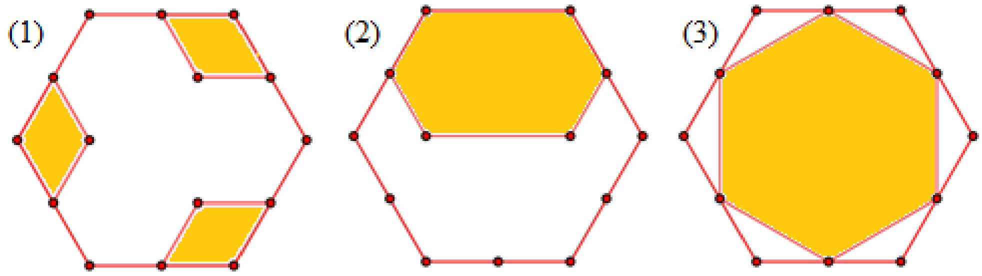
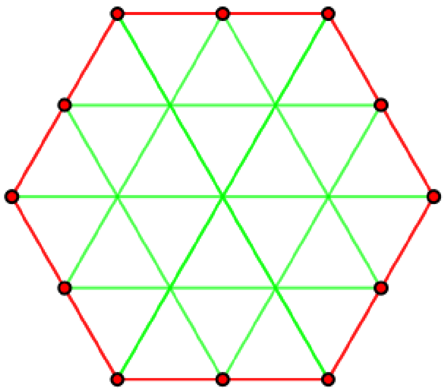
ÁREAS

Las cuestiones que se plantean en el problema que sigue se han obtenido del XXII Concurso de Primavera de Matemáticas.
Son fáciles y pueden proponerse a los alumnos de cualquier nivel de Enseñanza Secundaria.
Requieren conocer el teorema de Pitágoras, y poco más.

Problema
Los puntos marcados en los siguientes hexágonos regulares son vértices o puntos medios de sus lados; en los casos (1) y (2) las demás líneas son paralelas a alguno de los lados. Deduce para cada caso la fracción de área del hexágono que representa la zona sombreada.

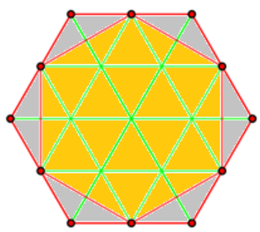


Si el lado del hexágono mide 4 cm, ¿cuál es el área de cada sombra?
Solución:



Si desde los puntos medios y vértices se trazan las líneas que se ven en la figura de la derecha, la solución es inmediata.
Como las líneas trazadas son paralelas a dos de los lados del hexágono, los 24 triángulos equiláteros que se forman son todos iguales: tienen la misma área.
Por tanto:
→ La fracción de área del hexágono de la zona sombreada del caso (1), que está formada por 6 de esos triángulos será: $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

→ La zona sombreada del caso (2) está formada por 10 de esos triángulos (cuéntalos). Le corresponde la fracción $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$.

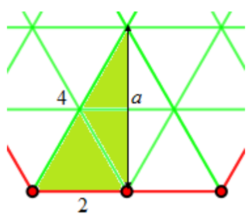


→ La zona sombreada del caso (3) está formada por 18 de esos triángulos.
Le corresponde la fracción $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$. (Observa que cada dos triángulos grises son como un triángulo equilátero).

- Si el lado del hexágono mide 4 cm su área total es:

$$S_H=\frac{p\cdot a}{2}\to p=24\text{ cm};\ a=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\text{ cm}\Rightarrow S_H=\frac{24\cdot 2\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Por tanto:



Caso (1): $\frac{1}{4}\cdot 24\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.   Caso (2): $\frac{5}{12}\cdot 24\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

Caso (3): $\frac{3}{4}\cdot 24\sqrt{3}=18\sqrt{3}$.