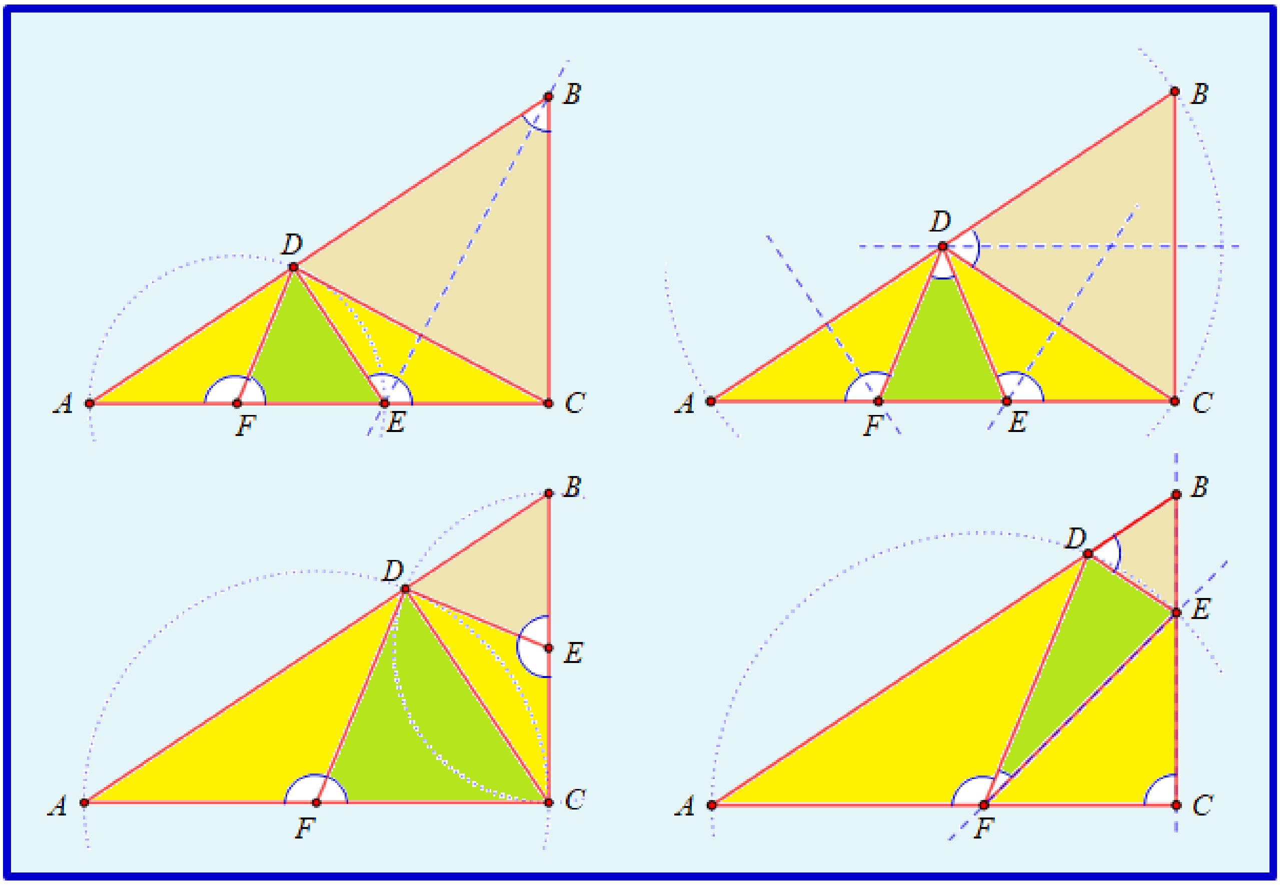
PARTICIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO EN 4 TRIÁNGULOS ISÓSCELES



José María Martínez Mediano

www.matematicasjmmm.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

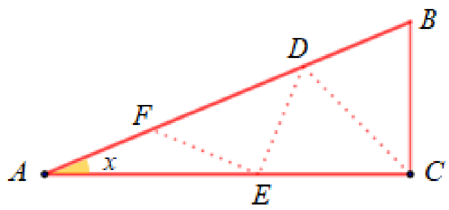
Una partición de un conjunto es su división en subconjuntos de modo que: 1) La unión de todos los subconjuntos sea el conjunto inicial; 2) Todos los subconjuntos son disjuntos.

Aquí se aborda la partición de un triángulo *ABC*, rectángulo en *C*, en 4 triángulos isósceles. Para ello hay que encontrar otros tres puntos *D*, *E* y *F* sobre los lados del triángulo inicial que sean vértices de los nuevos triángulos. (En algún caso, aunque solo de manera anecdótica, se darán soluciones con el punto *F* interior al triángulo).

Cada partición dependerá de la amplitud del ángulo $A = x$, y de los puntos que se elijan como "vértices singulares" en cada nuevo triángulo. (Con la expresión "vértice singular" designo el ángulo desigual de cada triángulo isósceles, el vértice del que parten sus dos lados iguales. Esos ángulos los denotaré con números: (1), (2), (3) y (4). Los demás ángulos se indican con letras griegas α, β, γ y δ, que se leen como alfa, beta, gamma y delta, respectivamente).

Clasificaré y estudiaré estas particiones dependiendo de la posición que ocupen los puntos *D*, *E* y *F*.

1. Particiones de Tipo I.
Se obtienen tomando dos puntos (*D* y *F*) en la hipotenusa *AB* y el tercero (*E*) en el cateto *AC*. Se estudiarán en tres grupos: Tipo I (a); Tipo I (b) y Tipo I (c).



El número de casos que pueden plantearse son 81, aunque la partición propuesta no siempre es posible. (El total de 81 casos es el resultado de multiplicar $3 \times 3 \times 3 \times 3$, pues cada uno de los "vértices singulares" de cada triángulo isósceles puede situarse en sus 3 vértices). Aquí se indicarán todas las soluciones y algunas imposibilidades. En los casos posibles se dibujará la solución utilizando "regla y compas".

2. Particiones de Tipo II.
Se obtiene tomando el punto *D* en la hipotenusa *AB* y los puntos *E* y *F* sobre el cateto *AC*. Pueden plantearse otros 81 casos.

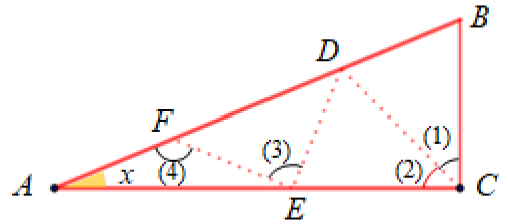
3. Particiones de Tipo III.
Son las que se obtienen cuando *C* sea vértice singular de 90º de amplitud; por tanto, el triángulo *BCD* será isósceles y rectángulo. Pueden plantearse 27 casos.

4. Particiones de Tipo IV.
Se forman cuando los puntos *D*, *E* y *F* se eligen cada uno en un lado del triángulo. Estudiaré un caso general y algunos particulares.

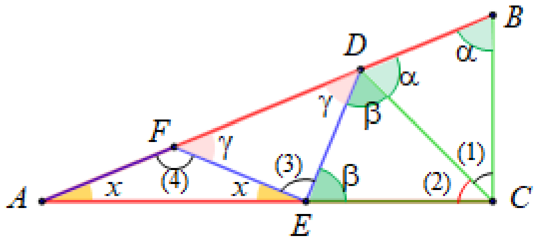
En ningún caso se trata de un problema difícil; por tanto, se puede plantear a aficionados a la Geometría que tengan algunos conocimientos básicos como los que concreto a continuación:
1) En un triángulo isósceles, la altura desde el vértice singular coincide con la bisectriz del ángulo correspondiente; y también con la mediatriz del lado opuesto.
2) Saber resolver ecuaciones y sistemas lineales, que aquí resultan muy sencillos; las incógnitas son la amplitud de cado uno de los ángulos.

Inicialmente, con el objetivo de describir el problema con precisión, plantearé uno de los casos más sencillos.

Caso 1
Sea el triángulo *ABC*, rectángulo en *C*. Si los cuatro triángulos dibujados en él son isósceles, ¿cuánto debe valer *x* para que tal partición sea posible?



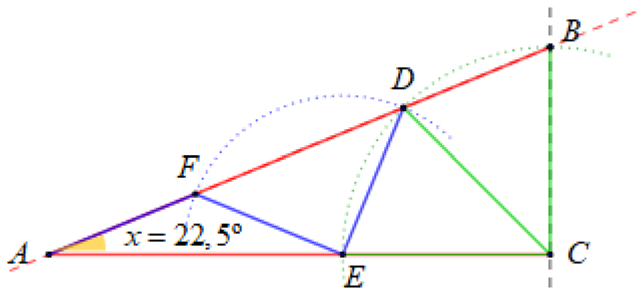
Una vez encontrado el valor de *x* dibuja (con regla y compás) cada uno de esos triángulos.
Solución:



Si se designan por α, β y γ los ángulos marcados en la figura, como los triángulos son isósceles, se tendrá:
En el cuadrilátero *BCED*:
$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ$;
En el ángulo llano *D*:
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ$;
Como γ es el ángulo externo del triángulo *AFE* en *F* se tiene que $\gamma = 2x \rightarrow 2x = 45^\circ \Rightarrow x = 22{,}5^\circ$.

Las medidas de los otros ángulos se deducen de:
$(4) + 2x = 180^\circ \Rightarrow (4) = 135^\circ$; $(3) + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow (3) = 90^\circ$; $x + (3) + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 67{,}5^\circ$;
$(2) + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow (2) = 45^\circ$; $(1) = 45^\circ$; $\alpha = 67{,}5^\circ$.

→ La construcción se puede hacer como sigue:
1) Se traza el lado *AC*, con una longitud arbitraria, y una perpendicular por *C* a él.
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x = 22{,}5^\circ$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*; el punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*, y al lado *AC* en *E*. Se obtienen así los triángulos *BCD* y *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



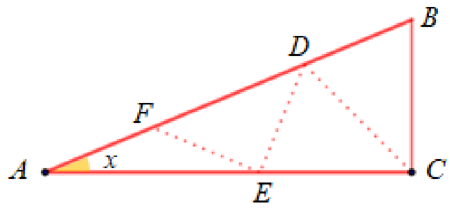
Nota: Estos dibujos se hacen con GeoGebra. He elegido: *A* = (0, 0) y *C* = (8, 0). En lugar de medir un ángulo de amplitud *x*º, que siempre resultará impreciso, el lado *AB* se traza sobre la recta $y = \tan(A) \cdot x$, (siendo *x* la variable independiente de la ecuación $y = mx$) ⇒ *B* es el punto de corte de la vertical por *x* = 8 con $y = \tan(A) \cdot x$. (No debe confundirse *x*º con *x*).

→ En este caso, $y = \tan(22{,}5^\circ) \cdot x \Leftrightarrow y = 0{,}414 \cdot x$; $B = (8,\ 0{,}414 \cdot 8) = (8,\ 3{,}314)$.

Resuelto el Caso 1 pueden plantearse otras particiones, dependiendo de en qué puntos se sitúen los vértices singulares.
Para que la discusión resulte ordenada estableceré algunas condiciones, indicando en cada caso en qué lado hay que situar los puntos *D*, *E* y *F*.

1. PARTICIONES DE TIPO I

Condiciones:
1) Los puntos *D* y *F* están sobre la hipotenusa y el punto *E* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* (ángulo recto del triángulo dado *ABC*) se sitúan dos vértices.



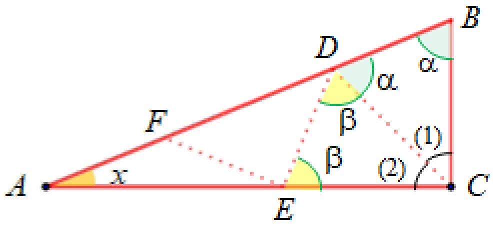
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *AFE*.
Como ya se ha advertido, pueden presentarse 81 casos (variaciones), que se obtienen al ir cambiando la posición de los vértices singulares. Para simplificar, dichos vértices singulares se indican sustituyendo el punto correspondiente por *.
Con esto, el **Caso 1**, visto inicialmente, se corresponde con la variación: *B*D*, *D*E*, *D*F* y *A*E*.

<u>1.1. Particiones de Tipo I (a)</u>

Además de lo indicado, el vértice singular (1) se sitúa en *C* (triángulo *B*D*).
Así se obtienen 27 casos, que designaré con los términos T1, T2, … hasta T27.

- **Casos 1 a 9.**

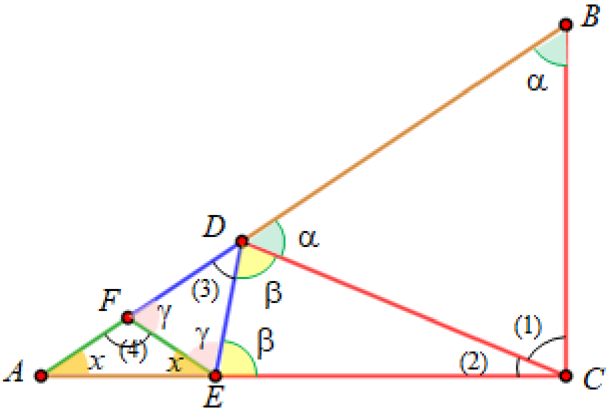
Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla, donde NO significa que la partición no es posible, aunque no siempre detallaré esa imposibilidad. Sí demostraré cada una de las opciones posibles, indicando cómo se construiría dicha partición.



<table>
<tr><td>Triángulos</td><td>BCD</td><td></td><td>DCE</td><td></td><td>DEF</td><td></td><td>AFE</td><td colspan="2">D y F en la hipotenusa; E en AC</td></tr>
<tr><td>T1. Solución 1</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>A*E</td><td>Sí</td><td rowspan="9">En estos 9 casos los vértices (1) y (2) se mantienen fijos, ambos en C.
Siempre α + β = 135º.
En los casos T2, T3, T5 y T6 se tiene que $\delta + \gamma = 180º$, que no puede ser.
En T7, (1) = 90º → absurdo; en T9, x = 90º → absurdo.</td></tr>
<tr><td>T2. Imposible 1</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>*FE</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T3.</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>AF*</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T4. Solución 2</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>A*E</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>T5.</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>*FE</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T6.</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>AF*</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T7.</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>A*E</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T8. Imposible 2</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>*FE</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T9.</td><td>B*D</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>AF*</td><td>NO</td></tr>
</table>

Solución 2 (Referencia T4)
Con vértice singular (1) en *C*, haciendo también el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *D*, para el triángulo *DEF*; y en *F*, para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*D* → *D*E* → **EF* → *A*E*).

Con esto, se cumple:



En el cuadrilátero *BCED*:

$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ.$$

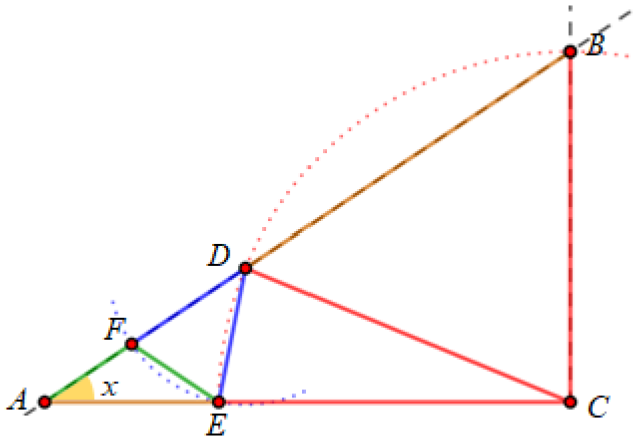
El ángulo llano en *D*: $\alpha + \beta + (3) = 180^\circ \Rightarrow (3) = 45^\circ$.

En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 67,5^\circ$.

Exterior en *F*: $\gamma = 2x \Rightarrow x = 33,75^\circ$.

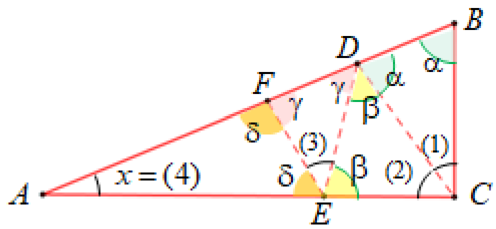
Los otros ángulos miden: α = 56,25º; (1) = 67,5º; (2) = 22,5º; β = 78,75º; (4) = 112,5º.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Se traza el lado *AC* (con una longitud arbitraria) y una perpendicular por *C* a él.
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x = 33,75^\circ$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*; el punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* y al lado *AC* en *E*. Se obtienen así los triángulos *BCD* y *DCE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtiene así el triángulo *DEF*.
5) El cuarto triángulo isósceles es *AFE*.



→ <u>Dos casos imposibles</u>
Las variaciones (*B*D* → *D*E* → *D*F* → **FE*) y (*B*D* → *D*E* → *DE** → **FE*) son imposibles, pues se obtienen resultados absurdos. (Naturalmente los dibujos que se adjuntan están mal).

<u>Caso imposible 1 (T2)</u>
(Variación: *B*D* → *D*E* → *D*F* → **FE*)
En efecto, en el punto *F* debe cumplirse que $\delta + \gamma = 180^\circ$, lo que implicaría que la suma de los ángulos de los triángulos *AFE* y *DEF* supere los 360º.



<u>Caso imposible 2 (T8)</u>
(Variación: *B*D* → *D*E* → *DE** → **FE*)
Con esta disposición debe cumplirse:
En el cuadrilátero *BCED*:

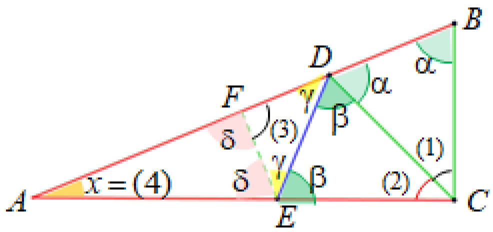
$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ.$$

En *D*: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ$.

En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow$ (3) = 90º.

En *F*, $\delta + (3) = 180^\circ \Rightarrow \delta$ = 90º.

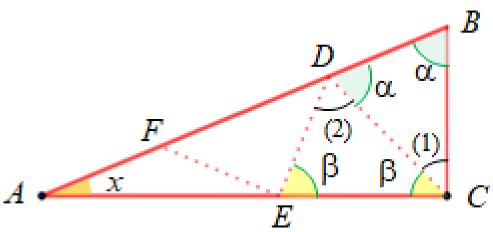
En *AFE*: $x + 2\delta = 180^\circ \Rightarrow x = 0^\circ$ → No hay triángulo.



<u>Nota</u>: Con los ángulos singulares (1) y (2) en el punto *C* pueden realizarse cinco intentos más, pero todos son imposibles. El lector interesado sabrá comprobarlo.

- **Casos 10 a 18**

Con el vértice (2) en *D*, **CE*, se tienen otras 9 opciones, tal y como se indican en la siguiente tabla. Las tres posibles se justificarán; lo mismo haré con alguna de las imposibles. Las demás opciones imposibles se dejan al lector interesado.



Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T10. Solución 3	*B*D*		**CE*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos el vértice singular (1) está en *C* y el (2) en *D*; ambos se mantienen fijos. En los casos imposibles T11, T12, T14 y T15 debe cumplirse que δ + γ =180º, que no puede ser. En T16, β = 90º → absurdo
T11.	*B*D*		**CE*		*D*F*		**FE*	NO	
T12.	*B*D*		**CE*		*D*F*		*AF**	NO	
T13. Imposible 3	*B*D*		**CE*		**EF*		*A*E*	NO	
T14.	*B*D*		**CE*		**EF*		**FE*	NO	
T15.	*B*D*		**CE*		**EF*		*AF**	NO	
T16.	*B*D*		**CE*		*DE**		*A*E*	NO	
T17. Solución 4	*B*D*		**CE*		*DE**		**FE*	Sí	
T18. Solución 5	*B*D*		**CE*		*DE**		*AF**	Sí	

Solución 3 (T10)

Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *D*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F*, para *AFE*.
(Variación: *B*D* → **CE* → *D*F* → *A*E*).

Con esto, se cumple:

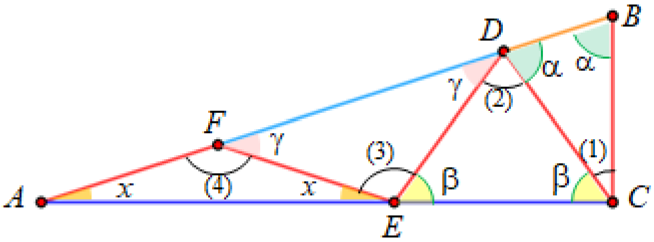
En *ABC*: $x+\alpha=90^o \Rightarrow \alpha=90^o-x$.

En *AFE*: $(4)+2x=180^o$; su exterior en *F*, $\gamma=2x$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^o \Rightarrow (3)=180^o-4x$.

En *E*: $x+(3)+\beta=180^o \Rightarrow$

$x+180^o-4x+\beta=180^o \Rightarrow \beta=3x$.



En *DCE*: $(2)+2\beta=180^o \Rightarrow (2)+6x=180^o \Rightarrow (2)=180^o-6x$.

En *D*: $\gamma+(2)+\alpha=180^o \Rightarrow 2x+180-6x+90^o-x=180^o \Rightarrow 5x=90^o \Rightarrow x=18^o$.

Las medidas de los otros ángulos son:

α = 72º; β = 54º; $\gamma=36^o$; (4) = 144º; (3) = 108º; (2) = 72º; (1) = 36º.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

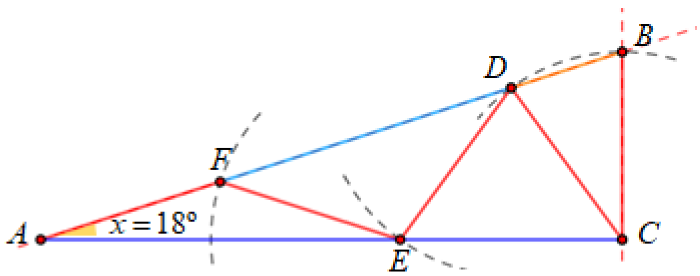
1) Para $A=x=18^o$ se construye el triángulo *ABC*. (Puede seguirse el procedimiento anterior).

2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → *BCD*.

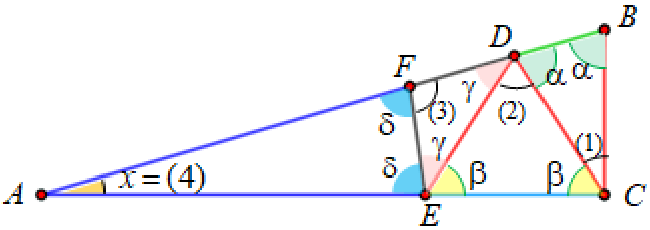
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → *DCE*.

4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así el triángulo *AFE*.

<u>Nota</u>: Como puede observarse, todos los lados de los triángulos isósceles miden lo mismo.



Solución 4 (T17)
Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *D*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en *A* (*x* como ángulo singular) para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*D* → **CE* → *DE** → **FE*).



Con esto, se cumple:
En *ABC*: $x+\alpha=90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ-x$.
En *AFE*: $x+2\delta=180^\circ$; su exterior en *F*,
$(3)=180^\circ-\delta$ y $(3)=x+\delta \to$ (sumando)

$$\Rightarrow 2\cdot(3)=180^\circ+x \Rightarrow (3)=90^\circ+\frac{x}{2} \qquad [1]$$

En *E*, $\delta+\gamma+\beta=180^\circ \Rightarrow \gamma+\beta=180^\circ-\delta \Rightarrow (3)=\gamma+\beta \Rightarrow \beta=(3)-\gamma \qquad [2]$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow$ por [1], $90^\circ+\frac{x}{2}+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \gamma=45^\circ-\frac{x}{4} \Rightarrow$ en [2], $\beta=(3)-45^\circ+\frac{x}{4}$

$\Rightarrow$ por [1], $\beta=\left(90^\circ+\frac{x}{2}\right)-\left(45^\circ-\frac{x}{4}\right)=45^\circ+\frac{3x}{4}$.

