap M) \Rightarrow P(D\cup M)=0{,}80+0{,}25-0{,}15=0{,}90.$$

Luego, la probabilidad de que un alumno no realice ninguna actividad es:

$$P\left[(D\cup M)^C\right]=1-P(D\cup M)=1-0{,}90=0{,}10.$$

Observaciones: 1) Algunas veces la probabilidad se da en tantos por cien. No obstante, conviene recordar que la probabilidad es un número real comprendido entre 0 y 1. No es correcto, aunque se entiende, decir que la probabilidad de un suceso es del 80 %; lo correcto es decir que es 0,8.
2) En todo el capítulo se utiliza de manera indistinta A^C o $\bar{A}$ para indicar el contrario de *A*.

4. Técnicas de recuento

La determinación del número de sucesos elementales en muchos experimentos aleatorios requiere contar con exactitud y rapidez tanto el número total como el número de casos favorables del suceso en cuestión. Las técnicas de recuento facilitan ese cálculo.

- El método básico de recuento se conoce con el nombre de principio multiplicativo, que dice:

"Si un suceso puede darse de *m* maneras distintas en primera opción y a continuación puede suceder de *n* modos diferentes, entonces tiene $m \times n$ maneras de suceder".
Por tanto, para contar hay que determinar cuántas elecciones hay que hacer y cuántas opciones hay en cada elección sucesiva.

Ejemplos:
a) Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, puede vestirse de $5 \times 4 = 20$ formas diferentes.

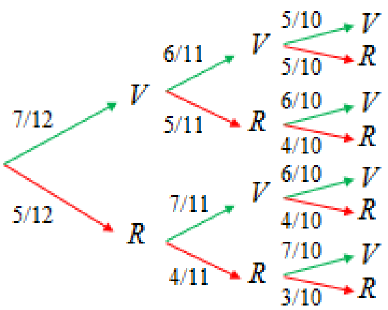
b) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar, por ejemplo, números de cuatro cifras, repetidas o no.
→ Si no pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, 9 opciones (elegido un dígito, el siguiente puede ser cualquiera de los 9 restantes); en la tercera, 8; y en la cuarta 7. En total, los números de 4 cifras no repetidas son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.
→ Si pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda otros 10; y lo mismo en la tercera y cuarta elección. En total, los números de 4 cifras con dígitos repetidos o no son $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.
→ El recuento anterior permite determinar cuántos números de 4 cifras hay con alguno de sus dígitos repetido. Serán 10000 – 5040 = 4960.

c) El sistema europeo de matriculación de automóviles, en cada país asigna a cada vehículo un número de 4 cifras seguido de tres letras elegidas entre 20, pues se excluyen las cinco vocales, la Ñ y la Q. Tanto los números como las letras pueden repetirse; además, el cambio de posición de un determinado trío de letras hace que una matrícula sea diferente. Así, la matrícula 2342 BDC es distinta de la matrícula 2342 DBC.
El número de grupos de 3 letras es $20 \cdot 20 \cdot 20$, cada letra es una de las 20 posibles.
Como hay 10000 números de 4 cifras, con este sistema, en cada país pueden matricularse 80 millones de vehículos: $10000 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 80\,000\,000$.

- **Diagramas de árbol**

Cuando el número de elecciones es reducido puede recurrirse a los diagramas de árbol, que son esquemas gráficos en los que se indica el número y nombre de las sucesivas elecciones. También suele indicarse la probabilidad de cada una de esas opciones.

Ejemplo:
Si se tiene una bolsa con 7 bolas verdes y 5 rojas, de la que se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento tres bolas, el diagrama de árbol que puede confeccionarse es el que se adjunta.
En la primera extracción, la probabilidad de que la bola sea verde (*V*) o roja (*R*) es $P(V) = \dfrac{7}{12}$ y $P(R) = \dfrac{5}{12}$.
Es evidente que si la bola extraída la primera vez es verde (*V*), en la bolsa quedan 11 bolas, de las que 6 son verdes y 5 rojas. Por tanto, a continuación, las probabilidades cambian, como se muestra de forma esquemática en el diagrama.



5. Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso *A* puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso *B*. Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la probabilidad de *A* condicionada por *B*, designándose como *P*(*A*/*B*).
Así, para el experimento consistente en el lanzamiento de dos dados, si se sabe que se han sacado puntuaciones mayores que 4 (suceso *B* = {(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)}), la probabilidad de que ambas sean iguales (suceso *A* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}), se obtiene teniendo en cuenta que ahora son 4 los casos posibles y 2 los favorables, o sea:

$$P(A/B)=\frac{\text{puntuaciones iguales}}{\text{puntuaciones mayores de 4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