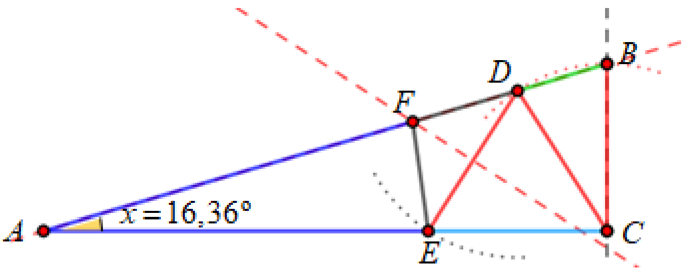
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow (2)=180^\circ-2\beta \Rightarrow (2)=180^\circ-2\left(45^\circ+\frac{3x}{4}\right)=90^\circ-\frac{3x}{2}$.

En *D*:

$$\gamma+(2)+\alpha=180^\circ \Rightarrow 45^\circ-\frac{x}{4}+\left(90^\circ-\frac{3x}{2}\right)+90^\circ-x=180^\circ \Rightarrow 11x=180^\circ \Rightarrow x=\frac{180^\circ}{11}=16,36^\circ .$$

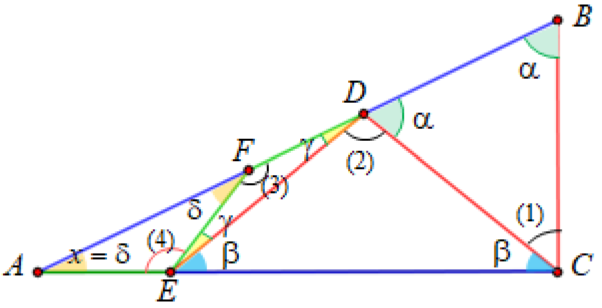
Las medidas de los otros ángulos son:
α = 73,64º; $\delta=81,82^\circ$; β = 57,27º; $\gamma=40,91^\circ$; (3) = 98,18º; (2) = 65,46º; (1) = 32,72º.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x=16,36^\circ$ se construye el triángulo rectángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) El corte de la mediatriz de *DE* con el lado *AB* determina el punto *F*. Se obtiene el triángulo *DEF*.
5) El cuarto triángulo es *AFE*.



<u>Nota</u>: Con GeoGebra, elegidos *A* = (0, 0) y *C* = (8, 0), el punto *B* es el de corte de las rectas $y=(\tan 16,36^\circ)\cdot x$ y x = 8 (no debe confundirse x° con x).

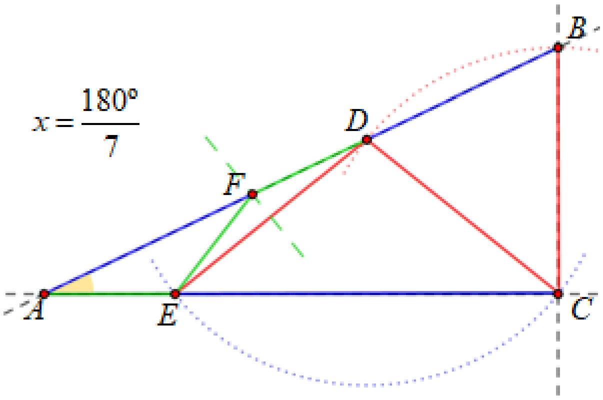
Solución 5 (T18)
Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *D*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en *E* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*D* $\rightarrow$ **CE* $\rightarrow$ *DE** $\rightarrow$ *AF**).



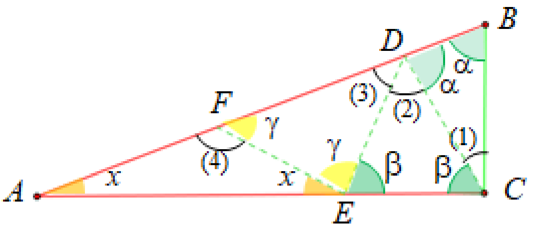
Con esto, se cumple:
En *ABC*: $x+\alpha=90^{\circ} \Rightarrow x=\delta \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-\delta$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{\circ} \rightarrow (1)=2\delta$.
En *C*: $(1)+\beta=90 \Rightarrow \beta=90^{\circ}-2\delta$.
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^{\circ} \Rightarrow (2)=4\delta$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{\circ}$.
En *F*, $(3)+\delta=180^{\circ} \Rightarrow \delta=2\gamma \rightarrow \gamma=\dfrac{\delta}{2}$.
En *D*, $\gamma+(2)+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \dfrac{\delta}{2}+4\delta+90^{\circ}-\delta=180^{\circ} \Rightarrow \delta=\dfrac{180^{\circ}}{7} \rightarrow x\approx 25{,}71^{\circ}$.

Las medidas de los otros ángulos miden:
α = 64,29º; β = 38,57º; $\gamma=12{,}85^{\circ}$; (3) = 154,29º; (2) = 102,86º; (1) = 51,43º; (4) = 128,57º.

$\rightarrow$ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x=\dfrac{180^{\circ}}{7}\approx 25{,}71^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* $\rightarrow$ *BCD*.
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* $\rightarrow$ *DCE*.
4) El corte de la mediatriz de *DE* con el lado *AB* determina el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



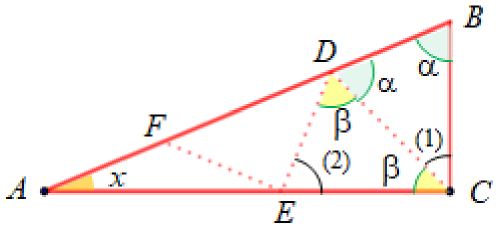
Caso imposible 3 (T13)
(Variación: *B*D* $\rightarrow$ **CE* $\rightarrow$ **EF* $\rightarrow$ *A*E*)
Con esta disposición debe cumplirse:
En *ABC*: $x+\alpha=90^{\circ} \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-x$.
En *AFE*: $(4)+2x=180^{\circ}$. Exterior en *F*, $\gamma=2x$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{\circ} \Rightarrow$
$(3)+4x=180^{\circ} \Rightarrow (3)=180^{\circ}-4x$.
En *E*: $x+\gamma+\beta=180^{\circ} \Rightarrow x+2x+\beta=180^{\circ} \Rightarrow$
$\beta=180^{\circ}-3x$.
En *DEC*: $(2)+2\beta=180^{\circ} \Rightarrow (2)=6x-180^{\circ}$.



En *D*: $(3)+(2)+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow 180^{\circ}-4x+(6x-180^{\circ})+90^{\circ}-x=180^{\circ} \Rightarrow x=90^{\circ} \rightarrow$ Absurdo: no hay triángulo.
Nota: El dibujo que acompaña a esta discusión no es posible: está mal hecho.

- **Casos 19 a 27**

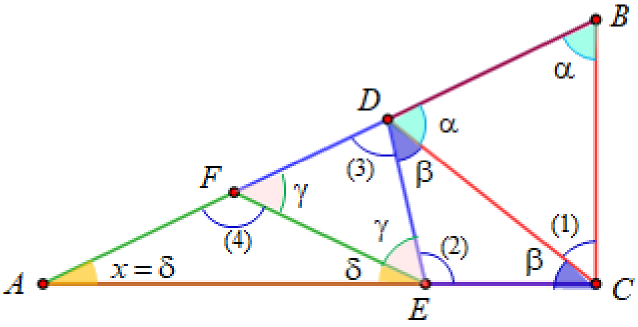
Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen otras 9 opciones, tal y como se indican en la siguiente tabla. Las tres opciones posibles se justificarán; lo mismo haré con alguna de las imposibles. Las demás opciones imposibles se dejan al lector interesado.



Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T19. Imposible 4	*B*D*		*DC**		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos el vértice
T20.	*B*D*		*DC**		*D*F*		**FE*	NO	singular (1) está en *C* y el
T21.	*B*D*		*DC**		*D*F*		*AF**	NO	(2) en *E*, ambos fijos.
T22. Solución 6	*B*D*		*DC**		**EF*		*A*E*	Sí	En los casos imposibles
T23.	*B*D*		*DC**		**EF*		**FE*	NO	T20, T21, T23 y T24 debe
T24.	*B*D*		*DC**		**EF*		*AF**	NO	cumplirse que $\delta+\gamma=180^o$,
T25. Solución 7	*B*D*		*DC**		*DE**		*A*E*	Si	que no puede ser.
T26. Solución 8	*B*D*		*DC**		*DE**		**FE*	Sí	En T27, $\alpha=90^o\to$
T27.	*B*D*		*DC**		*DE**		*AF**	NO	absurdo

Solución 6 (T22)

Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *D*, para el triángulo *DEF*, y en *F* para el triángulo *AFE*. (Variación: *B*D* → *DC** → **EF* → *A*E*).



Con esto, se cumple:

En *ABC*:

$x+\alpha=90^o$; $\delta+\alpha=90^o\to\delta=90^o-\alpha$.

Exterior en *F*: $\gamma=2\delta\to\gamma=180^o-2\alpha$.

En *C*, $(1)+\beta=90^o$; en *BCD*, $(1)+2\alpha=180^o\to\beta=2\alpha-90^o$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^o\to(3)=180^o-2\gamma\to(\text{por }\gamma=180^o-2\alpha)\to(3)=-180^o+4\alpha$.

En *D*, $(3)+\beta+\alpha=180^o\Rightarrow(-180^o+4\alpha)+(2\alpha-90^o)+\alpha=180^o\Rightarrow7\alpha=450^o\Rightarrow\alpha=\dfrac{450^o}{7}$.

Por tanto, $x=\delta=90^o-\dfrac{450^o}{7}=\dfrac{180^o}{7}\approx25{,}714^o$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

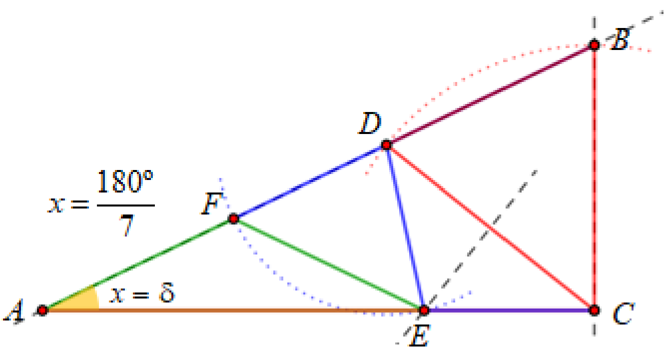
1) Con ángulo *A* = $x=25{,}714^o$ se dibuja el triángulo *ABC*.

2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.

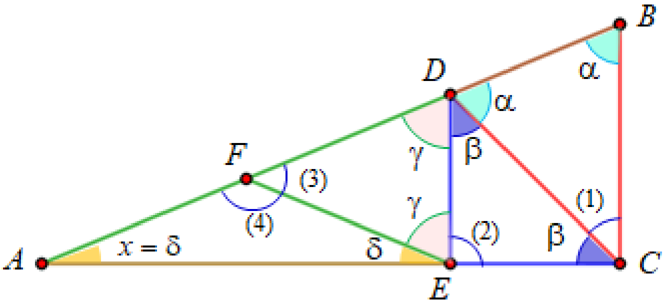
3) El corte de la mediatriz de *DC* con el lado *AC* determina el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.

4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DEF*.

5) El cuarto triángulo es *AFE*.

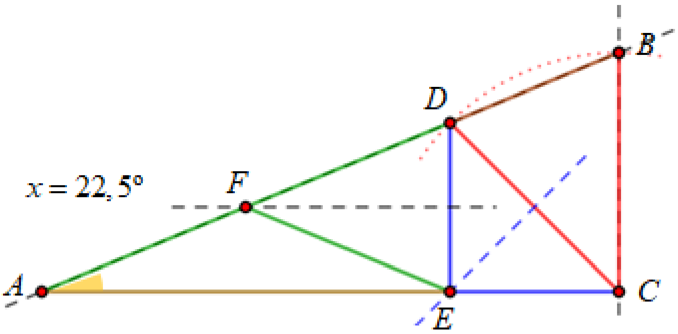


Solución 7 (T25)
Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en el mismo *F* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*D* $\to$ *DC** $\to$ *DE** $\to$ *A*E*).

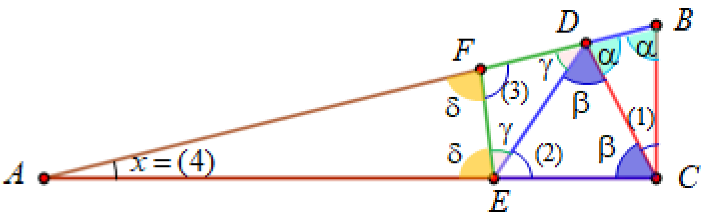


En este caso se cumple:
En *ABC*:
$x+\alpha=90^\circ$; $\delta+\alpha=90^\circ \to \delta=90^\circ-\alpha$.
En *C*, $(1)+\beta=90^\circ$.
En *BCD*, $(1)+2\alpha=180^\circ \to \beta=2\alpha-90^\circ$.
Exterior *F* en *AFE*: $(3)=2\delta \to$
(por $\delta=90^\circ-\alpha$) $\to$ $(3)=180^\circ-2\alpha$.
En *DEF*, $(3)+2\gamma=180^\circ \to (3)=180^\circ-2\gamma \Rightarrow \gamma=\alpha$.
En *D*, $\gamma+\beta+\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha+(2\alpha-90^\circ)+\alpha=180^\circ \Rightarrow 4\alpha=270^\circ \Rightarrow \alpha=67,5^\circ$.
Por tanto, $x=\delta=90^\circ-67,5^\circ=22,5^\circ$.

$\to$ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Se traza el lado *AC* (con una longitud arbitraria) y una perpendicular por *C* a él.
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x=22,5^\circ$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*. El punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
4) El corte de la mediatriz de *DC* con el lado *AC* determina el punto *E*. Se obtiene el triángulo *DCE*.
5) El corte de la mediatriz de *DE* con el lado *AB* determina el punto *F* $\to$ triángulo *DEF*.
6) El cuarto triángulo es *AFE*.



Solución 8 (T26)
Con vértice singular (1) en *C*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en *A* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*D* $\to$ *DC** $\to$ *DE** $\to$ **FE*).



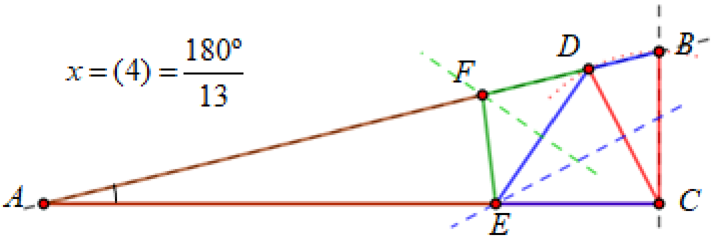
En este caso se cumple:
En *ABC*: $x+\alpha=90^\circ \to x=90^\circ-\alpha$.
En *AFE*, $x+2\delta=180^\circ \to \alpha=2\delta-90^\circ$.
En *F*, $\delta+(3)=180^\circ$.
En *DEF*, $(3)+2\gamma=180^\circ \to \delta=2\gamma$.
Sustituyendo en $\alpha=2\delta-90^\circ \Rightarrow$
$\alpha=4\gamma-90^\circ$.

En *BCD*, $(1)+2\alpha=180^o\to(1)=180^o-2\alpha$ (como $(1)+\beta=90^o$) $\Rightarrow\beta=2\alpha-90^o\to\beta=8\gamma-270^o$.

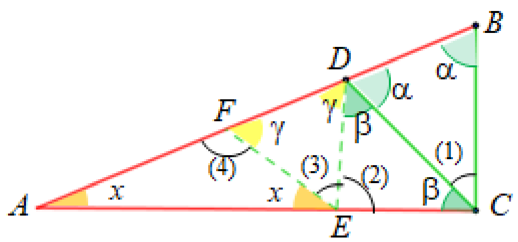
En *D*, $\gamma+\beta+\alpha=180^o\Rightarrow\gamma+(8\gamma-270^o)+(4\gamma-90^o)=180^o\Rightarrow 13\gamma=540^o\Rightarrow\gamma=\dfrac{540^o}{13}$.

Por tanto, $\alpha=4\cdot\dfrac{540^o}{13}-90^o=\dfrac{990^o}{13}\Rightarrow x=90^o-\dfrac{990^o}{13}=\dfrac{180^o}{13}\approx 13{,}85^o$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Se traza el lado *AC* (con una longitud arbitraria) y una perpendicular por *C* a él.
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x=13{,}85^o$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*. El punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
4) El corte de la mediatriz de *DC* con el lado *AC* determina el punto *E*. Se obtiene el triángulo *DCE*.
5) El corte de la mediatriz de *DE* con el lado *AB* determina el punto *F* → Triángulo *DEF*.
6) El cuarto triángulo es *AFE*.



<u>Caso imposible 4 (T19)</u>
(Variación: *B*D* → *DC** → *D*F* → *A*E*)

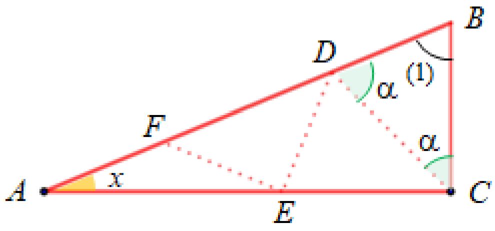


En efecto, con esta disposición debe cumplirse:
En *ABC*: $x+\alpha=90^o\Rightarrow\alpha=90^o-x$.
En *C*: $(1)+\beta=90^o$. En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^o$.
En *AFE*: $(4)+2x=180^o$.
Exterior en *F*, $\gamma=2x$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^o\Rightarrow(3)+4x=180^o\to$
$(3)=180^o-4x$.
En *E*: $x+(3)+(2)=180^o\Rightarrow(2)=3x$.
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^o\Rightarrow 3x+2\beta=180^o\Rightarrow\beta=90^o-\dfrac{3x}{2}$.
En *D*: $\gamma+\beta+\alpha=180^o\Rightarrow 2x+\left(90^o-\dfrac{3x}{2}\right)+90^o-x=180^o\Rightarrow x=0^o$. No hay triángulo.

<u>Nota</u>. El dibujo que acompaña a esta discusión no es posible: está mal hecho.

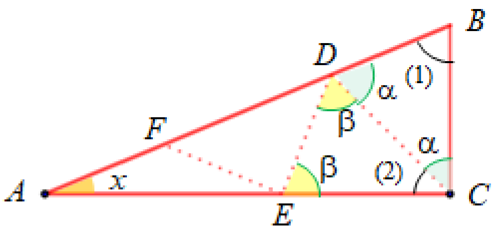
1.2. Particiones de Tipo I (b)

Condiciones:
1) Los puntos *D* y *F* están sobre la hipotenusa y el punto *E* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* (ángulo recto del triángulo dado *ABC*) se sitúan dos vértices.
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *AFE*.
3) El vértice singular (1) está en *B* (posición **CD*).
Así se obtienen otros 27 casos: T28 a T54.



- **Casos 28 a 36**

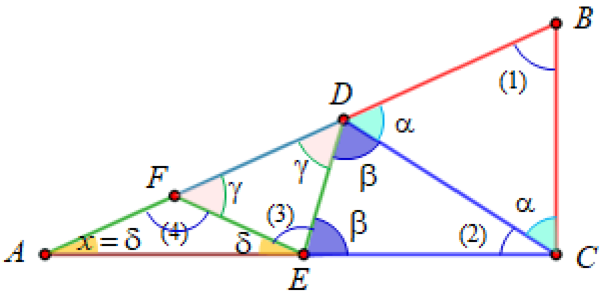
Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
Aparecen 4 soluciones posibles: se demostrarán.
Uno de los casos imposibles se detallará. Los demás se dejan al lector interesado.



Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T28. Solución 9	**CD*		*D*E*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos: se mantienen fijos, (1) en *B* y (2) en *C*.
T29.	**CD*		*D*E*		*D*F*		**FE*	NO	
T30.	**CD*		*D*E*		*D*F*		*AF**	NO	
T31. Solución 10	**CD*		*D*E*		**EF*		*A*E*	Sí	En los casos T29, 30, 32 y 33 debe cumplirse que δ + γ =180º, que no puede ser.
T32.	**CD*		*D*E*		**EF*		**FE*	NO	
T33. Imposible 5	**CD*		*D*E*		**EF*		*AF**	NO	
T34.	**CD*		*D*E*		*DE**		*A*E*	NO	En T34, x = 90º $\rightarrow$ absurdo
T35. Solución 11	**CD*		*D*E*		*DE**		**FE*	Sí	En T35, x = 45º.
T36. Solución 12	**CD*		*D*E*		*DE**		*AF**	Sí	En T36, x = 54º.

Solución 9 (T28)

Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *E*, para el triángulo *DEF*, y en el punto *F* para el triángulo *AFE*. (Variación: **CD* $\rightarrow$ *D*E* $\rightarrow$ *D*F* $\rightarrow$ *A*E*).



En este caso se cumple:
En *ABC*: $(1)+\delta=90^{\circ}$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \delta=2\alpha-90^{\circ}$.
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta \rightarrow \gamma=4\alpha-180^{\circ}$.
En *DCE*, $(2)+2\beta=180^{\circ}$.
En *C*:

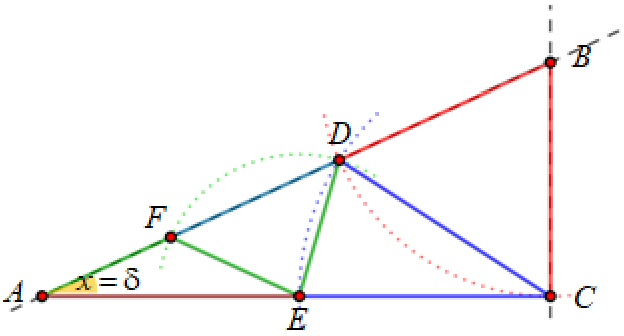
$$(2)+\alpha=90^{\circ} \rightarrow 2\beta-\alpha=90^{\circ} \rightarrow \beta=45^{\circ}+\frac{\alpha}{2}.$$

En *D*: $\gamma+\beta+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow (4\alpha-180^{\circ})+\left(45^{\circ}+\frac{\alpha}{2}\right)+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \alpha=\frac{630^{\circ}}{11}$.

Por tanto, $x=\delta=2\alpha-90^{\circ}=\frac{270^{\circ}}{11}\approx 24,55^{\circ}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para el ángulo $A = x = 24,55^o$ se dibuja el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 10 (T31)

Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *D* para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue. (Variación: **CD* → *D*E* → *F*E* → *A*E*).

Así las cosas, se cumple:

En *ABC*: $x + (1) = 90^o \Rightarrow x = 90^o - (1)$.

En *BCD*: $(1) + 2\alpha = 180^o \Rightarrow \alpha = 45^o + \dfrac{x}{2}$.

Exterior en *F*: $\gamma = 2x$.

En *DEF*,

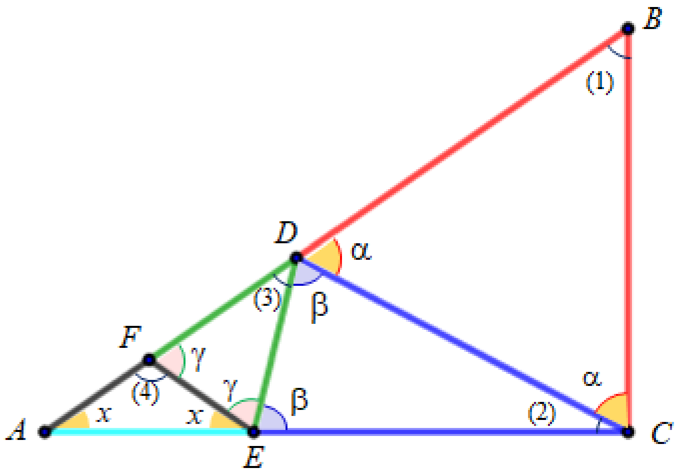
$(3) + 2\gamma = 180^o \rightarrow (3) = 180^o - 4x$.