En cambio, si se pide *P*(*B*/*A*), lo que se sabe es que ha salido un resultado doble (hay 6 casos posibles), de los que 2 de ellos, (5, 5) y (6, 6), son mayores de 4. Por tanto:

$$P(B/A)=\frac{\text{puntuaciones mayores de 4}}{\text{puntuaciones iguales}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Como $P(A)=\frac{1}{6}$ y $P(B)=\frac{1}{9}$ puede verse que las probabilidades condicionadas son distintas; y puede observarse que:

$$P(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)};\quad P(B/A)=\frac{2}{6}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

En general, la probabilidad condicionada de un suceso *A* por otro *B* es $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Ejemplo:
En el diagrama de árbol del ejemplo anterior se han tenido en cuenta las probabilidades condicionadas. Así, si se extraen dos bolas consecutivas de una bolsa que contiene 7 bolas verdes y 5 rojas, la probabilidad de que la primera bola sea verde es $P(V)=\frac{7}{12}$, y de que sea roja es $P(R)=\frac{5}{12}$. Ambos resultados condicionan la probabilidad del color de la segunda bola, cumpliéndose, tal y como se reflejó en el diagrama de árbol, que:

$$P(2^{a}V/1^{a}V)=\frac{6}{11};\ P(2^{a}R/1^{a}V)=\frac{5}{11};\ P(2^{a}V/1^{a}R)=\frac{7}{11};\ P(2^{a}R/1^{a}R)=\frac{4}{11}.$$

El razonamiento es análogo para la extracción de sucesivas bolas.

5.1. Sucesos dependientes e independientes

Dos sucesos son <u>dependientes</u> cuando la realización de uno de ellos condiciona la probabilidad del otro.
De las fórmulas de la probabilidad condicionada se obtienen las siguientes igualdades:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B);\qquad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Dos sucesos *A* y *B* son <u>independientes</u> cuando la probabilidad de que suceda *A* no se ve afectada porque haya sucedido o no *B*. Por tanto, $P(A/B)=P(A)$; igualmente, $P(B/A)=P(B)$.
En consecuencia, cuando dos sucesos son independientes se cumple que:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Ejemplos:
a) Cuando se tiran dos monedas a la vez (o la misma moneda dos veces consecutivas) los sucesos son: *CC*, *CX*, *XC* y *XX*, donde *C* y *X* significan cara y cruz, respectivamente.
Los sucesos cara o cruz son independientes, por tanto, se tendrán las siguientes probabilidades:

$$P(CC) = P(1^a C)\cdot P(2^a C/1^a C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4};\quad P(XC) = P(1^a X)\cdot P(2^a C/1^a X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(CX) = \frac{1}{4} \text{ y } P(XX) = \frac{1}{4}.$$

Puede deducirse que la probabilidad de que salga una cara y una cruz, sin considerar el orden, será: $P(C \text{ y } X) = P(CX) + P(XC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) El mismo razonamiento se hace cuando se lanzan más monedas. Así, para 3 monedas:

$$P(CCC) = P(1^a C)\cdot P(2^a C)\cdot P(3^a C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};\quad P(XXX) = \frac{1}{8}.$$

$$P(2C \ y \ 1X) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8};\ P(1C \ y \ 2X) = \frac{3}{8}.$$

c) Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla. Si se elige un alumno al azar, se tienen las siguientes probabilidades para los sucesos que se indican:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º Bach	60	65	125
2º Bach	50	55	105
Total	110	120	230

P(sea una chica) = $\frac{120}{230}$; P(sea un chico) = $\frac{110}{230}$;

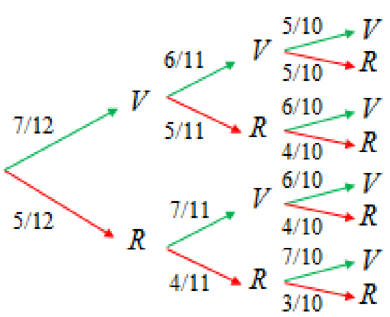
P(sea de 1º) = $\frac{125}{230}$; P(sea de 2º) = $\frac{105}{230}$; P(sea una chica de 1º) = $\frac{65}{230}$.

→ Observa: P(sea una chica de 1º) = P("sea chica" ∩ "ser de 1º) =

= P(sea una chica) · P(ser de 1º/ser chica) = $\frac{120}{230}\cdot\frac{65}{120} = \frac{65}{230}$.

P(sea una chica/ser de 2º) = $\frac{55}{105}$; P(sea de 2º/ser una chica) = $\frac{55}{120}$.

d) Para el ejemplo de la bolsa con 7 bolas verdes y 5 rojas, de la que se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento tres bolas, pueden darse las siguientes probabilidades:



→ P(las tres bolas extraídas sean verdes) = $P(VVV)$ =

$$= P(1^a V)\cdot P(2^a V/1^a V)\cdot P(3^a V/1^a V y 2^a V) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}.$$

→ P(la 1ª y 2ª sean rojas y la 3ª verde) = $P(RRV)$ =

$$= P(1^a R)\cdot P(2^a R/1^a R)\cdot P(3^a V/1^a R y 2^a R) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}.$$

→ Probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color:

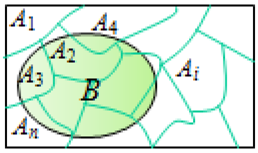
$$P(VVV) + P(RRR) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{270}{1320} = \frac{9}{44}.$$

→ Por tanto, la probabilidad de que las tres bolas extraídas no sean del mismo color (suceso contrario al anterior) será: $1 - \frac{9}{44} = \frac{35}{44}$.

6. Probabilidad total y teorema de Bayes (Inglés, 1702–1761)

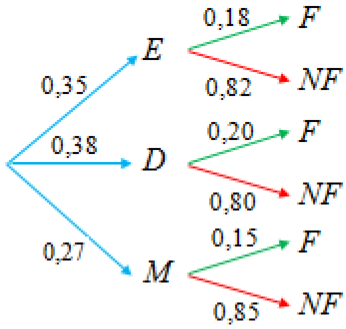
Si un suceso B está condicionado por otros sucesos A_i, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = E$, la probabilidad del suceso B es:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + ... + P(A_n)P(B/A_n).$$



Esta expresión se conoce con el nombre de probabilidad total.

Ejemplo:
Los alumnos de una universidad que cursan los grados de Economía, Derecho y Matemáticas se distribuyen como sigue: el 35 % cursa Economía; el 38 %, Derecho; el 27 % restante estudia Matemáticas. Si cada curso finaliza sus estudios de grado un 18 % de los estudiantes de Economía, un 20 % de los de Derecho y un 15 % de los de Matemáticas, ¿qué probabilidad existe de que un estudiante elegido al azar finalice ese curso sus estudios?



→ Se puede construir el diagrama adjunto, siendo E, D y M los sucesos ser estudiante de Economía, Derecho y Matemáticas, respectivamente; F y NF son los sucesos finalizar o no ese curso. Con esto, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar finalice sus estudios, $P(F)$, es:

$$P(F) = P(E)P(F/E) + P(D)P(F/D) + P(M)P(F/M).$$

Esto es:

$$P(F) = 0,35 \cdot 0,18 + 0,38 \cdot 0,20 + 0,27 \cdot 0,15 = 0,1795.$$

El teorema de Bayes permite el cálculo de probabilidades a posteriori, pues se obtienen después de contar con una información adicional. Por ejemplo, conocido que se ha producido el suceso B, ¿cuál es la probabilidad de que se haya realizado el suceso A_i? Eso es, ¿cuánto vale $P(A_i/B)$?

Por la probabilidad condicionada se sabe que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Ejemplo:
Siguiendo con el ejemplo anterior puede preguntarse: sabiendo que un alumno elegido al azar ha terminado sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que haya cursado el grado de Economía?

Por tanto, se sabe que se ha cumplido F; y se desea conocer la probabilidad $P(E/F)$.

Se tendrá:

$$P(E/F) = \frac{P(E)P(F/E)}{P(F)} = \frac{0,35 \cdot 0,18}{0,1795} = \frac{630}{1795} \approx 0,351.$$

Esto es, el 35,1 % de los estudiantes que han terminado son de Economía.

Análogamente:

$$P(D/F) = \frac{P(D)P(F/D)}{P(F)} = \frac{0,38 \cdot 0,20}{0,1795} = \frac{760}{1795} \approx 0,423;$$

$$P(M/F) = \frac{P(M)P(F/M)}{P(F)} = \frac{0,27 \cdot 0,15}{0,1795} = \frac{405}{1795} \approx 0,226.$$

7. Algunos ejercicios de probabilidad condicionada

Ejercicio 5. En una empresa trabajan 3 mujeres por cada 2 hombres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 26 % de los hombres necesitan gafas. Con esos datos construye una tabla de contingencia que distribuya a los trabajadores según su sexo y necesidad de gafas. A partir de los datos de esa tabla, si se elige un empleado al azar halla la probabilidad de los sucesos que se indican:

a) Que sea mujer.
b) Que sea hombre.
c) Que sea una mujer y necesite gafas.
d) Que sea mujer si necesita gafas.
e) Que necesite gafas.
f) Que sea mujer o necesite gafas.

Solución:
Para evitar fracciones y números decimales puede suponerse que en la empresa hay 500 trabajadores. De ellos, 300 serán mujeres; 200 serán hombres.
Necesitan gafas el 20% de las mujeres $\to$ 300 · 0,20 = 60;
Necesitan gafas el 26% de los hombres $\to$ 200 · 0,26 = 52.
Por tanto, puede construirse la siguiente tabla:

	Mujeres (M)	Hombres (H)	Total
Necesitan gafas (G)	60	52	112
No necesitan gafas (NoG)	240	148	388
Total	300	200	500

Se tienen las siguientes probabilidades:

a) Que sea mujer $\to$ $P(M)=\dfrac{300}{500}=0,6$ $\Rightarrow$ b) Que sea hombre $\to$ $P(\mathrm{H})=1-0,6=0,4$.

c) Que sea una mujer y necesite gafas $\to$ $P(M\cap G)=\dfrac{60}{500}=0,12$.