En *E*: $x + \gamma + \beta = 180^o \rightarrow \beta = 180^o - 3x$.

En *D*: $(3) + \beta + \alpha = 180^o \rightarrow$

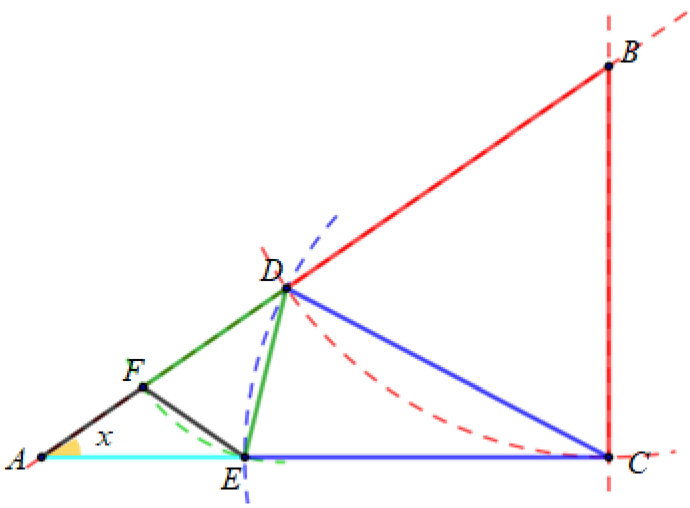
$$180^o - 4x + 180^o - 3x + 45^o + \frac{x}{2} = 180^o \rightarrow$$

$$\frac{13}{2}x = 225^o \Rightarrow x = \frac{450^o}{13} \approx 34,62^o .$$

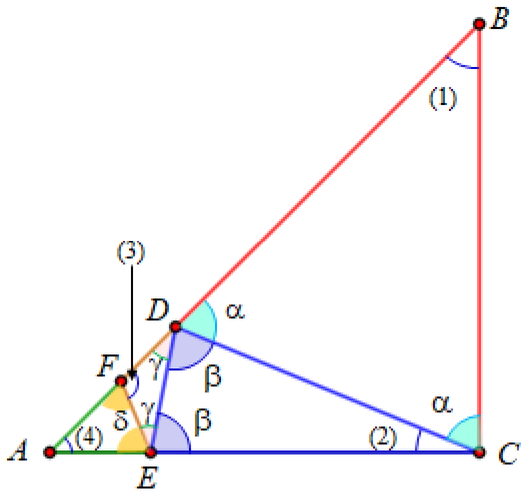


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para el ángulo $A = x = 34,62^o$ se dibuja el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 11 (T35)
Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en *A* para *AFE*.
(Variación: **CD* → *D*E* → *DE** → **FE*).



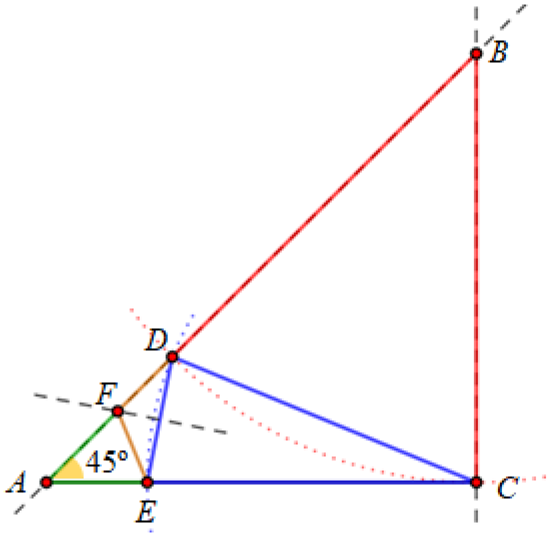
En este caso se cumple:
En *ABC*: $(1)+(4)=90^{o}$; $x=(4)$.
En *AFE*: $(4)+2\delta=180^{o} \Rightarrow (1)=2\delta-90^{o}$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{o} \Rightarrow \delta=135^{o}-\alpha$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{o}$.
En *F*: $(3)+\delta=180^{o} \rightarrow \delta=2\gamma \rightarrow \gamma=\delta/2$.
En *DCE*, $(2)+2\beta=180^{o}$.
En *C*: $(2)+\alpha=90^{o} \rightarrow 2\beta-\alpha=90^{o} \rightarrow \beta=45^{o}+\dfrac{\alpha}{2}$.
En *E*: $\delta+\gamma+\beta=180^{o} \Rightarrow$

$$135^{o}-\alpha+\left(67,5^{o}-\frac{\alpha}{2}\right)+45^{o}+\frac{\alpha}{2}=180^{o} \Rightarrow$$

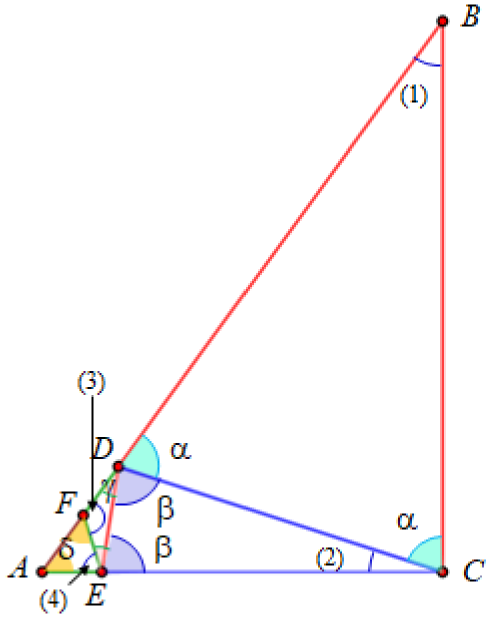
$\alpha=67,5^{o} \rightarrow (1) = 45^{o}$.
Por tanto, $x=(4) = 45^{o}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición puede hacerse como sigue:

1) Para $A=x=45^{o}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 12 (T36)
Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulo singular (3) en el punto *E*, para el triángulo *DEF*, y en el punto *F* para el triángulo *AFE*.
(Variación: $*CD \to D*E \to DE* \to AF*$).

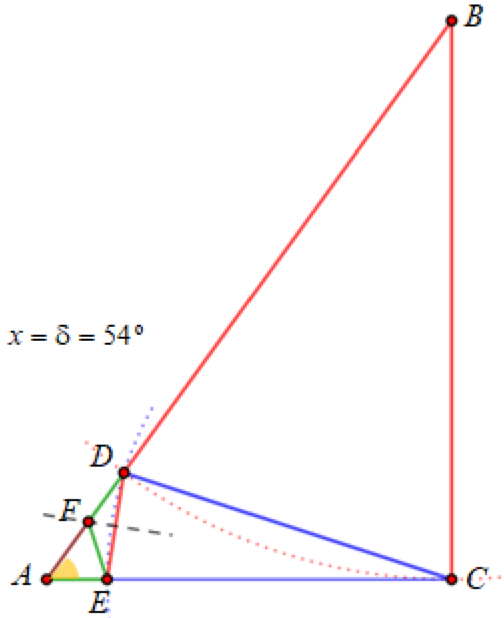


En este caso se cumple:
En *ABC*: $(1)+\delta = 90^{o}$; $x=\delta$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha = 180^{o} \Rightarrow \delta = 2\alpha - 90^{o}$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma = 180^{o}$.
En *F*: $(3)+\delta = 180^{o} \to \delta = 2\gamma \to \gamma = \alpha - 45^{o}$.
En *DCE*, $(2)+2\beta = 180^{o}$.
En *C*: $(2)+\alpha = 90^{o} \to 2\beta - \alpha = 90^{o} \to \beta = 45^{o} + \dfrac{\alpha}{2}$.
En *D*: $\gamma + \beta + \alpha = 180^{o} \Rightarrow \alpha - 45^{o} + \left(45^{o} + \dfrac{\alpha}{2}\right) + \alpha = 180^{o}$

$\Rightarrow \alpha = 72^{o} \to (1) = 36^{o}$.
Por tanto, $x = \delta = 54^{o}$.

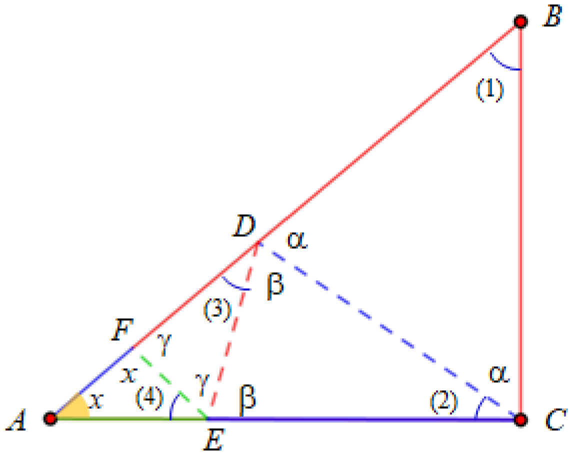
$\to$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A = x = 54^{o}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



<u>Caso imposible 5 (T33)</u>
(Variación: $*CD \to D*E \to F*E \to AF*$).

La partición con vértices singulares en los puntos *B*, *C*, *D* y *E*, que se hace en el dibujo adjunto no es posible. (Naturalmente, el dibujo está forzado: mal hecho).

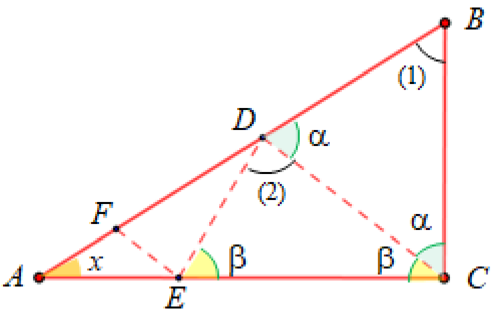


En efecto, en este caso se cumple:
En *F*: $x+\gamma = 180^{o}$, que implica que la suma de los ángulos (3) y (4) vale 0º.
Observa que: si (en *AFE*) $(4)+2x = 180^{o}$ y (en *DEF*) $(3)+2\gamma = 180^{o} \Rightarrow$
$(3)+(4)+2x+2\gamma = 360^{o} \to (3)+(4) = 0^{o}$.

- **Casos 37 a 45**

Con el vértice (2) en *D*, **CE*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.

Hay dos soluciones posibles: se demostrarán.
Uno de los casos imposibles se detallará. Los demás se proponen al lector interesado.

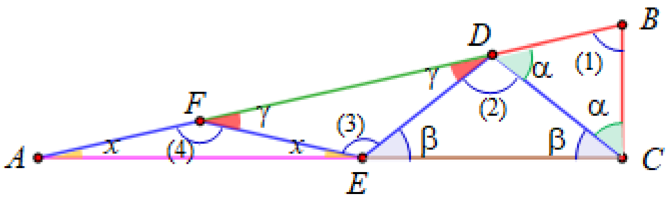


Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T37. Solución 13	**CD*		**CE*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos son fijos,
T38.	**CD*		**CE*		*D*F*		**FE*	NO	(1) en *B* y (2) en *D*.
T39.	**CD*		**CE*		*D*F*		*AF**	NO	En T38, T39, T41 y T42
T40. Imposible 6	**CD*		**CE*		**EF*		*A*E*	NO	debe cumplirse que δ + γ
T41.	**CD*		**CE*		**EF*		**FE*	NO	=180º, que no puede ser.
T42.	**CD*		**CE*		**EF*		*AF**	NO	En T40, x = 54º →
T43.	**CD*		**CE*		*DE**		*A*E*	NO	$\gamma = 108^{o}$: absurdo.
T44.	**CD*		**CE*		*DE**		**FE*	NO	En T43 y T44, β = 45º y α
T45. Solución 14	**CD*		**CE*		*DE**		*AF**	Sí	= 45º → (1) = 90º: absurdo

Solución 13 (T37)

Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *D*, y continuando con ángulos singulares en el punto *E* para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue. (Variación: **CD* → **CE* → *D*F* → *A*E*).

Con esta disposición debe cumplirse:
En *ABC*: $x+(1)=90^{o} \;\Rightarrow\; x=90^{o}-(1)$.
En *AFD*: $(4)+2x=180^{o}$.
En *F*: $(4)+\gamma=180^{o} \;\Rightarrow\; \gamma=2x$.
En *DEF*:
$(3)+2\gamma=180^{o} \;\Rightarrow\; (3)=180^{o}-4x$.



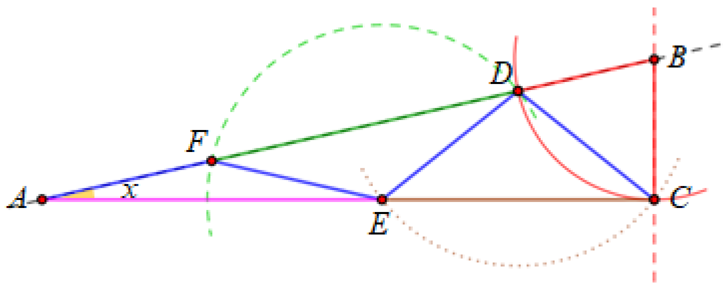
En *E*: $x+(3)+\beta=180^{o} \;\Rightarrow\; x+\left(180^{o}-4x\right)+\beta=180^{o} \;\Rightarrow\; \beta=3x$.

En *DCE*: $(2)+2\beta=180^{o} \;\Rightarrow\; (2)=180^{o}-6x$.

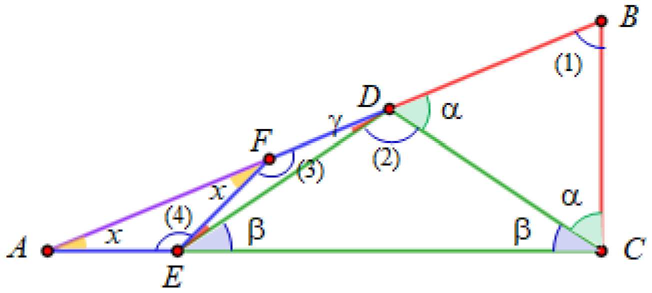
En *C*: $\alpha+\beta=90^{o} \;\Rightarrow\; \alpha=90^{o}-\beta \;\Rightarrow\; \alpha=90^{o}-3x$.

En *D*: $\gamma+(2)+\alpha=180^{o} \;\Rightarrow\; 2x+\left(180^{o}-6x\right)+\left(90^{o}-3x\right)=180^{o} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{90^{o}}{7} \;\Rightarrow\; x\approx 16,86^{o}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para $A=x=16,86^{o}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 14 (T45)
Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *D*, y continuando con ángulos singulares en el punto *F* para *DEF*, y en *E* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.
(Variación: **CD* → **CE* → *DE** → *AF**).



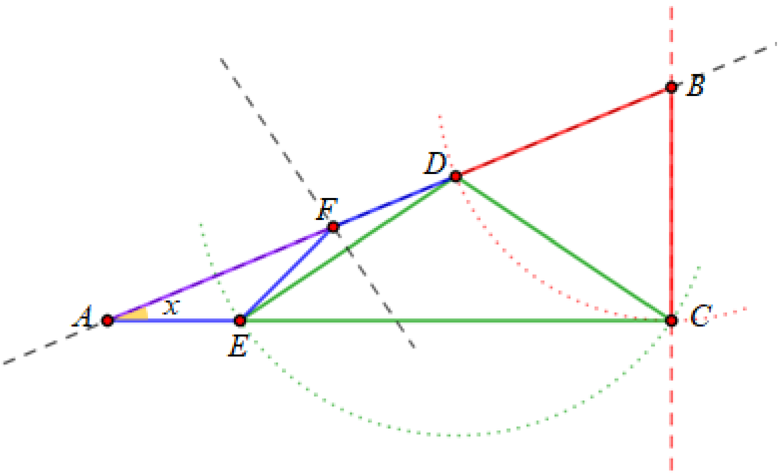
En este caso, se cumple:
En *ABC*: $x+(1)=90^{\circ} \Rightarrow x=90^{\circ}-(1)$.
En *AFD*: $(4)+2x=180^{\circ}$.
En *F*: $(3)+x=180^{\circ}$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{\circ} \Rightarrow x=2\gamma$.
En *E*: $(4)+\gamma+\beta=180^{\circ}$ y $\gamma+\beta=2x \Rightarrow$
$\gamma+\beta=4\gamma \Rightarrow \beta=3\gamma$
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^{\circ} \Rightarrow (2)=180^{\circ}-6\gamma$.
En *C*: $\alpha+\beta=90^{\circ} \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-\beta \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-3\gamma$.

En *D*: $\gamma+(2)+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \gamma+\left(180^{\circ}-6\gamma\right)+\left(90^{\circ}-3\gamma\right)=180^{\circ} \Rightarrow 8\gamma=90^{\circ} \Rightarrow \gamma=\dfrac{45^{\circ}}{4} \Rightarrow x=22{,}5^{\circ}$.

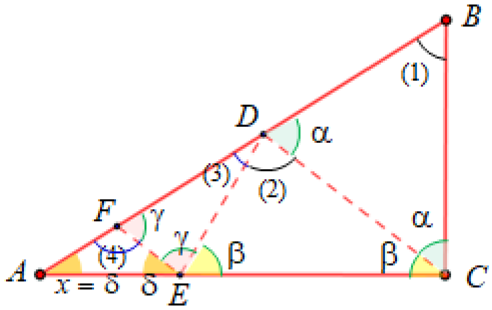
Los otros ángulos valen:
α = 56,25º; β = 37,75º; (1) = 67,5º; (2) = 112,5º; (3) = 157,5º; (4) = 135º.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=x=22{,}5^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtienen así el triángulo *DCE*.
4) Se traza la mediatriz de *DE*, que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtiene así el triángulo *DEF*.
5) El cuarto triángulo es *AFE*.



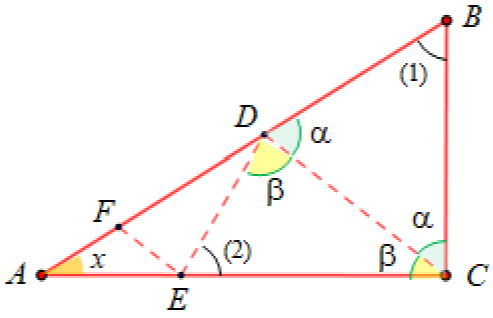
<u>Caso imposible 6 (T40)</u>
(Variación: **CD* → *D*E* → *F*E* → *A*E*).



En este caso, se cumple:
En *ABC*: $x=\delta$; $\delta+(1)=90^{\circ}$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{\circ} \rightarrow \delta=2\alpha-90^{\circ}$.
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta \rightarrow \gamma=4\alpha-180^{\circ}$.
En *C*: $\beta=90^{\circ}-\alpha$.
En *E*: $\delta+\gamma+\beta=180^{\circ} \Rightarrow$
$2\alpha-90^{\circ}+4\alpha-180^{\circ}+90^{\circ}-\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \alpha = 72^{\circ}$.
Luego,
(1) = 36º; $x=\delta=54^{\circ}$; (4) =72º; $\gamma=108^{\circ}$ → absurdo.

- **Casos 46 a 54**

Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
Solo hay una solución, como se verá después: T49.
Uno de los casos imposibles se comprobará (T46). Los demás se proponen al lector interesado.

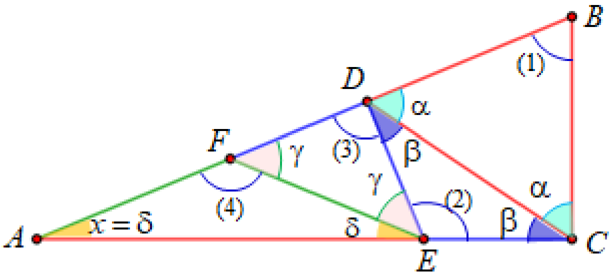


<u>Obsérvese</u> que en todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El lado *DE*, común a los triángulos *DCE* y *DEF*, debe ser perpendicular a la hipotenusa, pues α + β = 90º.
2. Por tanto, el vértice singular (3) solo puede situarse en *D*.

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T46. Imposible 7	**CD*		*DC**		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos: son fijos,
T47.	**CD*		*DC**		*D*F*		**FE*	NO	(1) en *B* y (2) en *E*.
T48.	**CD*		*DC**		*D*F*		*AF**	NO	En T50 y T51 debe
T49. Solución 15	**CD*		*DC**		**EF*		*A*E*	Sí	cumplirse que δ + γ =180º,
T50.	**CD*		*DC**		**EF*		**FE*	NO	que no puede ser.
T51.	**CD*		*DC**		**EF*		*AF**	NO	En T46, T47, T48, T52,
T52.	**CD*		*DC**		*DE**		*A*E*	NO	T53 y T54 se cumple que γ
T53.	**CD*		*DC**		*DE**		**FE*	NO	= 90º: absurdo;
T54.	**CD*		*DC**		*DE**		*AF**	NO	

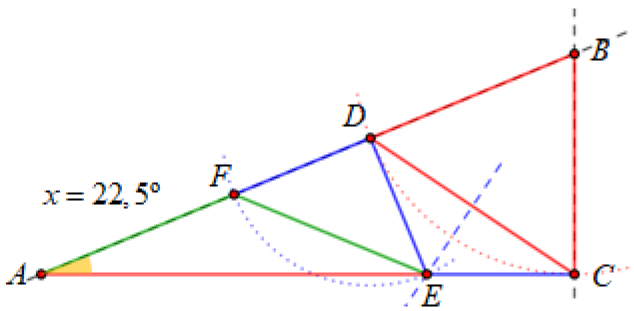
Solución 15 (T49)

Con vértice singular (1) en *B*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulos singulares en el punto *D* para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.
(Variación: **CD* → *DC** → **EF* → *A*E*).

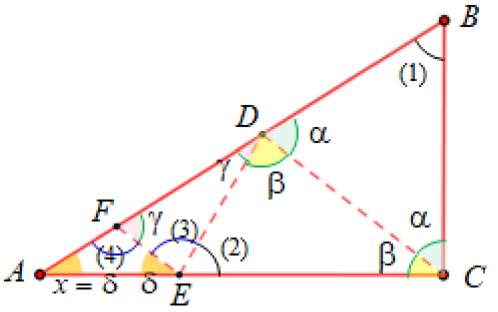


En este caso, se cumple:
En *C*: $\alpha+\beta=90^{\circ}$.
En *D*: $(3)+\alpha+\beta=180^{\circ} \Rightarrow (3) = 90^{\circ}$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{\circ} \Rightarrow \gamma=45^{\circ} \rightarrow$
$\rightarrow (4) = 135 \Rightarrow x=\delta=22{,}5^{\circ}$

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para $A=x=22{,}5^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Se traza la mediatriz de *DC*, que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtiene así el triángulo *DEF*.
5) El cuarto triángulo es *AFE*.



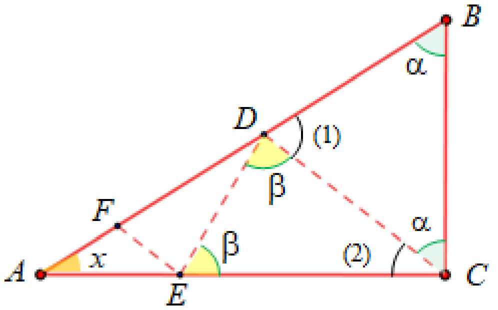
<u>Caso imposible 7 (T46)</u>
(Variación: $*CD \to DC* \to D \to A*E$).).



En este caso, como $\alpha+\beta=90^{o}$ y (en *D*) $\gamma+\alpha+\beta=180^{o}$
$\Rightarrow \gamma=90^{o} \to$ absurdo.
(Naturalmente, el dibujo está mal hecho).

1.3. Particiones de Tipo I (c)

Condiciones:
1) Los puntos *D* y *F* están sobre la hipotenusa; el punto *E* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* (ángulo recto del triángulo dado *ABC*) se sitúan dos vértices.
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *AFE*.
3) El vértice singular (1) está en *D* (posición *BC**).
Así se obtienen 27 casos: T55 a T81.