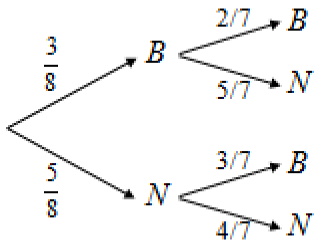
d) Que sea mujer si necesita gafas $\to$ $P(M/G)=\dfrac{60}{112}\approx 0,5357$.

e) Que necesite gafas $\to$ $P(\mathrm{G})=\dfrac{112}{500}=0,224$.

f) Que sea mujer o necesite gafas $\to$

$$P(M\cup G)=P(M)+P(G)-P(M\cap G)=\frac{300}{500}+\frac{112}{500}-\frac{60}{500}=\frac{352}{500}=0,704.$$

Ejercicio 6. Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. De ella se extraen, al azar y sin reemplazamiento, dos bolas. Construye el diagrama de árbol asociado al experimento. A partir de él determina:
a) La probabilidad de que las bolas extraídas sean de distinto color.
b) Si las bolas han resultado de distinto color, ¿cuál es la probabilidad de que la primera fuese blanca?
Solución:



a) $P(B\text{ y }N)=P(1^{a}B)\cdot P(2^{a}N/1^{a}B)+P(1^{a}N)\cdot P(2^{a}B/1^{a}N)$.

Luego: $P(B\text{ y }N)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{30}{56}$.

b) $P(1^{a}B/B\text{ y }N)=\dfrac{P(1^{a}B)\cdot P(2^{a}N/1^{a}B)}{P(B\text{ y }N)}=\dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{30}{56}}=\dfrac{1}{2}$.

8. Combinatoria

El principio multiplicativo puede concretarse (y ampliarse) cuando se distinguen las sucesivas formas de agrupamiento.
La idea básica de la combinatoria es que en cada experimento hay que conocer cuántos elementos intervienen inicialmente, cuántas elecciones se van a realizar, conocer si la distinta disposición de los elementos cambia el resultado o no y saber si los elementos pueden repetirse o no. (Así, en las agrupaciones de números el orden es determinante: el par 37 es distinto de 73; pero si se mezclan dos colores en la misma proporción, la mezcla rojo–verde es idéntica a la verde–rojo).

Para poderlo expresar convenientemente se definen los números factoriales y combinatorios.

- **Factorial de un número**
  $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1$ $\to$ Se lee factorial de n.

$\to$ n debe ser un número entero no negativo.
Por convenio, a factorial de cero se le asigna el valor 1: 0! = 1. (También: 1! = 1).

Ejemplos:
a) Factorial de 3: 3! = 3 · 2 · 1 = 6.

b) Factorial de 7: 7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5040.
$\to$ Las calculadoras científicas suelen traer una tecla de factoriales: $\boxed{x!}$

- **Números combinatorios**
  $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $\to$ (Se lee n sobre r).

Ejemplos:
a) 5 sobre 3: $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10$.

b) 15 sobre 4: $\binom{15}{4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = \dfrac{15!}{4!\cdot 11!} = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ = 1365. (Es aconsejable simplificar).

La simplificación se hace antes de multiplicar; así, por ejemplo:

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!\cdot 11!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot \cancel{(11\cdot 10\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{(11\cdot 10\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)}} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot \cancel{12}}{\cancel{4\cdot 3}\cdot 2\cdot 1} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{2\cdot 1} = 15\cdot 7\cdot 13 = 1365$$

$\to$ Las calculadoras científicas suelen traer una tecla de números combinatorios: $\boxed{nCr}$

Los números factoriales y combinatorios cumplen algunas propiedades interesantes. Por ejemplo:

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Puedes ampliar en matematicasjmmm: aquí.

Los nombres de las distintas agrupaciones son: variaciones, permutaciones y combinaciones.

8.1. Variaciones ordinarias
Se dispone de *m* elementos y se eligen *n* de ellos para formar un grupo. Los elementos deben ser distintos y con $n \le m$.
Cuando dos de esos grupos son diferentes si contienen algún elemento distinto o sus elementos están en distinto orden, entonces cada uno de esos grupos se llama una variación de *m* elementos tomados *n* a *n*.
El número de variaciones de *m* elementos tomados *n* a *n* se representa por $V_{m,n}$, y vale:

$V_{m,n} = m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$. → (El número total de factores es *n*).