- **Casos 55 a 63**

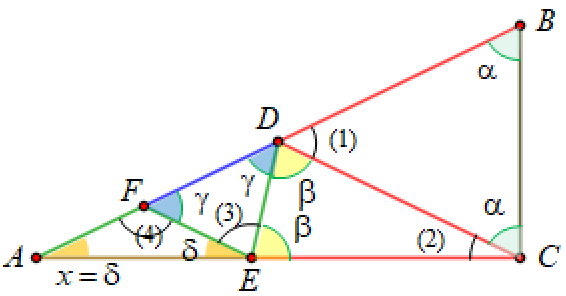
Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.

<u>Consideraciones para estos 9 casos</u>
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El punto *D* pertenece a la mediatriz del lado *AB*. Esta mediatriz corta a la hipotenusa en su punto medio (Tales).
2. Por tanto, el triángulo *ADC* es isósceles; luego *AD* = *DC* y *x* = (2).

<table>
<tr><th>Triángulos</th><th>BCD</th><th></th><th>DCE</th><th></th><th>DEF</th><th></th><th>AFE</th><th colspan="2">D y F en la hipotenusa; E en AC</th></tr>
<tr><td>T55. Solución 16</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>A*E</td><td>Sí</td><td rowspan="9">En estos 9 casos: son fijos, (1) en D y (2) en C.
En T56, 57, 59 y 60 debe cumplirse que δ + γ =180º, que no puede ser.
En T61, x = 0º: no hay triángulo.</td></tr>
<tr><td>T56.</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>*FE</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T57.</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>D*F</td><td></td><td>AF*</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T58. Solución 17</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>A*E</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>T59.</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>*FE</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T60.</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>*EF</td><td></td><td>AF*</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T61. Imposible 8</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>A*E</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>T62. Solución 18</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>*FE</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>T63. Solución 19</td><td>BC*</td><td></td><td>D*E</td><td></td><td>DE*</td><td></td><td>AF*</td><td>Sí</td></tr>
</table>

Solución 16 (T55)
Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulos singulares en el punto *E* para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.
(Variación: $BC* \to D*E \to D*F \to A*E$).

En este caso, se cumple:
En *ABC*: $x=\delta$; $\alpha+\delta=90^{o} \to \alpha=90^{o}-\delta$.
En *C*: $\alpha+(2)=90^{o} \to (2)=\delta$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{o} \Rightarrow (1)=180^{o}-2\alpha \to$
$(1)=180^{o}-2(90^{o}-\delta)=2\delta$.



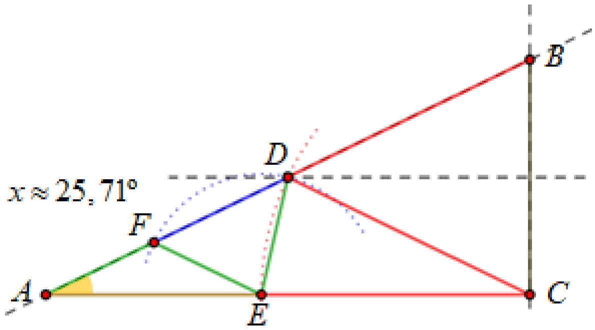
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\dfrac{\delta}{2}$.

Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$.

En *D*: $\gamma+\beta+(1)=180^\circ \Rightarrow 2\delta+90^\circ-\dfrac{\delta}{2}+2\delta=180^\circ \rightarrow x=\delta=\dfrac{180^\circ}{7}\approx 25,71^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=x=25,71^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz de *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtienen así el triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 17 (T58)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulos singulares en el punto *D* para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue. (Variación: *BC** → *D*E* → *DE** → *A*E*).

Así las cosas, se cumple:

En *ABC*: $x=\delta$; $\alpha+\delta=90^\circ \rightarrow \alpha=90^\circ-\delta$.

En *C*: $\alpha+(2)=90^\circ \rightarrow (2)=\delta$.

En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^\circ \Rightarrow (1)=180^\circ-2\alpha \rightarrow$

$(1)=180^\circ-2\left(90^\circ-\delta\right)=2\delta$.

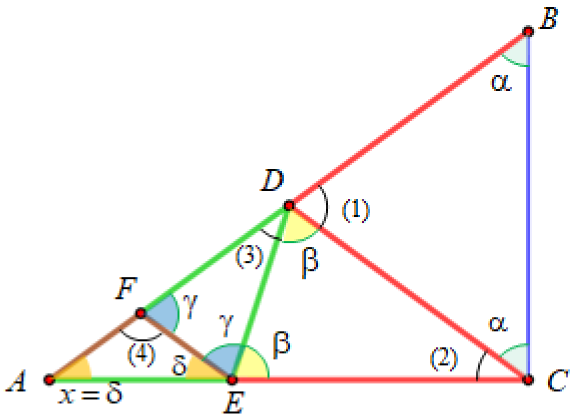
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow (3)=180^\circ-4\delta$.

En *DCE*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\dfrac{\delta}{2}$.

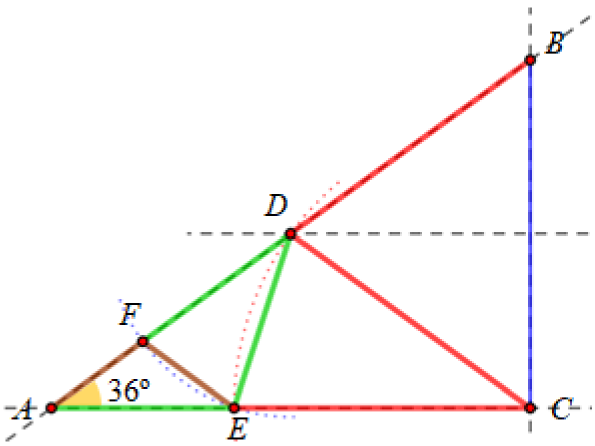
En *D*: $(3)+\beta+(1)=180^\circ \Rightarrow$

$180^\circ-4\delta+90^\circ-\dfrac{\delta}{2}+2\delta=180^\circ \rightarrow x=\delta=\dfrac{180^\circ}{5}=36^\circ$.



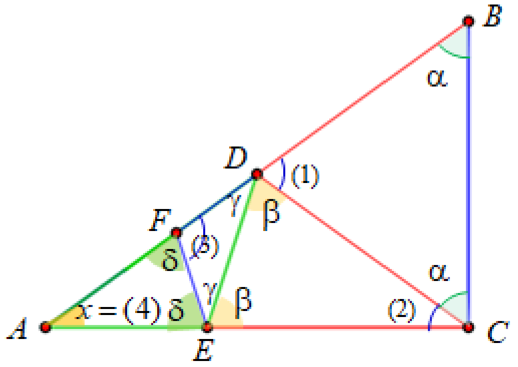
→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=x=36^\circ$ se construye *ABC*.
2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *DCE*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → *DCE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 18 (T62)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *A* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue. (Variación: *BC** $\to$ *D*E* $\to$ *DE** $\to$ **FE*).



Así las cosas, se cumple:

En *ABC*: $x+\alpha=90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ-x$.

En *C*: $(2)+\alpha=90^\circ \Rightarrow (2)=x$.

En *D* (exterior de *ADC*): $(1)=x+(2)=2x$.

En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^\circ \Rightarrow (1)=180^\circ-2\alpha$.

En *DCE*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow x+2\beta=180^\circ \Rightarrow$

$$\beta=90^\circ-\frac{x}{2}.$$

En *AFE*: $x+2\delta=180^\circ \Rightarrow \delta=90^\circ-\dfrac{x}{2}$.

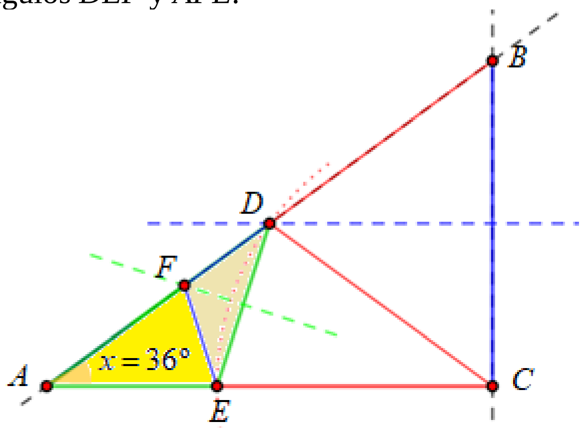
En *F*: $\delta+(3)=180^\circ$.

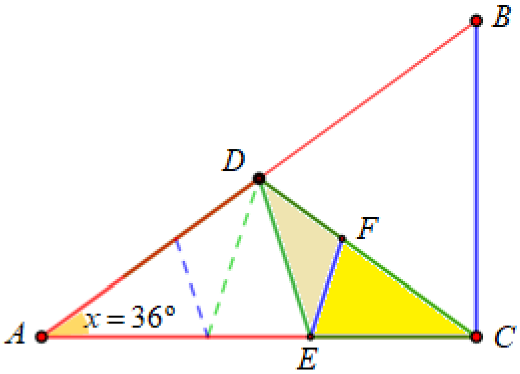
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \delta=2\gamma \Rightarrow \gamma=\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \gamma=45^\circ-\dfrac{x}{4}$.

En *D*: $\gamma+\beta+(1)=180^\circ \Rightarrow 45^\circ-\dfrac{x}{4}+\left(90^\circ-\dfrac{x}{2}\right)+2x=180^\circ \Rightarrow x=36^\circ$.

$\to$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=x=36^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) Se traza la mediatriz del lado *DE*, que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.

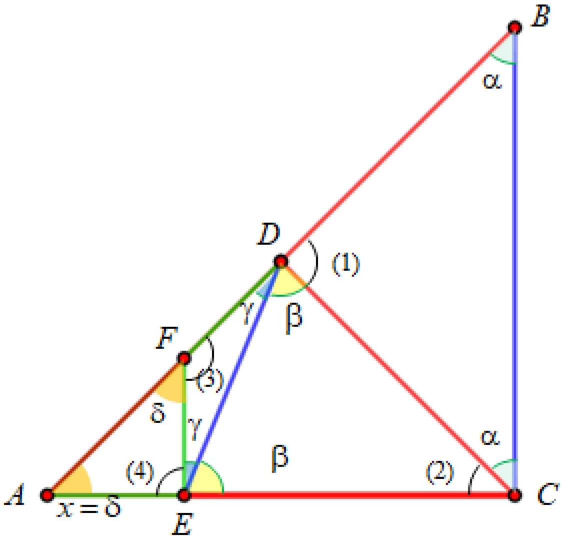




<u>Nota</u>: Se obtiene otra partición considerando la descomposición simétrica del triángulo *ADC*.
El mismo criterio de simetría puede aplicarse en todos los casos con solución de este grupo (desde T55 a T81), aunque el dibujo solo lo hago en este caso T62.
(Debe observarse que el punto *F* cae dentro del triángulo; como estos casos no se están considerando, esta partición se indica de manera complementaria).

Solución 19 (T63)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *C*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *A* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.
(Variación: *BC** → *D*E* → *DE** → *AF**).



En este caso tiene que cumplirse:

En *ABC*: $x+\alpha=90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ-x$.

En *C*: $(2)+\alpha=90^\circ \Rightarrow (2)=x=\delta$.

En *D* (exterior de *ADC*): $(1)=x+(2)=2\delta$.

En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^\circ \Rightarrow (1)=180^\circ-2\alpha$.

En *DCE*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow \delta+2\beta=180^\circ \Rightarrow$

$$\beta=90^\circ-\frac{\delta}{2}.$$

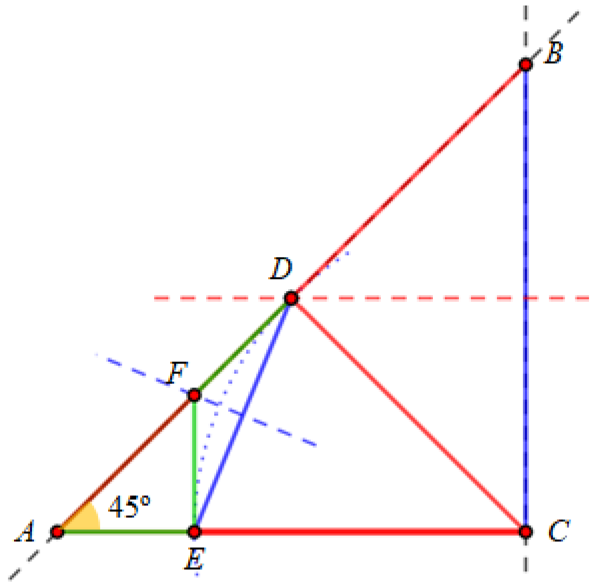
En *F*: $\delta+(3)=180^\circ$.

En *FDE*: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \delta=2\gamma \Rightarrow \gamma=\frac{\delta}{2}$.

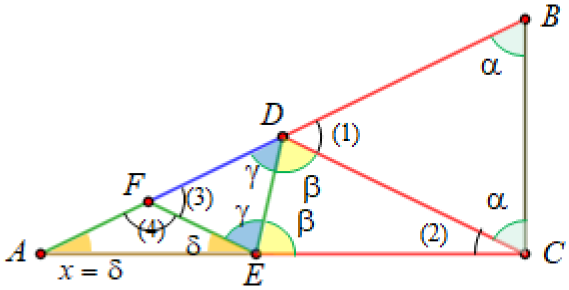
En *D*: $\gamma+\beta+(1)=180^\circ \Rightarrow \frac{\delta}{2}+\left(90^\circ-\frac{\delta}{2}\right)+2\delta=180^\circ \Rightarrow x=\delta=45^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=x=45^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) Se traza la mediatriz del lado *DE*, que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



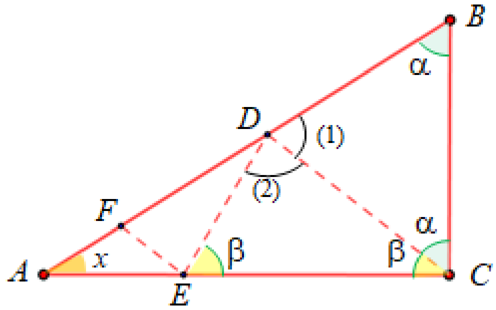
Caso imposible 8 (T61)
Variación ($BC^* \to D^*E \to DE^* \to A^*E$).



En este caso, se cumple:
En ABC: $x=\delta$; $\alpha+\delta=90^\circ \to \alpha=90^\circ-\delta$.
En C: $\alpha+(2)=90^\circ \to (2)=\delta$.
En DCE: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\dfrac{\delta}{2}$.
Exterior en F: $(3)=2\delta$.
En DEF: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \gamma=90^\circ-\delta$.
En BCD: $(1)=180^\circ-2\alpha \to (1)=180^\circ-2(90^\circ-\delta)=2\delta$.
En D: $\gamma+\beta+(1)=180^\circ \Rightarrow 90^\circ-\delta+90^\circ-\dfrac{\delta}{2}+2\delta=180^\circ \to x=\delta=0^\circ$. No hay triángulo.
(También podría verse que, en ADE, $\delta+\gamma=90^\circ$, lo que implica $\beta = 90^\circ \to$ absurdo).

- **Casos 64 a 72**

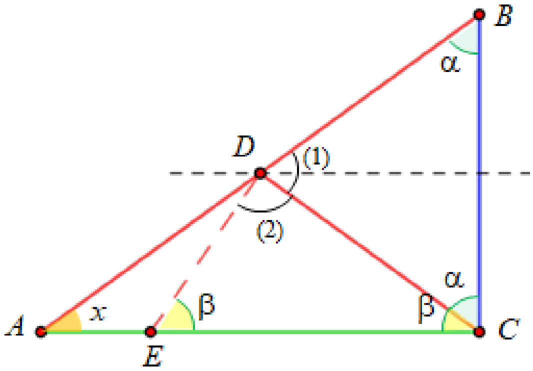
Con el vértice (2) en D, $^*CE$, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
No hay ninguna solución posible.



Consideraciones para estos casos
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El punto D pertenece a la mediatriz del lado AB. Esta mediatriz corta a la hipotenusa en su punto medio (Tales). Por tanto, el triángulo ADC es isósceles; luego, $x = \beta$.
2. El vértice singular (2), correspondiente al triángulo DCE no puede estar en D, pues exigiría que $DE = DC$; pero esto implica que E debe coincidir con A.

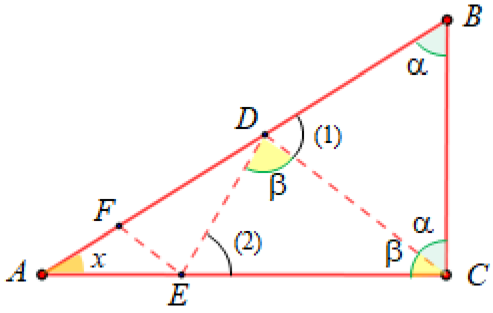
Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T64.	*BC**		**CE*		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos: son fijos, (1) en *D* y (2) también en *D*. Ninguno de estos casos tiene solución
T65.	*BC**		**CE*		*D*F*		**FE*	NO	
T66.	*BC**		**CE*		*D*F*		*AF**	NO	
T67.	*BC**		**CE*		**EF*		*A*E*	NO	
T68.	*BC**		**CE*		**EF*		**FE*	NO	
T69.	*BC**		**CE*		**EF*		*AF**	NO	
T70.	*BC**		**CE*		*DE**		*A*E*	NO	
T71.	*BC**		**CE*		*DE**		**FE*	NO	
T72.	*BC**		**CE*		*DE**		*AF**	NO	

$\to$ No hay ningún triángulo rectángulo que se pueda descomponer de esta forma.
En efecto, si el ángulo (1) está en D (que es el punto medio del lado AB), entonces $\beta = x$, ya que los segmentos (lados) DB, DC y DA tienen la misma longitud; pero esto implica que en el triángulo ADE los lados DE y DA deben coincidir, luego solo se forman dos triángulos.



- **Casos 73 a 81**

Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
Hay 4 soluciones posibles: se demostrarán.
Los casos imposibles pueden ser comprobados fácilmente.



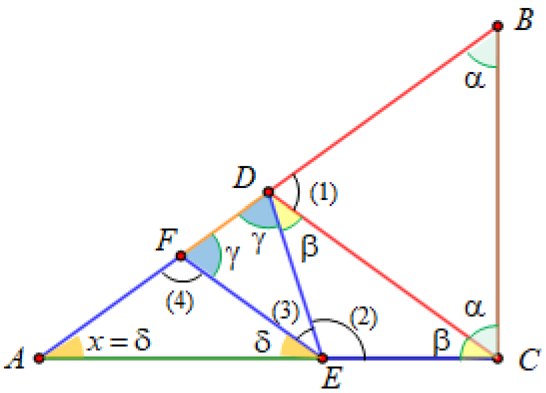
<u>Consideraciones para estos 9 casos</u>.
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El punto *D* pertenece a la mediatriz del lado *AB*. Esta mediatriz corta a la hipotenusa en su punto medio (Tales).
2. Por tanto, el triángulo *ADC* es isósceles; luego $x = \beta$. Su exterior en *D*, (1) = 2β.

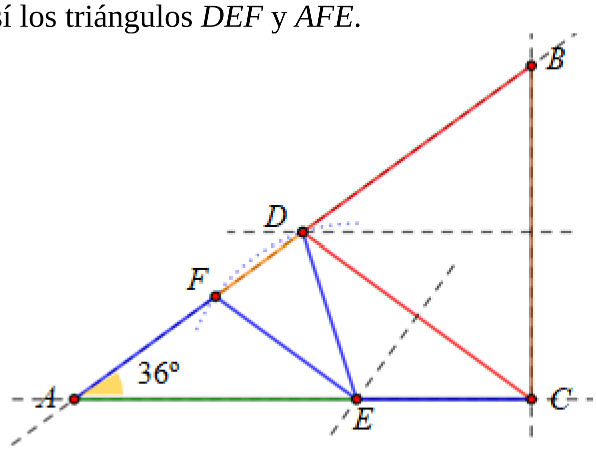
Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T73. Solución 20	*BC**		*DC**		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos: son fijos, (1) en *D* y (2) en *E*. En T74, 75, 77 y 78 debe cumplirse que δ + γ =180º, que no puede ser. En T76, *x* = 0º: no hay triángulo.
T74.	*BC**		*DC**		*D*F*		**FE*	NO	
T75.	*BC**		*DC**		*D*F*		*AF**	NO	
T76.	*BC**		*DC**		**EF*		*A*E*	NO	
T77.	*BC**		*DC**		**EF*		**FE*	NO	
T78.	*BC**		*DC**		**EF*		*AF**	NO	
T79. Solución 21	*BC**		*DC**		*DE**		*A*E*	Sí	
T80. Solución 22	*BC**		*DC**		*DE**		**FE*	Sí	
T81. Solución 23	*BC**		*DC**		*DE**		*AF**	Sí	

Solución 20 (T73)
Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.
(Variación: *BC** → *DC** → *D*F* → *A*E*).

En este caso tiene que cumplirse:
En *ADC*: $x = \delta = \beta$.
Exterior de *ADC* en *D*: $(1) = 2\delta$.
En *C*: $\alpha + \beta = 90^\circ$.
Exterior *F*: $\gamma = 2\delta$.
En *D*: $\gamma + \beta + (1) = 180^\circ \Rightarrow 2\delta + \delta + 2\delta = 180^\circ$
$\Rightarrow x = \delta = 36^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para $x = 36^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *BCD*.
3) Se traza la mediatriz del lado *DC*, que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.





Solución 21 (T79)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en el mismo *F* para *AFE*, como se indica en la figura que sigue.

(Variación: $BC^* \to DC^* \to DE^* \to A^*E$).

En este caso tiene que cumplirse:

En *ADC*: $x = \delta = \beta$.

En *DCE*: $(2) = 180^\circ - 2\beta \;\to\; (2) = 180^\circ - 2\delta$.

Exterior en *F*: $(3) = 2\delta$.

En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^\circ \;\to\; \gamma = 90^\circ - \delta$.

En *E*: $\delta + \gamma + (2) = 180^\circ \;\Rightarrow$

$$\delta + 90^\circ - \delta + 180^\circ - 2\delta = 180^\circ \;\Rightarrow\; x = \delta = 45^\circ.$$

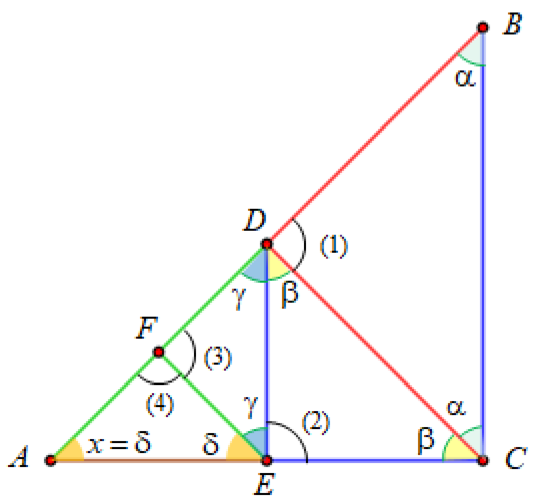
→ <u>Construcción:</u>

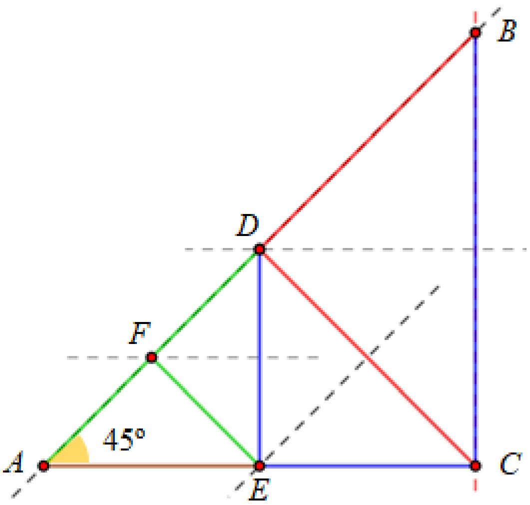
1) Para el ángulo $x = 45^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.

2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *BCD*.