Ejemplos:
a) $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$. → Calculadoras: $\boxed{nPr}$

b) Tres premios diferentes (supongamos de valor 10, 5 y 1 €) se pueden repartir entre 20 personas de $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ maneras diferentes.
→ Obsérvese que su número se ajusta al principio de enumeración (principio multiplicativo): el primer premio puede recaer en cualquiera de las 20 personas; el segundo, en alguno de los 19 restantes; el tercero, en uno de los 18 no premiados en 1ª o 2ª opción.

- **Variaciones con repetición**

Se dispone de *m* elementos y se eligen *n* de ellos, pudiendo repetirse. (Como pueden repetirse, *n* puede ser también mayor o igual que *m*).
Como en las variaciones ordinarias, dos de esos grupos son diferentes cuando tienen algún elemento distinto o están colocados en distinto orden.
El número de variaciones con repetición de *m* elementos tomados *n* a *n* se representa por $VR_{m,n}$, y vale:

$VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$.

Ejemplos:
a) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar números de tres cifras. Por ejemplo: 000, 001, 145, 344, 999.
Es un caso claro de variaciones con repetición (de 10 elementos tomados 3 a 3). En total hay $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$.
→ Si no pueden repetirse los dígitos, se trataría de un problema de variaciones ordinarias. Su número será $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

b) En el sistema binario, el número de códigos de 10 cifras que se pueden formar son las variaciones con repetición de 2 elementos, {0, 1}, tomados 10 a 10. Su número es

$VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$.

c) Si se tiran 5 monedas y se observa el número de caras (*C*) o cruces (*X*) que pueden salir, algunas de las secuencias son: *CCCCC*, *CXCCX*, *CCCXC*, …, *XXXXX*. Se tienen dos resultados {*C*, *X*}, que pueden repetirse 5 veces. Su número es $VR_{2,5} = 2^5 = 32$.

Observación: En algunos problemas se utilizan las expresiones "sin reemplazamiento" o "con reemplazamiento"; o sus análogas, sin o con reposición. Se indica con ello que un mismo elemento no puede repetirse (sin) o sí puede repetirse (con).

8.2. Permutaciones de *m* elementos

Son las variaciones (ordinarias) en las que intervienen los *m* elementos considerados, esto es $V_{m,m}$.

Por tanto, dos permutaciones son diferentes solo cuando los elementos están colocados en distinto orden, pues en todos los casos interviene todos los que hay.

Las permutaciones de *m* se escriben P_m ; su número es:

$$P_m = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

Ejemplos:

a) Algunas permutaciones de las letras T, O, R, O son: TORO, OTRO, ROTO y TOOR. En total hay factorial de 4 permutaciones:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

b) Seis libros pueden colocarse en una estantería de permutaciones de 6 maneras distintas.

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

c) Cinco personas pueden sentarse en una fila de 5 butacas de $P_5 = 5! = 120$ maneras distintas.

- **Permutaciones con repetición**

Cuando en una permutación puede repetirse alguno de los elementos que intervienen se habla de permutaciones con repetición. En cada caso hay que indicar el número de veces que puede repetirse el elemento en cuestión.

La definición de permutaciones con repetición es la siguiente:

Una permutación con repetición de *m* elementos, en los que un elemento *A* se repite *a* veces, otro *B* se repite *b* veces y otro *C* se repite *c* veces, con $a + b + c = m$, es cada uno de los grupos diferente que pueden formarse de *m* elementos cada grupo, donde *A*, *B* y *C* están repetidos *a*, *b y c* veces, respectivamente.

Dos de esas permutaciones son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden.

Su número se denota por $P_m^{a,b,c}$ y vale: $P_m^{a,b,c} = \dfrac{m!}{a!\cdot b!\cdot c!}$.

Ejemplos:

a) En el sistema binario solo se utilizan los dígitos 0 y 1. Así, 10011101 es un código de 8 cifras en ese sistema. Ese número/código está formado por 5 unos y 3 ceros. Con el mismo número de ceros y unos se tienen otros códigos: 11111000, 11100011, …

Se trata de un caso de permutaciones de de 8 elementos (dígitos) en los que el dígito 0 se repite 3 veces y el dígito 1 se repite 5 veces. El número de códigos así formados es

$$P_8^{5,3} = \frac{P_8}{P_5\cdot P_3} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56.$$

b) Los números de cinco cifras en los que aparecen 2 cuatros y 3 cincos son:

44555, 45455, 45545, 45554, 54455, 54545, 54554, 55445, 55454 y 55544

Estos grupos son las permutaciones con repetición de 5 números donde el 4 se repite dos veces y el 5 se repite 3 veces. Esto es $P_5^{2,3}$.

Su número es $P_5^{2,3} = \dfrac{P_5}{P_2\cdot P_3} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$.

8.3. Combinaciones ordinarias

Se dispone de *m* elementos y se eligen *n* de ellos, todos distintos. Si el orden en que están dispuestos esos elementos no distingue un grupo de otro, cada uno de esos grupos en una combinación de *n* elementos.