3) Se traza la mediatriz del lado *DC*, que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *DCE*.

4) Se traza la mediatriz del lado *DE*, que corta al lado *AB* en *F* → triángulos *DEF* y *AFE*.





Solución 22 (T80)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *A* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: $BC^* \to DC^* \to DE^* \to {}^*FE$).

En este caso tiene que cumplirse:

En *ADC*: $x = \beta$.

En *ADC*: $x + \gamma + \beta + \beta = 180^\circ \;\to\; \gamma = 180^\circ - 3\beta$.

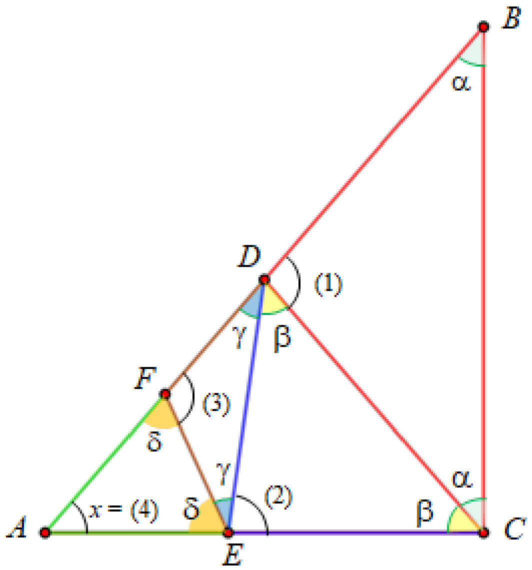
En *DCE*: $(2) = 180^\circ - 2\beta$.

En *AFE*: $x + 2\delta = 180^\circ \to \beta + 2\delta = 180^\circ \;\to\; \delta = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$.

En *E*: $\delta + \gamma + (2) = 180^\circ \;\Rightarrow$

$$90^\circ - \frac{\beta}{2} + (180^\circ - 3\beta) + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \;\to\; \beta = \frac{540^\circ}{11}.$$

Luego, $x = \beta = \dfrac{540^\circ}{11} \approx 49{,}1^\circ$.



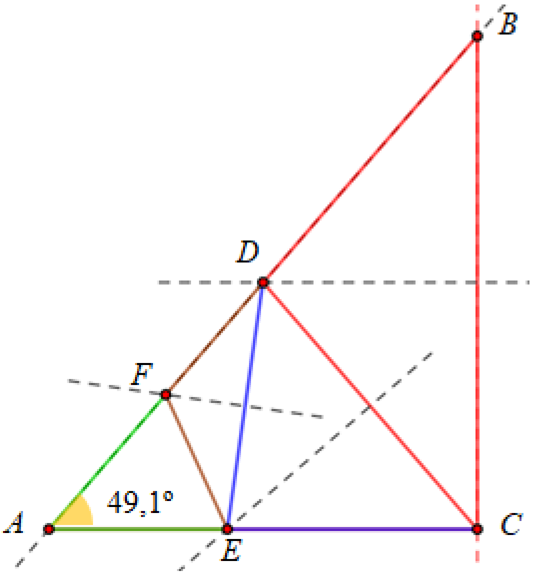
$\rightarrow$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $x = 49{,}1^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.

2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.

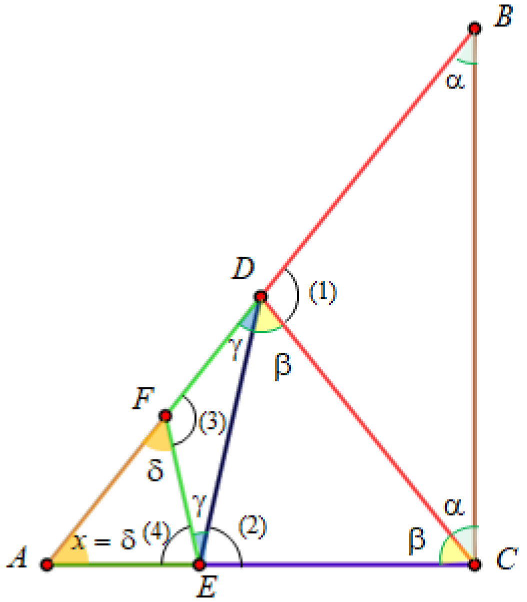
3) Se traza la mediatriz del lado *DC*, que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.

4) Se traza la mediatriz del lado *DE*, que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 23 (T81)

Con vértice singular (1) en *D*, haciendo el triángulo *DCE* isósceles en *E*, y continuando con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *E* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *BC** $\rightarrow$ *DC** $\rightarrow$ *DE** $\rightarrow$ *AF**).



En este caso tiene que cumplirse:

En *ADC*: $x = \delta = \beta$.

En *ADC*: $x + \gamma + \beta + \beta = 180^{\circ} \rightarrow \gamma = 180^{\circ} - 3\beta$.

En *DCE*: $(2) = 180^{\circ} - 2\beta$.

En *AFE*: $(4) + 2\delta = 180^{\circ} \rightarrow (4) + 2\beta = 180^{\circ} \rightarrow$

$(4) = 180^{\circ} - 2\beta$.

En *E*: $(4) + \gamma + (2) = 180^{\circ} \Rightarrow$

$180^{\circ} - 2\beta + (180^{\circ} - 3\beta) + 180^{\circ} - 2\beta = 180^{\circ} \rightarrow$

$\beta = \dfrac{360^{\circ}}{7}$.

Luego, $x = \delta = \beta = \dfrac{360^{\circ}}{7} \approx 51{,}43^{\circ}$.

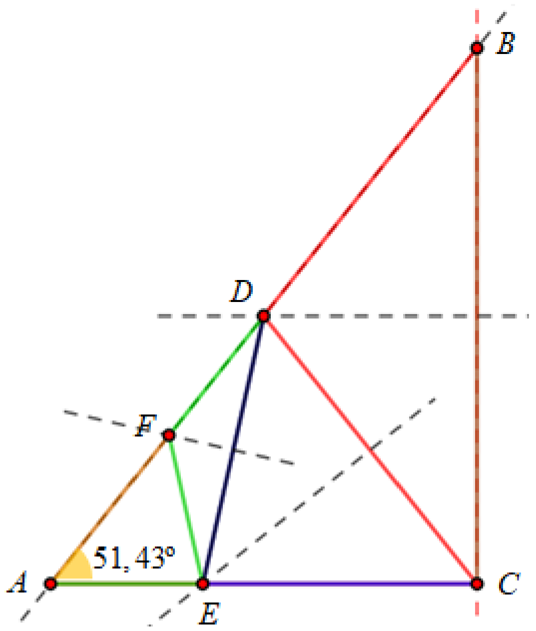
$\rightarrow$ La <u>construcción</u> de esta partición puede hacerse como sigue:

1) Para $A = x = 51{,}43^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.

2) Se traza la mediatriz del lado *BC*, que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.

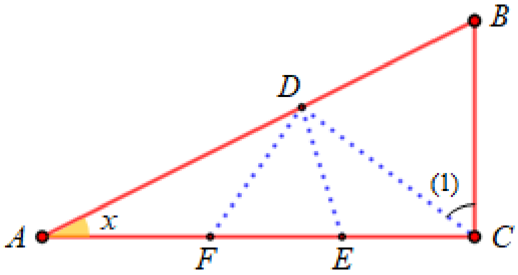
3) Se traza la mediatriz del lado *DC*, que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.

4) Se traza la mediatriz del lado *DE*, que corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



2. PARTICIONES DE TIPO II

Condiciones:
1) El punto *D* está en la hipotenusa y los puntos *E* y *F* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* (ángulo recto del triángulo dado *ABC*) se sitúan dos vértices.
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *ADF*.
Pueden presentarse 81 casos, que se obtienen al ir variando la posición de los vértices singulares.

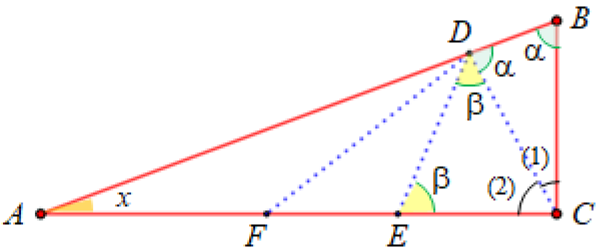


2.1. Particiones de Tipo II (a)

Además de lo indicado, el vértice singular (1) se sitúa en *C* (triángulo *B*D*).
Así se obtienen 27 casos: T82 a T108.

- **Casos 82 a 90**

Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.



Consideraciones para estos casos.
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. Como (1) + (2) = 90º, entonces α + β = 135º.
2. Por tanto, $ADE = 45^o \rightarrow |DE| < |DF| < |DA|$, lo que significa que en el punto *D* no puede situarse ningún vértice singular.

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T82.	*B*D*		*D*E*		*D*F*		*A*F*	No	En estos 9 casos los vértices singulares (1) y (2) están ambos en el punto *C*. Solo hay solución en T84. En los demás supuestos se cumple $\beta+\gamma=180^o$ o $\delta+\gamma=180^o$, que no puede ser.
T83.	*B*D*		*D*E*		*D*F*		**DF*	NO	
T84. Solución 24	*B*D*		*D*E*		*D*F*		*AD**	Sí	
T85.	*B*D*		*D*E*		**EF*		*A*F*	NO	
T86.	*B*D*		*D*E*		**EF*		**DF*	NO	
T87.	*B*D*		*D*E*		**EF*		*AD**	NO	
T88.	*B*D*		*D*E*		*DE**		*A*F*	NO	
T89.	*B*D*		*D*E*		*DE**		**DF*	NO	
T90.	*B*D*		*D*E*		*DE**		*AD**	NO	

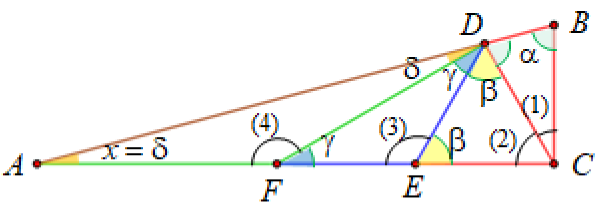
Solución 24 (T84)
Los vértices singulares (1) y (2) están en el punto *C*; se continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → *D*E* → *D*F* → *AD**).

En este caso tiene que cumplirse:
En el cuadrilátero *BCED*:

$$2\alpha+2\beta+90^o=360^o \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=135^o\,;$$

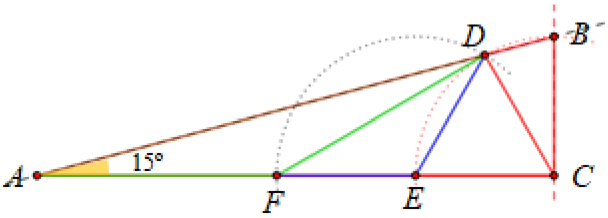
En el ángulo llano *D*:

$$\alpha+\beta+\delta+\gamma=180^o \;\Rightarrow\; \delta+\gamma=45^o\,.$$



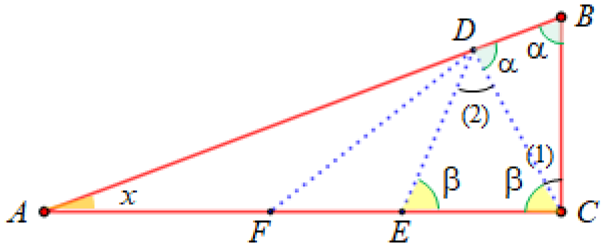
Como γ es el ángulo externo del triángulo *AFE* en *F*, se deduce que $\gamma=2\delta \rightarrow 3\delta=45^o \Rightarrow$ $x=\delta=15^o$.

Obsérvese que el triángulo *DCE* resulta equilátero; por tanto, está solución se repetirá.
→ La construcción de esta partición puede hacerse como sigue:
1) Para $x = 15^o$ se dibuja el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D*, y al lado *AC* en *E*. Se obtienen así los triángulos *BCD* y *DCE*.
3) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



- **Casos 91 a 99**

Con el vértice (2) en *D*, **CE*, se tienen otras 9 opciones, tal y como se indican en la siguiente tabla.



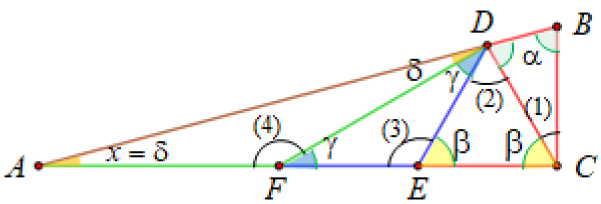
Consideraciones para estos casos
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. $|BC| = |DC| = |DE|$, lo que implica que

$ADE < 90^o \to |DE| < |DF| < |DA|$, lo que significa que en el punto *D* no puede situarse otro vértice singular.
2. También puede observarse que (2) = 2 · (1) → *E* está a la izquierda del pie de la altura desde *D* del triángulo *DCE*; lo que vuelve a implicar que $|DE| < |DF| < |DA|$.

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T91.	*B*D*		**CE*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos el vértice
T92.	*B*D*		**CE*		*D*F*		**DF*	NO	singular (1) está en *C* y el
T93. Solución 24	*B*D*		**CE*		*D*F*		*AD**	Sí	(2) en *D*.
T94.	*B*D*		**CE*		**EF*		*A*F*	NO	El caso T93 es igual al T84
T95.	*B*D*		**CE*		**EF*		**DF*	NO	ya visto.
T96.	*B*D*		**CE*		**EF*		*AD**	NO	En los demás casos se
T97.	*B*D*		**CE*		*DE**		*A*F*	NO	cumple que $\delta + \gamma = 180^o$ o
T98.	*B*D*		**CE*		*DE**		**DF*	NO	$\beta + \gamma = 180^o$, que no puede
T99.	*B*D*		**CE*		*DE**		*AD**	NO	ser.

Solución 24 (T93)

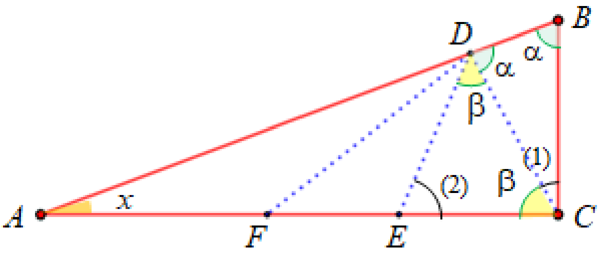
Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → **CE* → *D*F* → *AD**).



Coincide con la Solución 24 (T84), pues el triángulo *DCE* es equilátero y, por tanto, las disposiciones *D*E* y **CE* son indiferentes. (Sucederá lo mismo con la disposición *DC**: T102).

- **Casos 100 a 108**

Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen otras 9 opciones, tal y como se indican en la siguiente tabla.
En cinco de esos casos hay solución. La disposición T102 siempre es posible.

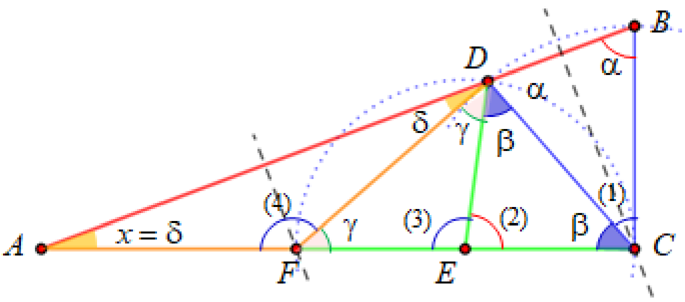


Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T100.	*B*D*		*DC**		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos el vértice
T101.	*B*D*		*DC**		*D*F*		**DF*	NO	singular (1) está en *C* y el
T102. <u>Solución 25</u>	*B*D*		*DC**		*D*F*		*AD**	Sí	(2) en *E*.
T103.	*B*D*		*DC**		**EF*		*A*F*	NO	El caso T102 vale siempre
T104.	*B*D*		*DC**		**EF*		**DF*	NO	que $x \le 45^o$.
T105. Solución 26	*B*D*		*DC**		**EF*		*AD**	Sí	En los casos T100, T101,
T106. Solución 27	*B*D*		*DC**		*DE**		*A*F*	Sí	T103 y T104 se cumple
T107. Solución 28	*B*D*		*DC**		*DE**		**DF*	Sí	$\delta+\gamma=180^o$ o $\beta+\gamma=180^o$,
T108. Solución 26	*B*D*		*DC**		*DE**		*AD**	Sí	que no puede ser.

Solución 25 (T102). Vale siempre
Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → *DC** → *D*F* → *AD**).

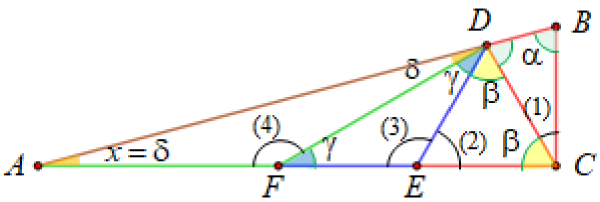
Esta solución siempre puede encontrarse, pues:
Si $x+\alpha=90^o$ → ($\delta+\alpha=90^o$, $\delta<45^o$), entonces, en *D*: $\alpha+\beta+\delta+\gamma=180^o \Rightarrow \beta+\gamma=90^o$.
Luego *FDC* es rectángulo. Si su circunferencia circunscrita tiene centro en *E*, entonces, los lados *EF*, *ED* y *EC* son iguales, pues son radios de esa circunferencia.
Por consiguiente, los triángulos *DCE* y *DEF* son isósceles.

→ Su <u>construcción</u>, por ejemplo, para *AB* = 8 y *BC* = 3, se hace como sigue:
1) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *BCD*.
2) Se traza la mediatriz de *AD* que corta al lado *AC* en el punto *F* → triángulo *ADF*.



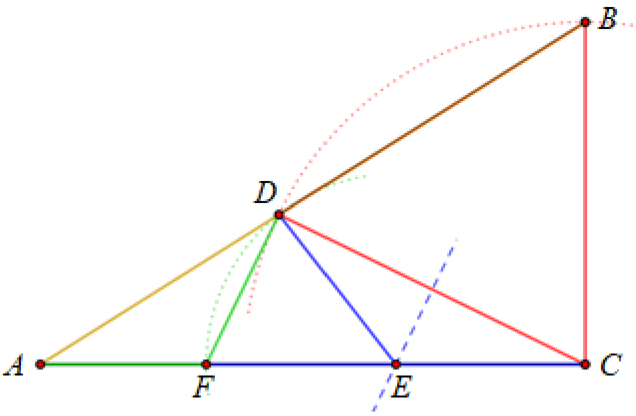
3) Como el triángulo *FDC* es rectángulo con hipotenusa *FC*, su circunferencia circunscrita tiene su centro en la mitad de la hipotenusa, punto *E* → triángulos *DCE* y *DEF*.

<u>Nota</u>: La <u>Solución 24</u> (adaptada a la derecha) es un caso particular de esta, pues el triángulo *DCE* es equilátero y, por tanto, las disposiciones *D*E* y *DC** son indiferentes.
(Sucederá lo mismo con la disposición **CE*).



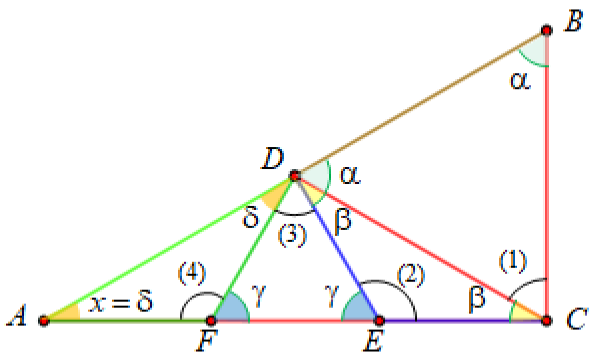
- Si *x* = 30º, entonces α = 60º ⇒ los triángulos *BCD* y *DEF* son equiláteros y, por tanto, hay 9 disposiciones idénticas, las que resultan al *variar* los ángulos singulares. Son los casos: T102 (particular), T105, T108, T129, T132, T135 (particular), T156, T159 (particular) y T162.

→ Una <u>construcción</u> alternativa, en este caso para catetos de longitud *AC* = 8 y *CB* = 5, es la siguiente:
1) Se dibuja el triángulo rectángulo indicado: *AC* = 8 y *CB* = 5.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → *BCD*.
3) La mediatriz de *DC* corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



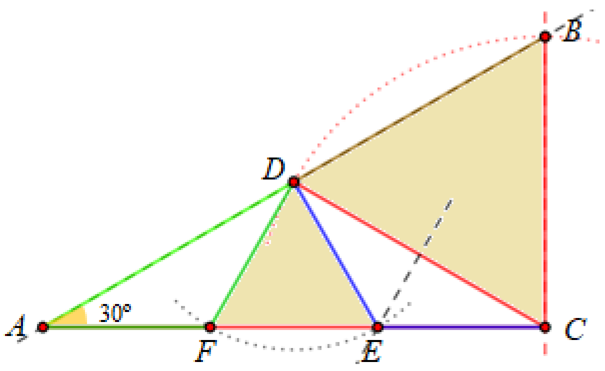
Solución 26 (T105)
Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → *DC** → **EF* → *AD**).

Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
En *E*: $(2)+\gamma = 180^\circ \rightarrow (2) = 180^\circ - 2\delta$.
En *DCE*: $(2) = 180^\circ - 2\beta \rightarrow \beta = \delta$.
En *DEF*: $(3) = 180^\circ - 2\gamma \rightarrow (3) = 180^\circ - 4\delta$.
En *ABC*: $\alpha + \delta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ - \delta$.
En *D*: $\delta + (3) + \beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow$
$$\delta + (180^\circ - 4\delta) + \delta + 90^\circ - \delta = 180^\circ \rightarrow \delta = 30^\circ.$$
Esta solución es un caso particular de <u>Solución 25</u>: cuando $x = \delta = 30^\circ$.



<u>Obsérvese</u> que los triángulos *DEF* y *BCD* son equiláteros. Por tanto, esta variación-solución volverá a salir. (Anteriormente se indicó la referencia de los distintos casos).

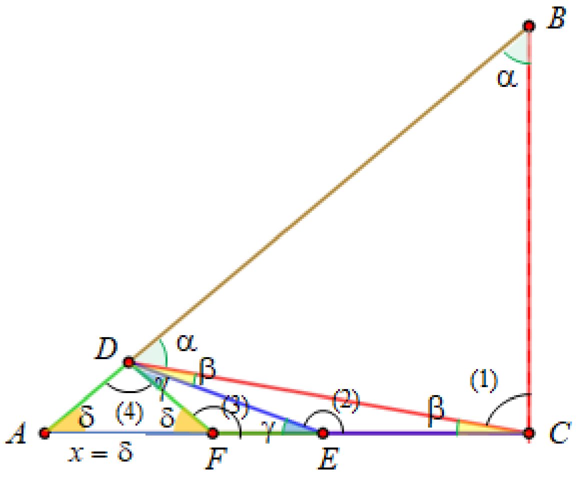
→ La <u>construcción</u> de esta partición puede hacerse como sigue:
1) Se traza el lado *AC*, con una longitud arbitraria, y una perpendicular por *C* a él.
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x = 30^\circ$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*. El punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
4) La mediatriz y *DC* corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene el triángulo *DCE*.



5) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AC* en *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.

Solución 27 (T106)

Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *D* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B**D* → *DC** → *DE** → *A**F*).



Debe cumplirse:

En *ADF*: $(4)+2\delta=180^{\circ} \rightarrow (4)=180^{\circ}-2\delta$.

En *F*: $(3)+\delta=180^{\circ}$; exterior $\delta=2\gamma$.

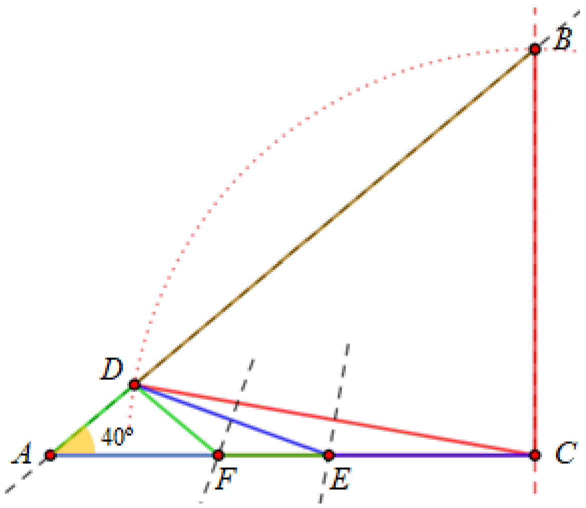
En *E*: $(2)+\gamma=180^{\circ}$; exterior $\gamma=2\beta$.

En *ABC*: $\delta+\alpha=90^{\circ} \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-\delta$.

En *D*: $(4)+\gamma+\beta+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow$

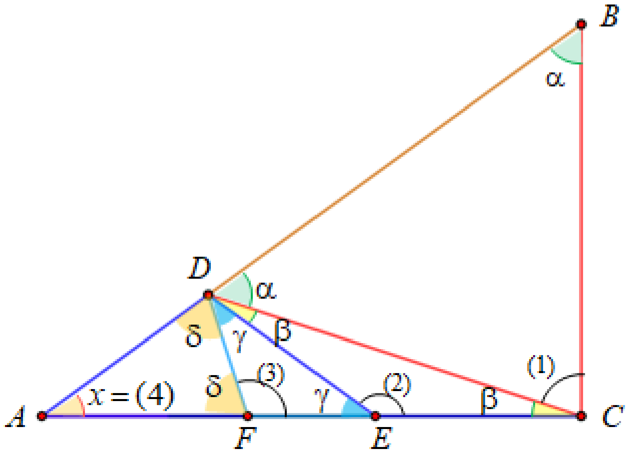
$$180-2\delta+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{4}+90^{\circ}-\delta=180^{\circ} \rightarrow \delta=40^{\circ}.$$

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x=40^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) La mediatriz de *DC* corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene el triángulo *DCE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtiene el triángulo *DEF*.
5) El cuarto triángulo es *ADF*.



Solución 28 (T107)

Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *A* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → *DC** → *DE** → **DF*).



Con esto, se cumple:

En *ABC*: $x=(4)$; $x+\alpha=90^{o} \Rightarrow \alpha=90^{o}-x$.

En *ADF*: $x+2\delta=180^{o} \Rightarrow \delta=90^{o}-\dfrac{x}{2}$.

En *F*: $(3)=180-\delta \Rightarrow (3)=90^{o}+\dfrac{x}{2}$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{o} \Rightarrow$

$$\gamma=90^{o}-\frac{(3)}{2} \Rightarrow \gamma=45^{o}-\frac{x}{4}.$$

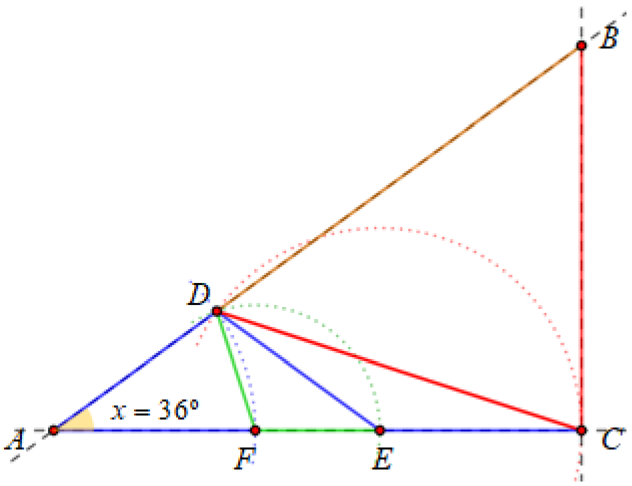
En *E*: $(2)=180^{o}-\gamma$.

En *DCE*: $(2)+2\beta=180^{o} \Rightarrow 180^{o}-\gamma+2\beta=180^{o} \Rightarrow \beta=\dfrac{\gamma}{2} \Rightarrow \beta=\dfrac{45^{o}}{2}-\dfrac{x}{8}$.

En *D*: $\delta+\gamma+\beta+\alpha=180^{o} \Rightarrow 90^{o}-\dfrac{x}{2}+45^{o}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{45^{o}}{2}-\dfrac{x}{8}+90^{o}-x=180^{o} \Rightarrow x=36^{o}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

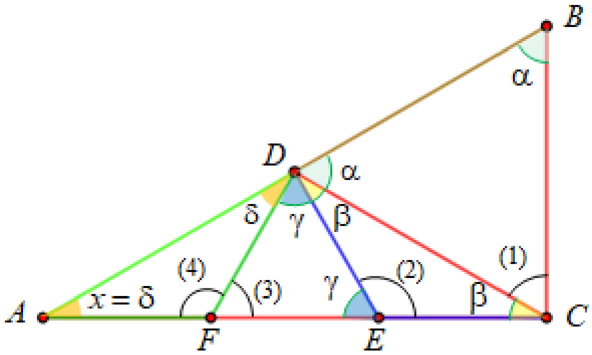
1) Se fija el vértice *A* y se traza el lado sobre el que se encontrará *C*, que de momento sin fijar.
2) En *A*, formando un ángulo de 36º se traza el lado *AB*, sin determinar *B*.
3) Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corte a los lados: arco *DF*. Se tiene así el triángulo *ADF*.
4) Con centro en *F* y radio *FD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtienen así el triángulo *FDE*.
5) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *C* → *DCE*.
6) La perpendicular a *AC* por *C* determina, al cortase con *AB*, el punto *B*. Triángulo *ABC*.



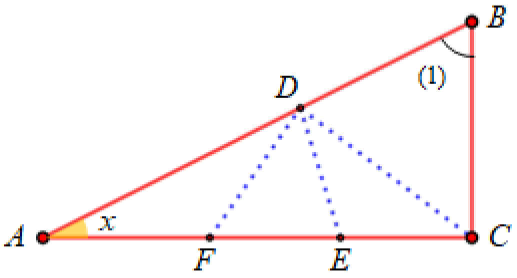
Solución 26 (T108)

Este caso, con vértice singular (1) en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*D* → *DC** → *DE** → *AD**).

Coincide con la <u>Solución 26</u>, pues el triángulo *DEF* es equilátero y, por tanto, las disposiciones **EF* y *DE** son indiferentes. (Sucedió lo mismo con la disposición *D*F* (T102), aunque allí se daban infinitas soluciones, siendo una de ellas $x=\delta=30^{o}$).



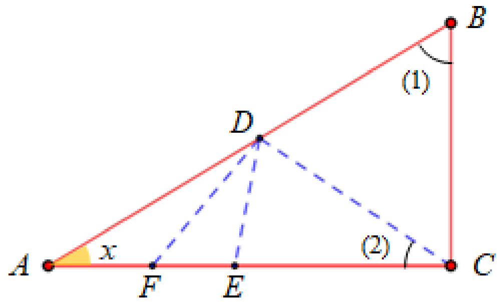
2.2. Particiones de Tipo II (b)



Condiciones:
1) El punto *D* está en la hipotenusa y los puntos *E* y *F* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* se sitúan dos vértices.
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *ADF*.
3) El vértice singular (1) se sitúa en *B* (posición **CD*).
Así se obtienen otros 27 casos: T109 a T135.

- **Casos 109 a 117**

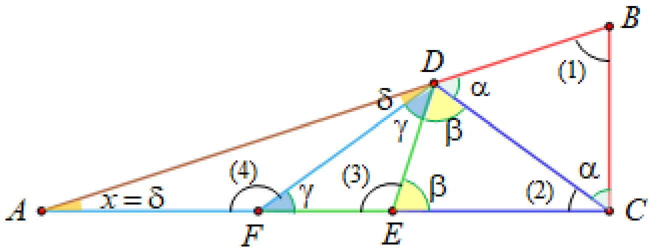
Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está “forzado”).



<u>Consideraciones para estos casos</u>
1. En *D* no puede situarse ningún vértice singular, pues obligaría a que tanto *E* como *F* estuviesen situados a la derecha de su proyección sobre *AC*, en cuyo caso (2) no podría estar en *C*.
2. Por lo mismo, tampoco (4) puede estar en *A*.

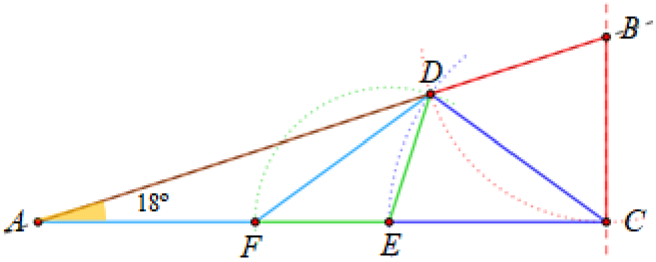
Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T109.	**CD*		*D*E*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos el vértice singular (1) está en *B*; el (2) en *C*.
T110.	**CD*		*D*E*		*D*F*		**DF*	NO	
T111. Solución 29	**CD*		*D*E*		*D*F*		*AD**	Sí	Solo tiene solución el caso T111.
T112.	**CD*		*D*E*		**EF*		*A*F*	NO	
T113.	**CD*		*D*E*		**EF*		**DF*	NO	En los demás supuestos se cumple $\beta+\gamma=180^{\circ}$ o $\delta+\gamma=180^{\circ}$, que no puede ser.
T114.	**CD*		*D*E*		**EF*		*AD**	NO	
T115.	**CD*		*D*E*		*DE**		*A*F*	NO	
T116.	**CD*		*D*E*		*DE**		**DF*	NO	
T117.	**CD*		*D*E*		*DE**		*AD**	NO	

Solución 29 (T111)
Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *C*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: **CD* $\rightarrow$ *D*E* $\rightarrow$ *D*F* $\rightarrow$ *AD**).



Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x=\delta$; $x+\alpha=90^{\circ} \Rightarrow \alpha=90^{\circ}-x$.
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$:
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^{\circ}$.
En *C*: $(2)+\alpha=90^{\circ} \Rightarrow \alpha=2\beta-90^{\circ}$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^{\circ}$.
En *E*: $(3)+\beta=180^{\circ} \Rightarrow \beta=2\gamma \rightarrow \beta=4\delta \rightarrow \alpha=8\delta-90^{\circ}$.
En *D*: $\delta+\gamma+\beta+\alpha=180^{\circ} \Rightarrow \delta+2\delta+4\delta+\left(8\delta-90^{\circ}\right)=180^{\circ} \Rightarrow \delta=x=18^{\circ}$.

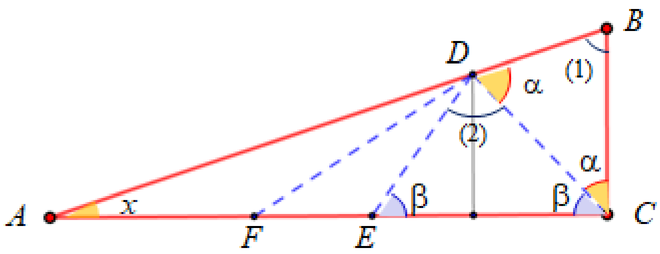
→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con un ángulo de 18º se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



- **Casos 118 a 126**

Con el vértice (2) en *D*, **CE*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").

<u>Consideraciones para estos casos</u>.
1. Como la altura desde *D* del triángulo *DCE* es paralela al lado *BC* se deduce que *E* está a la izquierda del pie de la altura, lo que implica que $|DE| < |DF| < |DA|$.

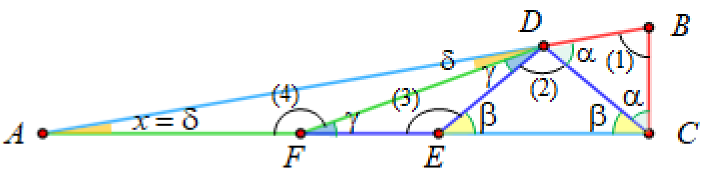


2. Por tanto, en el punto *D* no puede situarse otro vértice singular. Tampoco en *A*.

Triángulos	BCD		DCE		DEF		ADF	D en la hipotenusa; E y F en AC	
T118.	*CD		*CE		D*F		A*F	No	En estos 9 casos el vértice singular (1) está en *B*; el (2) en *D*.
T119.	*CD		*CE		D*F		*DF	NO	Solo tiene solución el caso T120.
T120. Solución 30	*CD		*CE		D*F		AD*	Sí	En los demás supuestos, $\beta+\gamma=180^o$ o $\delta+\gamma=180^o$, que no puede ser.
T121.	*CD		*CE		*EF		A*F	NO	
T122.	*CD		*CE		*EF		*DF	NO	
T123.	*CD		*CE		*EF		AD*	NO	
T124.	*CD		*CE		DE*		A*F	NO	
T125.	*CD		*CE		DE*		*DF	NO	
T126.	*CD		*CE		DE*		AD*	NO	

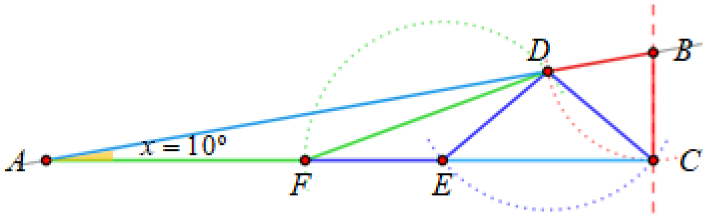
Solución 30 (T120)
Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: **CD* → **CE* → *D*F* → *AD**).

Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x=\delta$; $\delta+(1)=90^o$.
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$:
Exterior en *E*: $\beta=2\gamma \;\to\; \beta=4\delta$.
En *DCE*: $(2)+2\beta=180^o \;\to\; (2)=180^o-8\delta$.
En *C*: $\alpha+\beta=90^o \;\to\; \alpha=90^o-4\delta$.



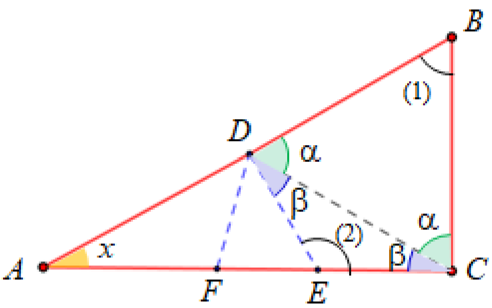
En *D*: $\delta+\gamma+(2)+\alpha=180^o \;\Rightarrow\; \delta+2\delta+(180^o-8\delta)+(90-4\delta)=180^o \;\Rightarrow\; \delta=x=10^o$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con un ángulo de 10º se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *D* y radio *DC* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



- **Casos 127 a 135**

Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").

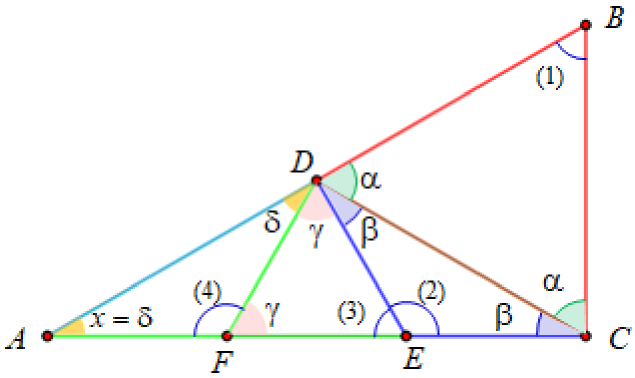


<u>Consideraciones para estos casos</u>.
1. Si α + β = 90º ⇒ *DE* es perpendicular a *AB*.
2. Por tanto, (1) + (2) = 180º → $DEF = (1)$.

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T127.	**CD*		*DC**		*D*F*		*A*F*	No	En estos 9 casos el vértice
T128.	**CD*		*DC**		*D*F*		**DF*	NO	singular (1) está en *B*; el (2)
T129. Solución 31	**CD*		*DC**		*D*F*		*AD**	Sí	en *E*.
T130.	**CD*		*DC**		**EF*		*A*F*	NO	En los casos imposibles,
T131.	**CD*		*DC**		**EF*		**DF*	NO	T127, T128, T130 y T131,
T132. Solución 31	**CD*		*DC**		**EF*		*AD**	Sí	se cumple que $\delta+\gamma=180º$,
T133. Solución 32	**CD*		*DC**		*DE**		*A*F*	Sí	que no puede ser.
T134. Solución 32	**CD*		*DC**		*DE**		**DF*	Sí	
T135. <u>Solución 33</u>	**CD*		*DC**		*DE**		*AD**	Sí	

Solución 31 (T129)

Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: **CD* → *DC** → *D*F* → *AD**).

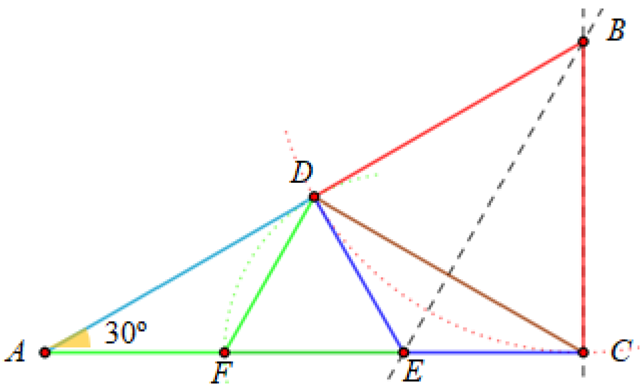


Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x=\delta$; $\delta+(1)=90º$.
Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$:
Exterior en *E*: $(2)=2\gamma \;\rightarrow\; (2)=4\delta$.
En *DCE*: $(2)+2\beta=180º \;\rightarrow\; \beta=90º-2\delta$.
En *C*: $\alpha+\beta=90º \;\rightarrow\; \alpha=2\delta$.
En *D*: $\delta+\gamma+\beta+\alpha=180º \;\Rightarrow\; \delta+2\delta+(90º-2\delta)+2\delta=180º \;\Rightarrow\; \delta=x=30º$.

<u>Obsérvese</u> que está solución genera triángulos equiláteros en *DEF* (y en *BCD*). Por tanto, el ángulo singular puede situarse en cualquiera de sus vértices, lo que significa que la partición se repetirá

varias veces, como ya se indicó anteriormente: casos T102 (particular), T105, T108, T129, T132, T135 (particular), T156, T159 (particular) y T162.

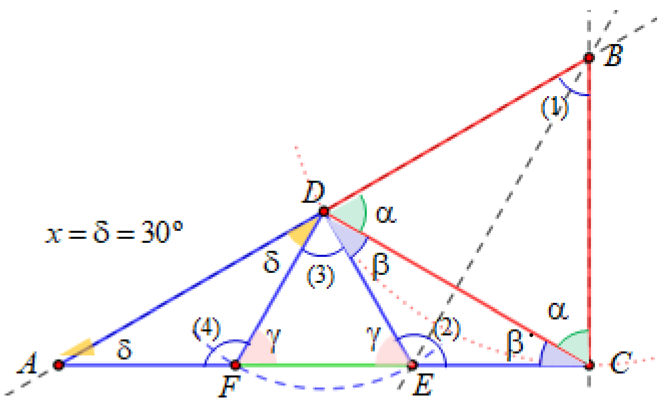
→ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con el ángulo $x = 30^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtienen así el triángulo *BCD*.
3) Se traza la mediatriz de *CD*, que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



Solución 31 (T132)
Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: **CD* → *DC** → **EF* → *AD**).

Esta solución es la misma que la dada en T129, pero colocando el ángulo (3) en *D*.

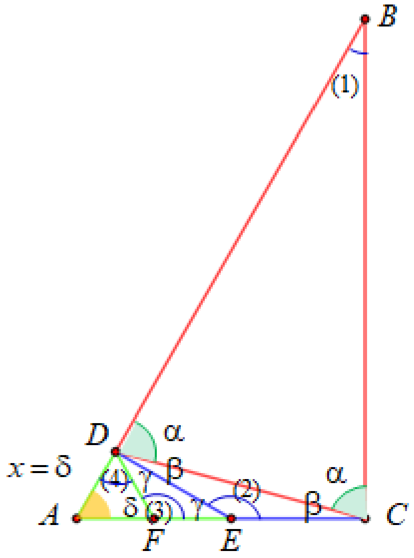
→ La construcción puede alterarse ligeramente, tal y como se muestra en la figura adjunta.

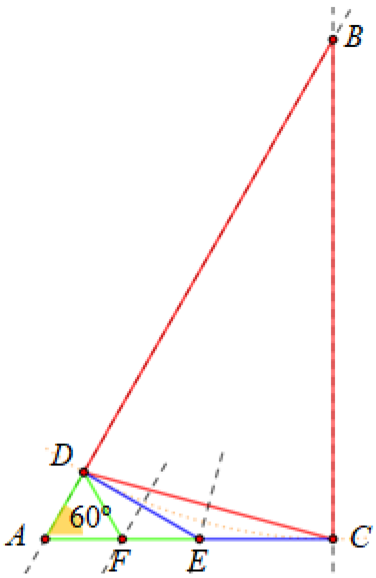


Solución 32 (T133)
Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *D* para *ADF*, como se indica en la figura.
(Variación: **CD* → *DC** → *DE** → *A*F*).

Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x = \delta$; $\delta + (1) = 90^{\circ}$.
Exterior en *F*: $(3) + \delta = 180^{\circ}$.
En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^{\circ} \rightarrow \delta = 2\gamma$.
En *C*: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.
En *D*: $(4) + \gamma + \beta + \alpha = 180^{\circ} \rightarrow (4) + \gamma = 90^{\circ}$.
En *ADF*: $(4) + 2\delta = 180^{\circ} \rightarrow 2\delta - \gamma = 90^{\circ}$.
Como $\delta = 2\gamma \Rightarrow 3\gamma = 90^{\circ} \rightarrow \gamma = 30^{\circ}$.
Luego, $\delta = x = 60^{\circ}$.

Obsérvese que está solución genera un triángulo equilátero (*ADF*). Por tanto, el ángulo singular (4) puede situarse en cualquiera de sus vértices, lo que significa que la partición se repetirá otras dos veces: en T134 y en T135.
En T134 (Variación: **CD* → *DC** → *DE** → **DF*) en el dibujo solo cambia el ángulo (4), que se sitúa en *A*.
En T135 aparece una infinidad de soluciones; entre ellas este caso, con $\delta = x = 60^{\circ}$.



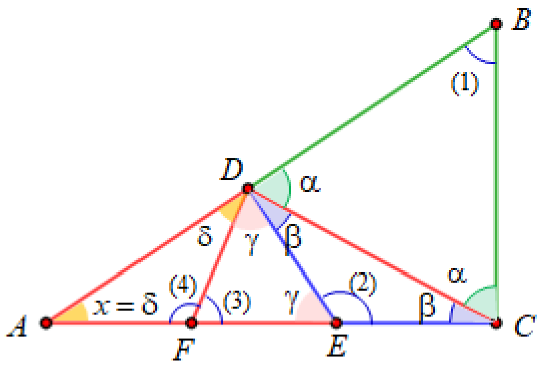


→ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue.
1) Con el ángulo $x = 60^{\circ}$ se dibuja el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
3) Se traza la mediatriz de *CD*, que corta al lado *AC* en el punto *E*. Se obtiene así el triángulo *DCE*.
4) Se traza la mediatriz de *DE*, que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.

Solución 33 (T135). Vale siempre
Este caso, con vértice singular (1) en *B* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en el mismo *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: **CD* → *DC** → *DE** → *AD**).

Con esto, debe cumplirse que:
En *C*: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.
Exterior en *F*: $(3) = 2\delta$.
En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^{\circ} \rightarrow \delta + \gamma = 90^{\circ}$.
Esto significa que la partición puede hacerse para cualquier valor de $\delta = x < 90^{\circ}$.

En el gráfico adjunto se ha hecho la división correspondiente al ángulo $A = x = 33{,}5^{\circ}$.