El número de combinaciones que pueden formarse con *m* elementos tomados n a *n* viene dado por la fórmula:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad \rightarrow \text{ Observa que esa expresión es equivalente a } C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Ejemplos:

a) Entre 20 personas (A, B, C, …) pueden elegirse muchos grupos de tres de ellas para que los representen en donde sea menester. Algunas de esas ternas son ABC, ABD, AMN, …; la terna ABC es la misma que BAC: no cambia si se colocan en distinto orden, pues son las mismas tres personas.

En total, el número de ternas es $C_{20,3}$.

$$C_{20,3} = \frac{V_{20,3}}{P_3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} = 1140.$$

b) Si se tienen 7 botes de pinturas de distintos colores y se mezclan de tres en tres, en la misma proporción, cada uno de los nuevos colores obtenidos es una de las combinaciones de 7 (colores) tomados 3 a 3.

Al mezclar los colores amarillo (*A*), verde (*V*) y rojo (*R*), el color resultante será idéntico independientemente del orden de mezcla: *AVR*, *ARV*, *VAR*, *VRA*, *RAV* o *RVA*.

Para calcular cuántas combinaciones diferentes pueden formarse, se observa:

→ Si se toman 3 botes distintos entre los 7 que hay, el primer bote puede ser cualquiera de los 7, por ejemplo, amarillo (*A*); el segundo, cualquiera de los 6 botes restantes, por ejemplo, rojo (*R*); el tercero, cualquier otro de los 5 que quedan, por ejemplo, verde (*V*). Se forma así la combinación *ARV*.

→ En total, esas elecciones pueden hacerse de 7 · 6 · 5 formas diferentes ($V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$); pero como cada combinación de tres elementos genera $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ variaciones idénticas, el número 210 habrá que dividirlo entre 6. Por tanto,

$$C_{7,3} = \frac{V_{7,3}}{P_3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

c) Si en un examen hay que contestar 6 preguntas entre 10 propuestas, las respuestas pueden darse de combinaciones de 10 preguntas tomadas 6 a 6, pues el orden de contestación de las preguntas no cambia el modelo de examen. Dos exámenes son diferentes solo cuando contienen alguna pregunta diferente.

Por tanto, el total de posibles respuestas será

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210.$$

Problemas Propuestos

Experimentos aleatorios. Probabilidad: regla de Laplace

1. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso "la primera bola extraída ha sido un 5".
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

2. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.

3. Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.
a) Si se tira al aire calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
b) Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
c) Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

4. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate.
¿Es un juego equitativo?

5. Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire. Si salen 3 caras o 3 cruces el jugador gana 7 puntos; en caso contrario el jugador pierde 2 puntos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?
b) ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?
c) ¿Es un juego equitativo?

6. Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

7. Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

8. Los estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato de un centro escolar se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla, aunque hay números desconocidos:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º	60	a	130
2º	b	65	c
Total	110	d	245

a) Completa los números que faltan.
b) Se elige un estudiante al azar y se consideran los siguientes sucesos:
A = "sea una chica"; B = "sea de 1º"; C = "sea una chica de 2º"; D = "sea un chico de 1º"
F = "sea de 1º si se sabe que es un chico"; G = "sea un chico si se sabe que es de 1º"
Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

9. (Propuesto en ABAU 2018, Galicia)
En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 si es de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar:
a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

10. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A)=0{,}7$; $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cup B)=0{,}85$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$ b) $P\left((A\cap B)^C\right)$
c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

<u>Probabilidad: propiedades</u>

11. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:
$P(A)=0,4$; $P(B)=0,2$ y $P(A\cup B)=0,5$.
a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? b) ¿Son sucesos independientes?

12. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades:
$P(A)=0,4$; $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=0,7$.
a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.
b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.

13. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}4$; $P(A\cup B) = 0{,}5$; $P(B/A) = 0{,}5$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$ b) $P(B)$ c) $P\left(A/B\right)$

14. Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0{,}09$; $P(B) = 0{,}07$ y $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=0{,}97$. Además, los sucesos A y C son incompatibles.
a) Estudia si los sucesos A y B son independientes. b) Calcula $P\left(A\cap B/C\right)$.

15. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, de los que se conocen las probabilidades $P(A) = 0{,}65$ y $P(B) = 0{,}30$. Determina las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$ en cada uno de los siguientes supuestos:
a) Si A y B fuesen incompatibles. b) Si A y B fuesen independientes. c) Si $P(A/B) = 0{,}40$.

16. Los resultados académicos de cierto grupo de Bachillerato muestran que la probabilidad de aprobar Matemáticas es 0,6 y la de aprobar Economía 0,7. Además, la probabilidad de aprobar las dos asignaturas es 0,45. Si en ese grupo se elige un alumno al azar, cuánto vale la probabilidad de que:
a) Apruebe alguna de las dos asignaturas.
b) Apruebe solamente una de las dos asignaturas.
c) No apruebe ninguna de las dos asignaturas.
d) ¿Es independiente aprobar Matemáticas de aprobar Economía?

17. Una alarma de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0,95 y de que se active el segundo es 0,90. Halla la probabilidad de que ante una emergencia:
a) Se active solo uno de los indicadores. b) Se active al menos uno de los dos indicadores.

18. Marta y Caty son jugadoras de baloncesto. Marta encesta 2 de cada 5 tiros; Caty, 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) Ambas han encestado. b) Ninguna ha encestado.
c) Solo Marta ha encestado. d) Al menos una ha encestado.

19. En un IES hay dos grupos que cursan Matemáticas II. En el primero el 55 % de los estudiantes son hombres y en el segundo, son mujeres el 60 %. Se elige al azar un estudiante de cada grupo.
a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
A = "Ambos son mujeres"; B = "Solo uno es mujer": C = "Los dos son hombres"
b) Razona si el suceso contrario del suceso A es el B, el C, el $B \cap C$, el $B \cup C$ o algún otro suceso y calcula su probabilidad.

20. En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se selecciona una muestra aleatoria de 3 productos:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que solo el segundo sea defectuoso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, uno de los tres sea defectuoso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente uno defectuoso?

Probabilidad condicionada y total: Bayes

21. Hace dos días me presentaron un matrimonio, y me dijeron que tenían dos hijos. Ayer me enteré de que uno de los hijos se llamaba Ramiro, y hoy he sabido que éste es el mayor de los dos hermanos. ¿Cómo ha ido variando, con el proceso de la información recibida, la probabilidad de que los dos hijos sean varones? Determina estas probabilidades.

22. Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(B/A)$

23. Sean A y B dos sucesos incompatibles de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(B/A)$

24. Según la revista *Allmovil*, el 63 % de los usuarios de móvil en España tiene un "Smartphone". Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77 % lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otros tipos de teléfono móvil solo el 8 % lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

25. Sobre una mesa hay dos bolsas iguales opacas. Una de ellas contiene 2 bolas verdes y 3 rojas; la otra, 4 bolas verdes y 1 roja.
a) Si se elije una bolsa al azar y se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?
b) Si se elije una bolsa al azar y se extraen dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean de distinto color?

26. Una caja contiene 7 bolas blancas y 10 negras. Se extrae al azar una bola y se sustituye por dos del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que:
a) La segunda bola sea blanca.
b) La segunda bola sea del mismo color que la primera.

27. Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna *B* contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna *A*; en caso contrario se extrae una bola de la urna *B*.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna *A*?

28. Se tiene una urna con 3 bolas blancas y 2 negras. Se saca una bola al azar que se introduce en otra urna que contiene 3 bolas blancas y 5 negras. De esta urna se extrae una segunda bola. Calcula:
a) La probabilidad de que segunda sea blanca si la primera fue blanca.
b) La probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra.
c) La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.
d) La probabilidad de que las dos bolas sean blancas.
e) La probabilidad de que la segunda bola sea blanca.
f) La probabilidad de que la primera hubiese sido blanca si la segunda fue blanca.

Combinatoria

29. En una empresa trabajan 7 mujeres y 12 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

30. En una bolsa hay 7 bolas blancas y 9 negras. Si se extraen a la vez 3 bolas al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Las 3 bolas sean negras.
b) Una sea negra y las otras 2 blancas.
c) Dos sean negra y 1 blanca.
d) Al menos 1 sea blanca.

31. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.
a) Halla la probabilidad de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas.
b) Si los opositores tienen que contestar correctamente a los dos temas elegidos, ¿cuál será la probabilidad de aprobar que tiene otro candidato que se sabe 40 de los 50 temas?

32. (Propuesto en Selectividad, 2013. Castilla La Mancha)
En un temario para la oposición a una plaza, hay 25 temas de los cuáles 5 son de legislación y el resto del contenido propio de la plaza. Cada opositor elige al azar dos temas. Obviamente el mismo tema no puede salir dos veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que de los dos temas elegidos ninguno sea de legislación?
b) Si un opositor ha estudiado 10 temas de los 25, ¿cuál es la probabilidad de que de los dos temas escogidos al menos uno sea de los que ha estudiado?

33. En un grupo de 12 cartas de la baraja española hay 5 oros, 4 espadas y 3 copas. Si se barajan las 12 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres de copas queden juntas?

Otros problemas

34. (Propuesto en Selectividad, 2013. Castilla y León)
El 70 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 80 % de las compras realizadas por éstas supera los 20 €, mientras que sólo el 30% de las realizadas por hombres supera esa cantidad.
a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 20 €?
b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer?