→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

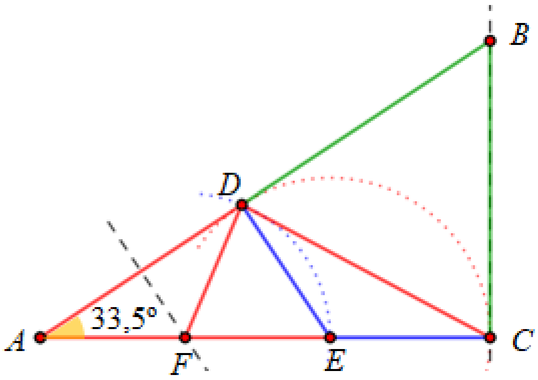
1) Se dibuja el ángulo $A = x = 33{,}5^{\circ}$. (Los puntos *C* y *B* se dejan sin fijar).

2) Sobre el lado *AB* se elige un punto *D*, arbitrario, y se traza la mediatriz de *AD*, que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtiene así el triángulo *ADF*.

3) Con centro en *F* y radio *FD* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E*. Se obtiene el triángulo *DEF*.

4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en *C* → triángulo *DCE*.

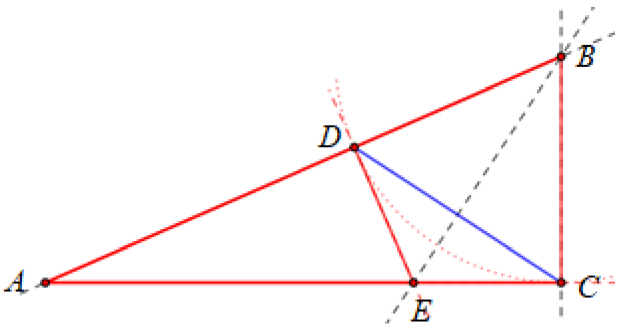
5) El corte de la perpendicular a *AC* por *C* es el punto *B*. Se obtienen así los triángulos *BCD* y *ABC*.



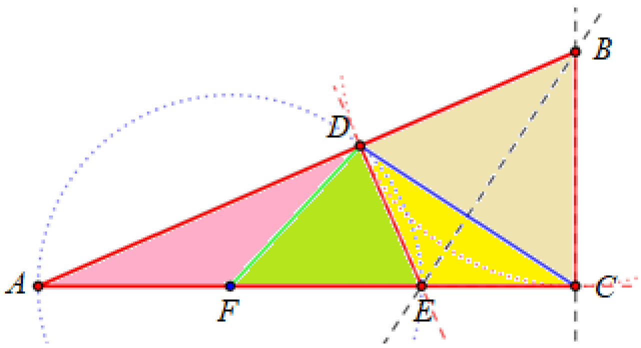
<u>Observación 1</u>: Las soluciones asociadas a T129 y T132 son casos particulares de T133, ambas para $x = \delta = 30^{\circ}$. También generan la misma partición los casos T102 (particular), T105, T108, T135 (particular), T156, T159 (particular) y T162.

<u>Observación 2</u>: Que esta partición (T135) puede realizarse siempre se justifica a partir de la bisectriz de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo *ABC*.

- Como se sabe, la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de ese ángulo. Por tanto, en un triángulo rectángulo, *ABC*, el punto de corte de la bisectriz del ángulo *ABC* con el cateto *AC*, (punto *E*), cumple que los segmentos *ED* y *EC*, que definen la distancia a los lados *AB* y *BC*, respectivamente, miden lo mismo. (Recuerda que la distancia de un punto a una recta es la mínima de las distancias posibles: la distancia entre el punto y su proyección sobre la recta). Luego el triángulo *BCD* es isósceles. Y lo mismo pasa con el triángulo *BCD*.



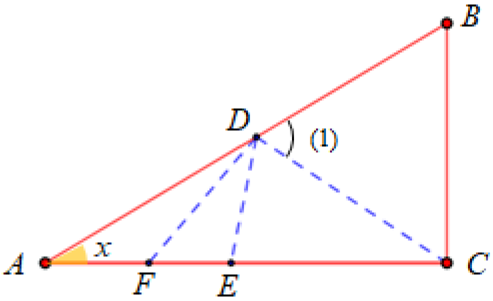
- Por otra parte, el triángulo *ADE* también es rectángulo (*D* es la proyección de *E* sobre *AB*) y, por tanto, puede dividirse en otros dos triángulos isósceles. Así, aplicando el método de la circunferencia circunscrita se obtiene la siguiente partición.



<u>Recuerda</u> que la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo tiene su centro en el punto medio de la hipotenusa. En el caso del triángulo *ADE*, el centro está en el punto *F*; por tanto $|FA| = |FD| = |FE|$, luego los triángulos *ADF* y *DEF* son isósceles.

2.3. Particiones de Tipo II (c)

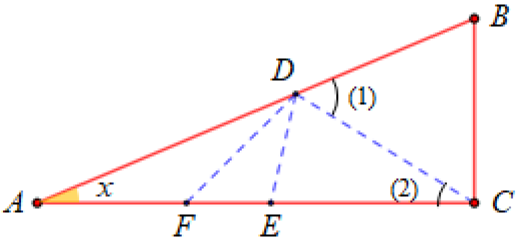
Condiciones:
1) El punto *D* está en la hipotenusa y los puntos *E* y *F* sobre el cateto *AC*.
2) En el punto *C* se sitúan dos vértices.
Así se forman los triángulos: *BCD*, *DCE*, *DEF* y *ADF*.
3) El vértice singular (1) se sitúa en *D* (posición *BC**).
Así se obtienen 27 casos: T136 a T162.



- **Casos 136 a 144**

Con el vértice (2) en *C*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").

Consideraciones para estos casos
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El punto *D* pertenece a la mediatriz del lado *AB*. Esta mediatriz corta a la hipotenusa en su punto medio (Tales); como consecuencia, el triángulo *ADC* es isósceles en *D*.
2. El vértice singular (4), correspondiente al triángulo *ADF* no puede estar en *D*, pues exigiría que *AF* = *AD*, que solo puede darse cuando *F* coincide con *C*: el punto *E* se queda sin sitio.
3. El vértice singular (3), correspondiente al triángulo *DEF* no puede estar ni en *D* ni en *F*, pues exigiría que el ángulo $E=\beta+\gamma=180^{\circ}$, que no puede ser.



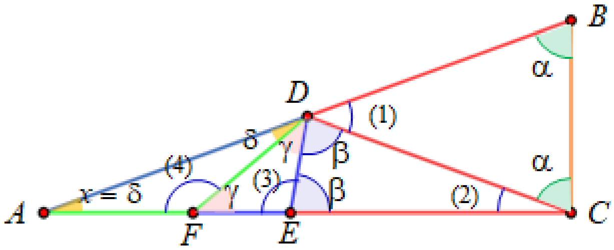
Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T136.	*BC**		*D*E*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos el vértice singular (1) está en *D*; el (2) en *C*. Solo puede construirse la partición T138, con *x* = 20º. En los demás supuestos se cumple que $\delta+\gamma=180^{\circ}$ o $\beta+\gamma=180^{\circ}$, que no puede ser.
T137.	*BC**		*D*E*		*D*F*		**DF*	NO	
T138. Solución 34	*BC**		*D*E*		*D*F*		*AD**	Sí	
T139.	*BC**		*D*E*		**EF*		*A*F*	NO	
T140.	*BC**		*D*E*		**EF*		**DF*	NO	
T141.	*BC**		*D*E*		**EF*		*AD**	NO	
T142.	*BC**		*D*E*		*DE**		*A*F*	NO	
T143.	*BC**		*D*E*		*DE**		**DF*	NO	
T144.	*BC**		*D*E*		*DE**		*AD**	NO	

Solución 34 (T138)
Este caso, con vértice singular (1) en *D*y (2) en *C*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *BC** → *D*E* → *D*F* → *AD**).

Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x=\delta$; $\alpha+\delta=90^{\circ} \rightarrow \alpha=90^{\circ}-\delta$.
En *BCD*: $(1)+2\alpha=180^{\circ} \rightarrow$

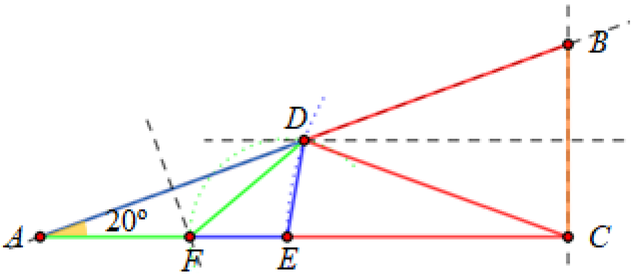
$(1)=180^{\circ}-2(90^{\circ}-\delta)=2\delta$.

Exterior en *F*: $\gamma=2\delta$.
Exterior en *E*: $\beta=2\gamma=4\delta$.



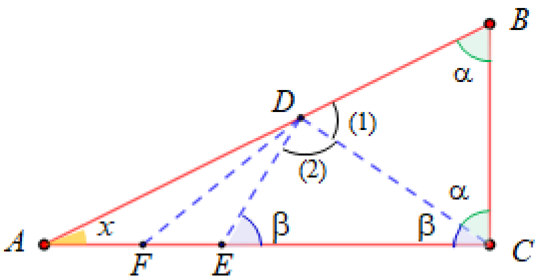
En *D*: $\delta+\gamma+\beta+\alpha=180^{\circ} \rightarrow \delta+2\delta+4\delta+2\delta=180^{\circ} \rightarrow \delta=x=20^{\circ}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con un ángulo de 20º se construye el triángulo *ABC*.
2) La mediatriz del lado *BC* corta al lado *AB* en *D* → triángulo *BCD*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E* → triángulo *DCE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*. (El punto *F* también pude obtenerse trazando la mediatriz de *AD*).



- **Casos 145 a 153**

Con el vértice (2) en *D*, **DE*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está “forzado”).

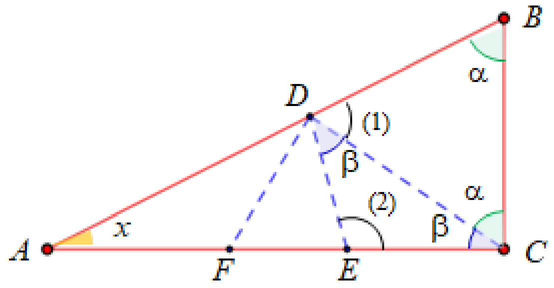


<u>Consideraciones para estos casos</u>
Ninguna de estas posibles particiones puede hacerse, pues al cumplirse que α + β = 90º, entonces (1) + (2) deben sumar 180º, lo que resulta absurdo.
También puede observarse que para que *DCE* sea isósceles en *D* es necesario que $|DC| = |DE|$, lo que exige que *E* coincida con *A*. (Solo se tendrían dos triángulos isósceles).

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T145.	*BC**		**CE*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos, tanto el vértice singular (1) como el (2) están en *D*. Nunca hay solución.
T146.	*BC**		**CE*		*D*F*		**DF*	NO	
T147.	*BC**		**CE*		*D*F*		*AD**	NO	
T148.	*BC**		**CE*		**EF*		*A*F*	NO	
T149.	*BC**		**CE*		**EF*		**DF*	NO	
T150.	*BC**		**CE*		**EF*		*AD**	NO	
T151.	*BC**		**CE*		*DE**		*A*F*	NO	
T152.	*BC**		**CE*		*DE**		**DF*	NO	
T153.	*BC**		**CE*		*DE**		*AD**	NO	

- **Casos 154 a 162**

Con el vértice (2) en *E*, *DC**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").



Consideraciones para estos casos
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. El punto *D* pertenece a la mediatriz del lado *AB*. Esta mediatriz corta a la hipotenusa en su punto medio (Tales).
2. El vértice singular (4), correspondiente al triángulo *ADF* no puede estar en *D*, pues exigiría que $|AD| = |DF|$, que solo puede darse cuando *F* coincide con *C*. (El punto *E* se queda sin sitio: solo se tendrían dos triángulos isósceles).

Triángulos	*BCD*		*DCE*		*DEF*		*ADF*	*D* en la hipotenusa; *E* y *F* en *AC*	
T154.	*BC**		*DC**		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *D*; el (2) en *E*.
T155.	*BC**		*DC**		*D*F*		**DF*	NO	
T156. Solución 26	*BC**		*DC**		*D*F*		*AD**	Sí	
T157.	*BC**		*DC**		**EF*		*A*F*	NO	En T155 y T158 se cumple que $\delta + \gamma = 180^{\text{o}}$, que no puede ser.
T158.	*BC**		*DC**		**EF*		**DF*	NO	
T159. Solución 35	*BC**		*DC**		**EF*		*AD**	Sí	
T160.	*BC**		*DC**		*DE**		*A*F*	NO	
T161. Solución 36	*BC**		*DC**		*DE**		**DF*	Sí	
T162. Solución 26	*BC**		*DC**		*DE**		*AD**	Sí	

Solución 26 (T156)
Este caso, con vértice singular (1) en *D* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *A* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *BC** → *DC** → *D*F* → *AD**).

Con esto, debe cumplirse que:
En el cuadrilátero *BCED*, como α + β = 90º ⇒ (1) + (2) =180º.
Como *D* es el punto medio del lado *AB* y *BD* = *DC*, entonces *AD* = *DC*. Por tanto, el triángulo *ADC* es isósceles y $\delta = \beta$.

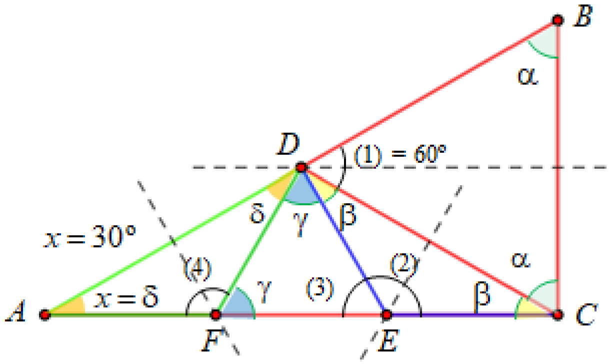
Tomando $x = \delta$, como $\alpha + \delta = 90^{\text{o}}$ y (en *BCD*) $\frac{(1)}{2} + \alpha = 90^{\text{o}} \Rightarrow (1) = 2\delta$.

Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.

En *D*: $\delta + \gamma + \beta + (1) = 180^{\text{o}} \rightarrow \delta + 2\delta + \delta + 2\delta = 180^{\text{o}} \rightarrow \delta = x = 30^{\text{o}}$.

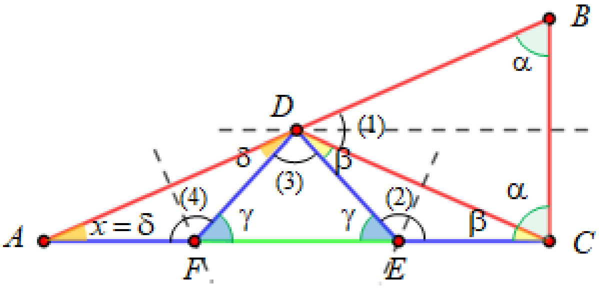
Como los triángulos *DEF* y *BCD* son equiláteros, esta solución es la misma que la vista en T105: Solución 26.

→ La construcción de esta partición se puede hacer trazando las mediatrices, tal y como se indica en la figura.



Solución 35 (T159). Vale siempre

Este caso, con vértice singular (1) en *D* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *D*, para *DEF*, y en *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *BC** $\to$ *DC** $\to$ **EF* $\to$ *AD**).

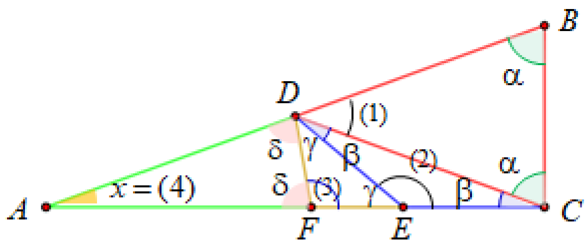


Con esto, debe cumplirse que:
En *ADC*: $\beta = \delta$.
Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^o \to (3) = 180 - 4\delta$.
En *C*:
$\alpha + \beta = 90^o \to \alpha = 90^o - \beta \to \alpha = 90^o - \delta$.
En *BCD*: $(1) + 2\alpha = 180^o \to (1) = 180 - 2\alpha \to (1) = 2\delta$.
En *D*: $\delta + (3) + \beta + (1) = 180^o \to \delta + (180^o - 4\delta) + \delta + 2\delta = 180^o \to$ Se obtiene una identidad. Esto significa que la partición puede hacerse para cualquier valor de $\delta = x < 45^o$. (Si $45^o < \delta < 90^o$, entonces $\gamma = 2\delta > 90^o$, que es imposible).

$\to$ La <u>construcción</u> de esta partición puede hacerse trazando mediatrices, tal y como se muestra en la figura anterior.

Solución 36 (T161)

Este caso, con vértice singular (1) en *D* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *F*, para *DEF*, y en *A* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *BC** $\to$ *DC** $\to$ *DE** $\to$ **DF*).



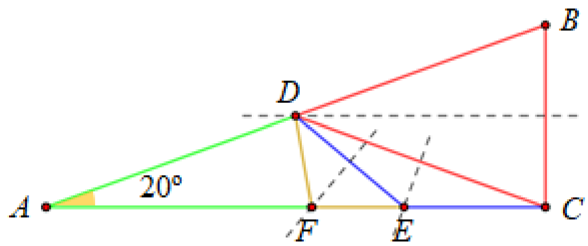
Con esto, debe cumplirse que:
En *ADC*: $\beta = (4)$.
Exterior en *E*: $\gamma = 2\beta$.
En *C*: $\alpha + \beta = 90^o \to \alpha = 90^o - \beta$
En *BCD*: $(1) + 2\alpha = 180^o \to (1) = 180 - 2\alpha \to$
$(1) = 180^o - 2(90^o - \beta) = 2\beta$.

En *ADF*: $(4) + 2\delta = 180^o \to \delta = 90^o - \dfrac{\beta}{2}$.

En *D*: $\delta + \gamma + \beta + (1) = 180^o \to 90^o - \dfrac{\beta}{2} + 2\beta + \beta + 2\beta = 180^o \to \beta = 20^o \Rightarrow \delta = x = 20^o$.

$\to$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Con un ángulo de $A = 20^o$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz de *BC* que corta al lado *AB* en *D* $\to$ triángulo *BCD*.
3) La mediatriz de *DC* corta al lado *AC* en *E* $\to$ triángulo *DCE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AC* en *F* $\to$ triángulos *DEF* y *ADF*.



<u>Nota</u>: Esta partición es la “simétrica” de la Solución 34 (T138).

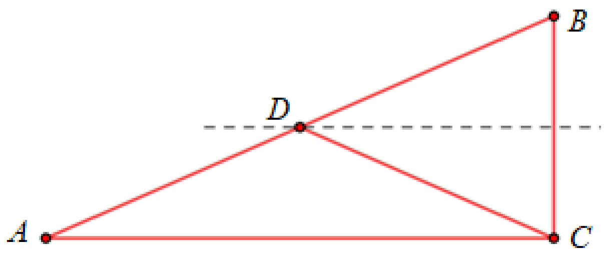
Solución 26 (T162)
Este caso, con vértice singular (1) en *D* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en el punto *F*, para *DEF*, y en el mismo *F* para *ADF*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: $BC^* \rightarrow DC^* \rightarrow DE^* \rightarrow AD^*$).

Es un caso particular de T159: $x = 30º$.
La construcción es la misma que la dada en T156 cambiando (3) por γ en *F*.

Nota. Para el caso concreto de $x = \delta = 30º$, los triángulos *DEF* y *BCD* son equiláteros. Por tanto, el ángulo singular puede situarse en cualquiera de sus vértices, lo que significa que la partición se repetirá varias veces, como ya se indicó anteriormente: casos T102 (particular), T105, T108, T129, T132, T135 (particular), T156, T159 (particular) y T162.

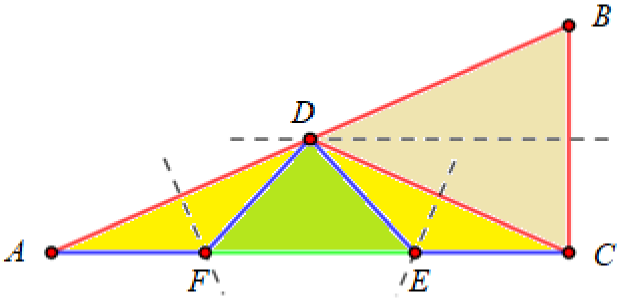
Observación 3: En las Particiones de Tipo II (c) intervienen las mediatrices de algunos lados.

- Como se sabe, la mediatriz de un segmento (de un lado) es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Por tanto, en un triángulo rectángulo, *ABC*, el punto de corte de la mediatriz de un cateto (pongamos *BC*) con la hipotenusa *AB*, (punto *D*), cumple que los segmentos *DB* y *DC* miden lo mismo. Luego el triángulo *BCD* es isósceles.



- Además, ese punto *D* cae en la mitad de la hipotenusa (resulta fácil de deducir aplicando Tales; además, *D* es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*). Luego, *DA* = *DB* = *DC*; lo que significa que el triángulo *ADC* también es isósceles.
- Por consiguiente, cualquier triángulo rectángulo puede descomponerse en dos isósceles.

- Por otra parte, las mediatrices de los lados *AD* y *DC* (del triángulo *ADC*) cortan a *AC* en los puntos *F* y *E*, respectivamente, cumpliéndose que los triángulos *ADF* y *DCE* son isósceles. Como ambos triángulos son iguales (tienen un lado igual, *DA* = *DC*, e iguales los ángulos adyacentes), se deduce que $|DF| = |DE|$; luego el triángulo *DEF* también será isósceles.



Por tanto, la partición T159 ($BC^* \rightarrow DC^* \rightarrow {}^*EF \rightarrow AD^*$) siempre puede realizarse.
Las variaciones T156 y T162 son casos particulares de T159, cuando $x = 30º$.

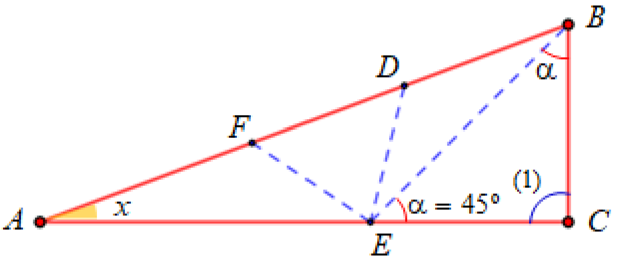
Observación 4: Las particiones que pueden obtenerse eligiendo dos puntos en la hipotenusa (*AB*) y el tercero en el cateto *BC* son "simétricas" a las Particiones de Tipo I (casos T1 a T81).
Lo mismo puede decirse de las que se obtienen eligiendo un punto en la hipotenusa *AB* y dos puntos en *BC*: son "simétricas" a las Particiones de Tipo II (casos T82 a T162).
Esta observación es válida para las Particiones de Tipo III que se estudiarán a continuación.

3. PARTICIONES DE TIPO III

En este apartado se estudiarán los casos en los que el vértice singular (1) = 90º. Esto es, el primer triángulo isósceles es rectángulo con vértice singular en *C*.
Los nuevos vértices, puntos *D*, *E* y *F*, se elegirán en la hipotenusa *AB* y sobre el cateto *AC*.

3.1. Particiones de Tipo III (a)

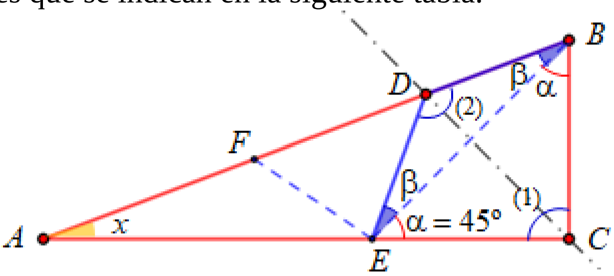
Comenzaré tomando dos puntos en la hipotenusa, *D* y *F*; el tercer punto, *E*, se toma sobre el cateto *AC*.
Así se forman los triángulos: *BCE*, *DBE*, *DEF* y *AFE*.