35. (Propuesto en Selectividad, 2013. Andalucía)
Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40 % les gusta la salsa, al 30 % les gusta el merengue y al 10 % les gusta tanto la salsa como el merengue.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?
b) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?
c) ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

36. (Propuesto en Selectividad, 2013. Comunidad Valenciana)
El 50 % de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40 % afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70 % de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:
a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes
b) La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B.
c) Si practica en deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
d) ¿Son independientes los sucesos "Practicar el deporte A" y "Practicar el deporte B"? ¿Por qué?

37. Una urna *A* contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Otra urna *B* contiene 3 bolas rojas y 1 verde. Se extrae al azar una bola de la urna *A* y, sin mirarla, se pasa a la urna *B*. A continuación, se extraen sin reemplazamiento dos bolas de la urna *B*. Halla la probabilidad de que:
a) Ambas bolas sean de color rojo. b) Ambas bolas sean de distinto color.

38. a) De una baraja española (40 cartas; 4 "palos": oros, copas, espadas y bastos) se extrae una carta y se vuelve a introducir repitiendo esta operación tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres oros?
b) De la misma baraja se extraen tres cartas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean copas? ¿Y de que ninguna sea de copas?

39. Se lanzan *n* dados al aire, calcula (en función de *n*) la probabilidad *p* de obtener una suma de puntos igual a $n + 1$. Determina los valores de *n* para los cuales $p > 0,01$.

40. (Propuesto en Selectividad, 2012. Madrid)

Se consideran dos sucesos *A* y *B* tales que: $P(A)=\frac{1}{3}$; $P(B/A)=\frac{1}{4}$; $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Calcula razonadamente:

a) $P(A\cap B)$ b) $P(B)$ c) $P(\overline{B}/A)$ d) $P(\overline{A}/\overline{B})$

41. Se van a sortear 4 viajes a Roma entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una de las que ha obtenido un rey (*R*) gana un viaje.
Calcula la probabilidad de que gane un viaje:
a) La primera persona que recibe la carta.
b) La segunda persona que recibe la carta.
c) Ninguna de las dos primeras personas gane el viaje.

42. Cuatro personas suben a un autobús cuando sólo quedan cinco paradas más para el final de la línea. Suponiendo que todos tienen igual probabilidad de bajarse en cualquier parada, halla las probabilidades siguientes:
a) Que esas cuatro personas se bajen en la misma parada.
b) Que no baje ninguna de ellas en las primeras tres paradas.
c) Que en las primeras cuatro paradas baje una de esas personas en cada parada.

*Más problemas de EBAU y EvAU.

Soluciones

1. b) 90. c) 2/5. d) 1/10.
2. a) 1/10. b) 1/100. c) 1/10.
3. a) 1/3; 2/3. b) 4/9. c) 2/9.
4. Favorable a Pablo.
5. a) 1/4. b) 9/64. c) Es ventajoso para el jugador.
6. a) 1/5. b) 3/5. c) 2/5.
7. Son equiprobables.
8. a) 135/245; 130/245; 65/245; 60/245; 60/110; 60/130.
9. a) 41/80. b) 69/80. c) 147/393.
10. a) 0,45. b) 0,55. c) 0,40.
11. a) No. b) No.
12. a) No. b) Sí.
13. a) 0,2. b) 0,3. c) 2/7.
14. a) No. b) 0.
15. a) 0,95; 0. b) 0,755; 0,195. c) 0,83; 0,12.
16. a) 0,85. b) 0,40. c) 0,15. d) No.
17. a) 0,14. b) 0,995.
18. a) 6/35. b) 12/35. c) 8/35. d) 23/35.
19. a) 0,27; 0,51; 0,22. b) $B\cup C$; 0,73.
20. a) 0,081. b) 0,271. c) 0,243.
21. 1/4; 1/3; 1/2.
22. a) 0,2. b) 0,7. c) 0,4. d) 0,5.
23. a) 0. b) 0,9. c) y d) 0.
24. 0,5147.
25. a) 2/5. b) 1/2.
26. a) 22/51. b) 22/51.
27. 27/40. b) 5/9.
28. a) 4/9. b) 1/3. c) 7/15. d) 4/15. e) 18/45. f) 2/3.
29. 252/969.
30. a) 0,15. b) 0,3375. c) 0,45. d) 0,85.
31. a) 0,9143. b) 0,6367.
32. a) 19/30. b) 39/60.
33. 1/22.
34. a) 0,65. b) 56/65.
35. a) 1/4. b) 1/3. c) No.
36. a) 0,30. b) 0,20. c) 1/2. d) Sí.
37. a) 35/96. b) 1/2.
38. a) 1/64. b) 3/247.
39. $n/6^n$; $n = 1, 2, 3$.
40. a) 1/12. b) 1/4. c) 3/4. d) 2/3.
41. a) 1/10. b) 1/10. c) 119/156.
42. a) 1/125. b) 16/625. c) 24/6.