Pueden presentarse 27 casos, que se obtienen al ir variando la posición de los vértices singulares (2), (3) y (4), cada uno de ellos con tres opciones posibles. Sus referencias van desde T163 a T189.

- **Casos 163 a 171**

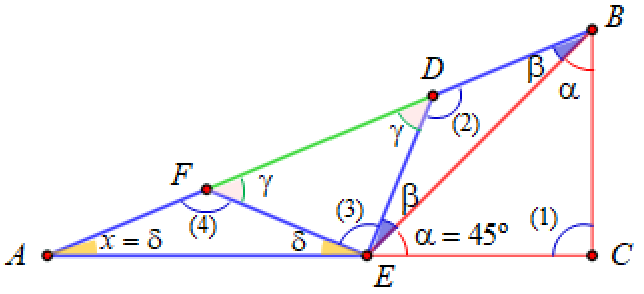
Con el vértice (2) en *D*, **BE*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está “forzado”).



Consideraciones para estos casos
En todas las posibles particiones debe cumplirse:
1. Como el ángulo *C* = (1) = 90º, entonces los ángulos α de *BCE* valen 45º.
2. Como consecuencia de lo anterior se deduce que: el ángulo *E* del triángulo *ABE* mide 135º; $x+\beta=45º$.
3. El punto *D* pertenece a la bisectriz del ángulo *C* (que coincide con la mediatriz de *BE*).

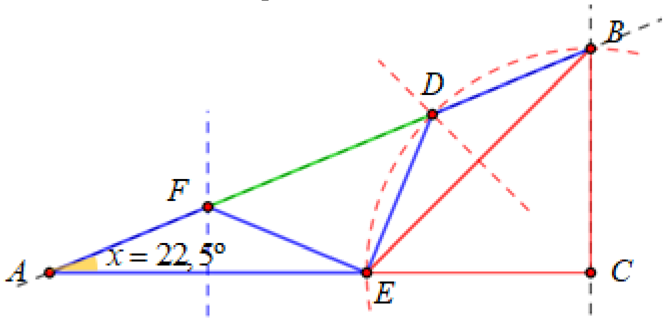
Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T163. Solución 37	*B*E*		**BE*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *C*; el (2) en *D*.
T164.	*B*E*		**BE*		*D*F*		**FE*	NO	
T165.	*B*E*		**BE*		*D*F*		*AF**	NO	
T166.	*B*E*		**BE*		**EF*		*A*E*	NO	T164, T165, T167, T168 se cumple que $\delta+\gamma=180º$, que no puede ser.
T167.	*B*E*		**BE*		**EF*		**FE*	NO	
T168.	*B*E*		**BE*		**EF*		*AF**	NO	
T169.	*B*E*		**BE*		*DE**		*A*E*	NO	En T166 y T169, *x* = 45º: absurdo.
T170. Solución 38	*B*E*		**BE*		*DE**		**FE*	Sí	
T171. Solución 39	*B*E*		**BE*		*DE**		*AF**	Sí	

Solución 37 (T163)
Este caso, con vértice singular (1) = 90º en *C* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en los puntos *E*, para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B**E* → **BE* → *D**F* → *A**E*).

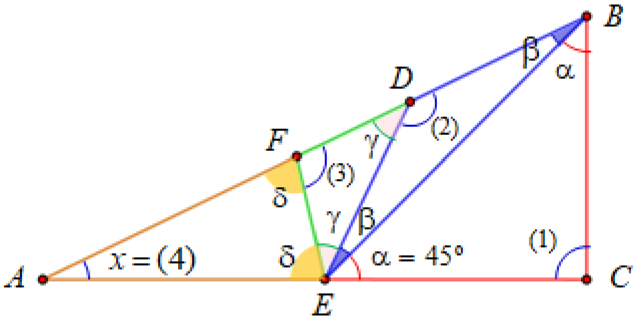


Con esto, debe cumplirse:
De manera evidente, α = 45º.
Exterior en *F*: $\gamma = 2x$; $x = \delta$.
En *DEF*: $(3) + 2\gamma = 180^o \Rightarrow (3) = 180^o - 4x$.
En *ABE*: como $E = 135^o \rightarrow 45^o = x + \beta \Rightarrow$
$\beta = 45^o - x$.
En *DBE*: $(2) + 2\beta = 180^o \Rightarrow (2) = 90^o + 2x$.
En *E*: $\delta + (3) + \beta + 45^o = 180^o \Rightarrow x + 180^o - 4x + 45^o - x + 45^o = 180^o \Rightarrow x = 22{,}5^o$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x = 18^o$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E*. Se obtiene *BCE*.
3) La mediatriz de *BE* (que coincide con la bisectriz de *C*), corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *DBE*.
4) La mediatriz de *AE* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.



Solución 38 (T170)
Este caso, con vértice singular (1) = 90º en *C* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en el punto *F*, para *DEF*, y en *A* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B**E* → **BE* → *DE** → **FE*).



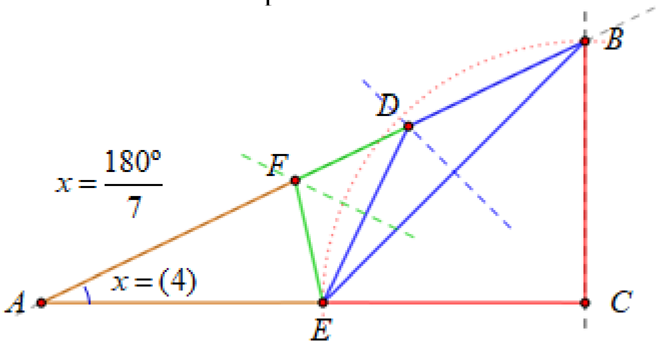
Con esto, debe cumplirse:
De manera evidente, α = 45º.
Exterior en *F*: $\delta = 2\gamma$.
En *AFE*: $x + 2\delta = 180^o \rightarrow x = 180^o - 2\delta$.
En *ABE*: como $E = 135^o \rightarrow 45^o = x + \beta \Rightarrow$
$\beta = 45^o - x \rightarrow \beta = 2\delta - 135^o$.
En *E*: $\delta + \gamma + \beta + 45^o = 180^o \Rightarrow$

$$\delta + \frac{\delta}{2} + 2\delta - 135^o + 45^o = 180^o \Rightarrow \delta = \frac{540^o}{7} \Rightarrow x = (4) = \frac{180^o}{7}$$

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para el ángulo $x = \dfrac{180^\circ}{7}$ se construye el triángulo *ABC*.

2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E*. Se obtiene *BCE*.
3) La mediatriz de *BE* (que coincide con la bisectriz de *C*), corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *DBE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *AFE*.

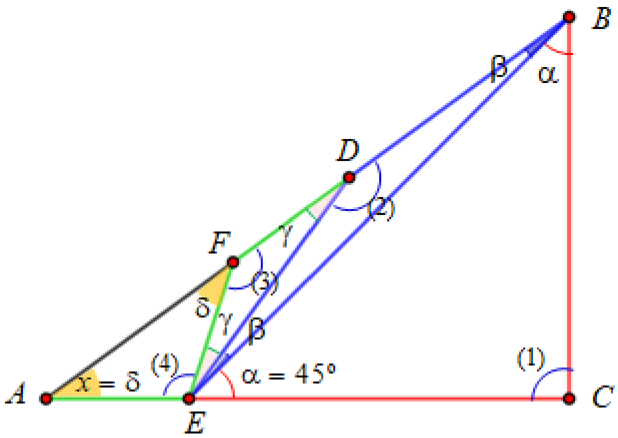


Solución 39 (T171)
Este caso, con vértice singular (1) = 90º en *C* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en el punto *F*, para *DEF*, y en *E* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*E* → **BE* → *DE** → *AF**).

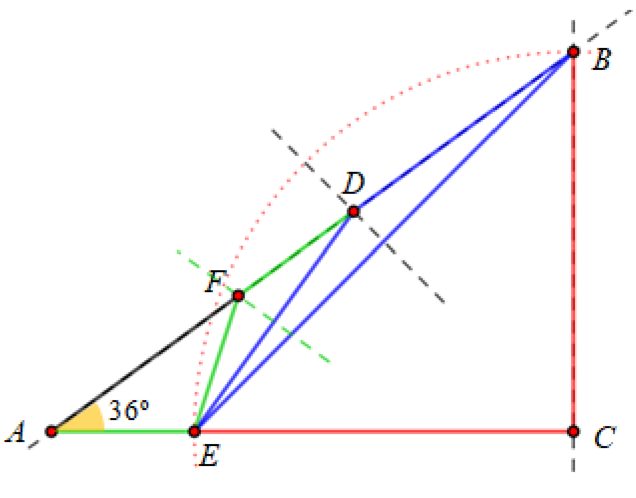
Con esto, debe cumplirse:
De manera evidente, α = 45º.
Exterior en *D*: $\gamma = 2\beta$.
Exterior en *F*: $\delta = 2\gamma$.
En *AFE*: $(4) + 2\delta = 180^\circ \rightarrow (4) = 180^\circ - 4\gamma$.
En *ABE*: $45^\circ = \delta + \beta \rightarrow \beta = 45^\circ - 2\gamma$.
En *E*: $(4) + \gamma + \beta + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$180^\circ - 4\gamma + \gamma + 45^\circ - 2\gamma + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\gamma = 18^\circ \Rightarrow x = \delta = 36^\circ$

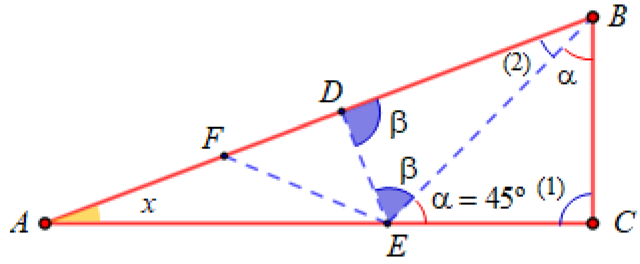


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x = 36^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E*. Se obtiene el triángulo *BCE*.
3) La mediatriz de *BE* (que coincide con la bisectriz de *C*), corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *DBE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen los triángulos *DEF* y *AFE*.



- **Casos 172 a 180**

Con el vértice (2) en *B*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla. (El dibujo adjunto está “forzado”).



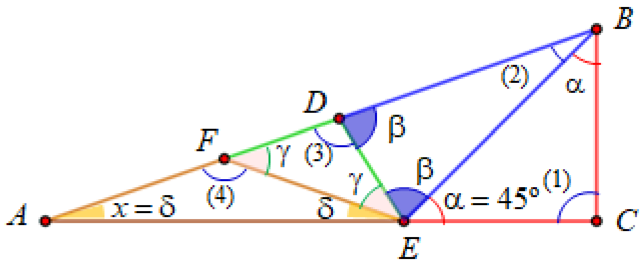
<u>Consideraciones para estos casos</u>
En todas las posibles particiones debe cumplirse:

1. Como $\alpha = 45º \to x + (2) = 45º$.
2. En el triángulo *DEF*, el ángulo singular (3) solo puede estar en *D*, pues en los otros dos casos se tendría que $\beta + \gamma = 180º$, que no puede ser.
3. De lo anterior se sigue que en el triángulo *AFE*, el ángulo singular (4) solo puede estar en *F*, pues en los otros dos casos se tendría que $\delta + \gamma = 180º$, que tampoco puede ser.

Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T172.	*B*E*		*D*E*		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *C*; el (2) en *B*. Solo tiene solución el caso T175.
T173.	*B*E*		*D*E*		*D*F*		**FE*	NO	
T174.	*B*E*		*D*E*		*D*F*		*AF**	NO	
T175. Solución 40	*B*E*		*D*E*		**EF*		*A*E*	Sí	
T176.	*B*E*		*D*E*		**EF*		**FE*	NO	
T177.	*B*E*		*D*E*		**EF*		*AF**	NO	
T178.	*B*E*		*D*E*		*DE**		*A*E*	NO	
T179.	*B*E*		*D*E*		*DE**		**FE*	NO	
T180.	*B*E*		*D*E*		*DE**		*AF**	NO	

Solución 40 (T175)

Este caso, con vértice singular (1) = 90º en *C* y (2) en *D*, que continúa con ángulos singulares en el punto *F*, para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*E* → *D*E* → **EF* → *A*E*).

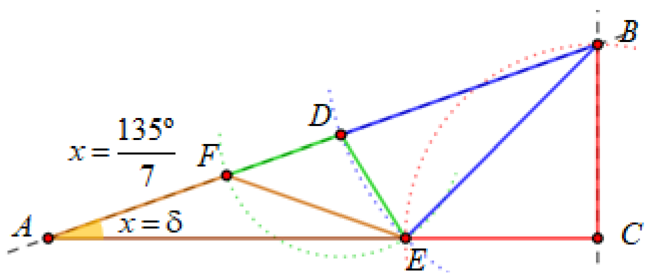


En este caso: $\alpha = 45º$; $x = \delta$;
$\delta + (2) = 45º \to (2) = 45º - \delta$.
Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
Exterior en *D*: $\beta = 2\gamma \to \beta = 4\delta$.
En *DBE*: $(2) + 2\beta = 180º \to$

$$45º - \delta + 8\delta = 180º \to x = \delta = \frac{135º}{7} \approx 19,29º.$$

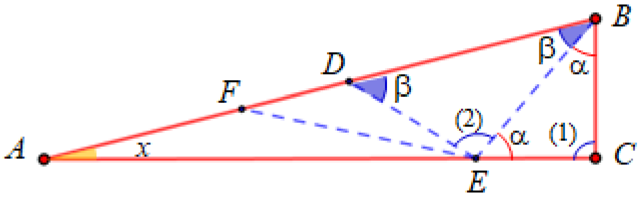
→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para el ángulo $x \approx 19,29º$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E* → Triángulo *BCE*.
3) Con centro en *B* y radio *BE* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D* → Triángulo *DBE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AB* en *F* → Triángulos *DBE* y *AFE*.



- **Casos 181 a 189**

Con el vértice (2) en *E*, *DB**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está “forzado”).



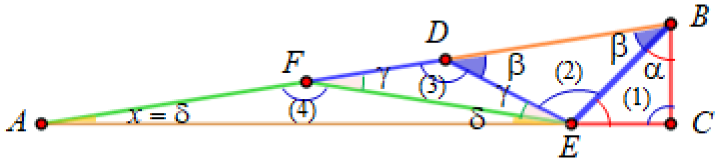
<u>Consideraciones para estos casos</u>
En todas las posibles particiones debe cumplirse:

1. Como $\alpha = 45^{\circ} \rightarrow x+\beta = 45^{\circ}$.
2. En el triángulo *DEF*, el ángulo singular (3) solo puede estar en *D*, pues en los otros dos casos se tendrías que $\beta+\gamma = 180^{\circ}$, que no puede ser.
3. De lo anterior se sigue que en el triángulo *AFE*, el ángulo singular (4) solo puede estar en *F*, pues en los otros dos casos se tendrías que $\delta+\gamma = 180^{\circ}$, que tampoco puede ser.

Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*AFE*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T181.	*B*E*		*DB**		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *C*; el (2) en *E*. Solo tiene solución el caso T184.
T182.	*B*E*		*DB**		*D*F*		**FE*	NO	
T183.	*B*E*		*DB**		*D*F*		*AF**	NO	
T184. Solución 41	*B*E*		*DB**		**EF*		*A*E*	Sí	
T185.	*B*E*		*DB**		**EF*		**FE*	NO	
T186.	*B*E*		*DB**		**EF*		*AF**	NO	
T187.	*B*E*		*DB**		*DE**		*A*E*	NO	
T188.	*B*E*		*DB**		*DE**		**FE*	NO	
T189.	*B*E*		*DB**		*DE**		*AF**	NO	

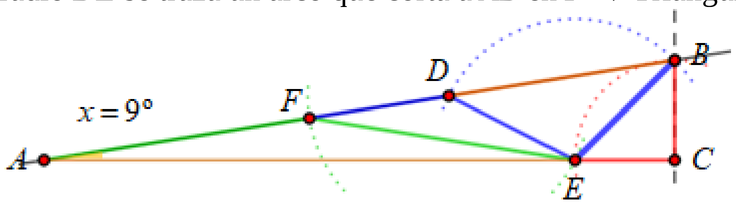
Solución 41 (T184)

Este caso, con vértice singular (1) = 90º en *C* y (2) en *E*, que continúa con ángulos singulares en el punto *D*, para *DEF*, y en *F* para *AFE*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *B*E* → *DB** → **EF* → *A*E*).



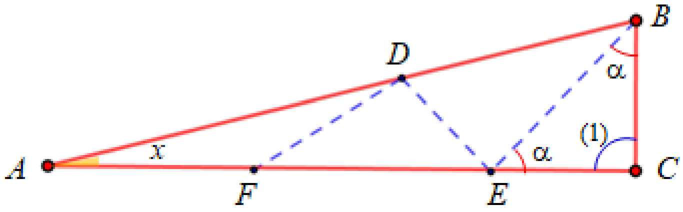
En este caso: $\alpha = 45^{\circ}$; $x = \delta$;
$\delta+\beta = 45^{\circ} \rightarrow \beta = 45^{\circ}-\delta$.
Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
Exterior en *D*: $\beta = 2\gamma \rightarrow \beta = 4\delta$.
En *DBE*: $(2)+2\beta = 180^{\circ} \rightarrow (2) = 180^{\circ}-2\beta \rightarrow (2) = 90^{\circ}+2\delta$.
En *E*: $\delta+\gamma+(2) = 135^{\circ} \rightarrow \delta+2\delta+90^{\circ}+2\delta = 135^{\circ}$ $x = \delta = 9^{\circ}$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Para el ángulo $x = 9^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en *E* → Triángulo *BCE*.
3) Con centro en *E* y radio *EB* se traza un arco que corta al lado *AB* en *D* → Triángulo *DBE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta a *AB* en *F* → Triángulos *DBE* y *AFE*.



3.2. Particiones de Tipo III (b)

En estos casos se imponen las siguientes condiciones:
1) El vértice singular (1) = 90º: el primer triángulo isósceles es rectángulo con vértice singular en *C*.
2) El punto *D* está en la hipotenusa; los puntos *E* y *F* sobre el cateto *AC*.
Por tanto, se forman los triángulos *BCE*, *DBE*, *DEF* y *ADF*.

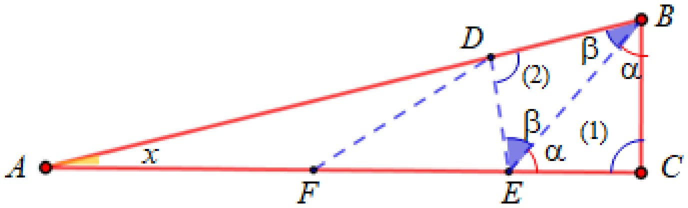


Pueden presentarse 27 casos, que se obtienen al ir variando la posición de los vértices singulares (2), (3) y (4), cada uno de ellos con tres opciones posibles. Sus referencias van desde T190 a T216.

- **Casos 190 a 198**

Con el vértice (2) en *D*, **BE*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla. (El dibujo adjunto está "forzado").

<u>Consideraciones para estos casos</u>
1. El punto *D* pertenece a la mediatriz de *BE*, que coincide con la bisectriz de *C*.
2. Como α = 45º → el ángulo *E* del triángulo *ABE* mide 135º; y $x+\beta=45^{\circ}$.

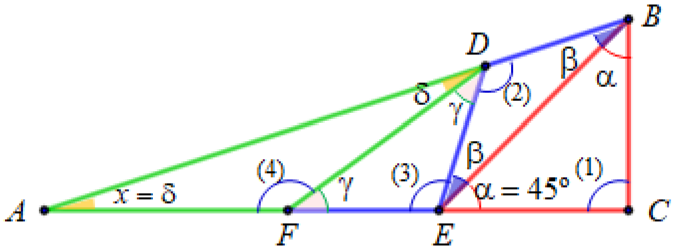


Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*ADF*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T190.	*B*E*		**BE*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos, el vértice
T191.	*B*E*		**BE*		*D*F*		**DF*	NO	singular (1) está en *C*; el (2)
T192. Solución 42	*B*E*		**BE*		*D*F*		*AD**	Sí	en *D*.
T193.	*B*E*		**BE*		**EF*		*A*F*	NO	En T190, T191, T193 y
T194.	*B*E*		**BE*		**EF*		**DF*	NO	T194 → $\delta+\gamma=180^{\circ}$, que
T195.	*B*E*		**BE*		**EF*		*AD**	NO	no puede ser.
T196.	*B*E*		**BE*		*DE**		*A*F*	NO	En T195, T196, T197 y
T197.	*B*E*		**BE*		*DE**		**DF*	NO	T198 se obtiene valores de *x*
T198.	*B*E*		**BE*		*DE**		*AD**	NO	absurdos: *x* = 90º; $\delta>90^{\circ}$.

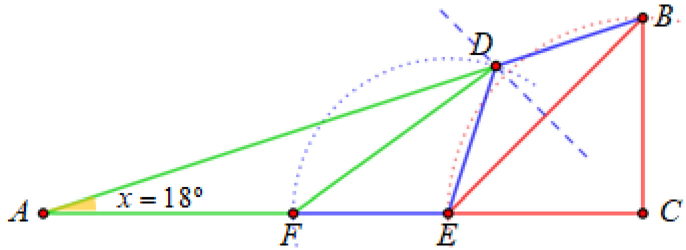
Solución 42 (T192)

Con vértice singular (1) = 90º en *C*, se puede obtener la partición que se indica en la siguiente figura, haciendo el triángulo *DEB* isósceles en *D*, continuando con ángulo singular (3) en el punto *E*, para el triángulo *DEF*, y en *F* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*E* → **BE* → *D*F* → *AD**).

Con esto, debe cumplirse:
En *E*: $(3)+\beta+45^{\circ}=180^{\circ}\ \Rightarrow (3)+\beta=135^{\circ}$.
Exterior en *F*: $\gamma=2x$.
En *DEB*: $(3)+2\gamma=180^{\circ}\ \Rightarrow\ (3)=180^{\circ}-4x$.
En *ABE*: $45^{\circ}=x+\beta\ \Rightarrow\ \beta=45^{\circ}-x$.
En *DBE*: $(2)+2\beta=180^{\circ}\ \Rightarrow\ (2)=90^{\circ}+2x$.
En *D*: $x+\gamma+(2)=180^{\circ}\ \Rightarrow\ x+2x+90^{\circ}+2x=180^{\circ}\ \Rightarrow\ x=18^{\circ}$.

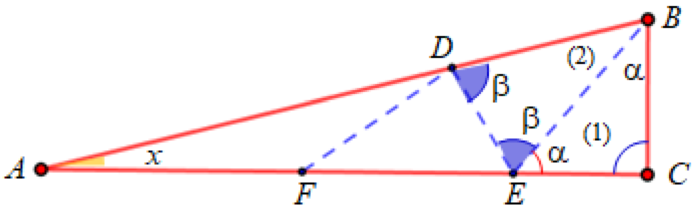


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con ángulo $x = 18º$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Se traza la mediatriz de *EB*, que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BDE*.
3) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



- **Casos 199 a 207**

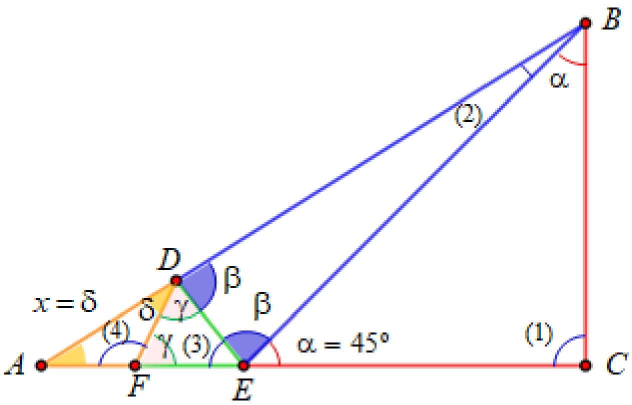
Con el vértice (2) en *B*, *D*E*, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").



Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*ADF*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T199.	*B*E*		*D*E*		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *C*; el (2) en *B*. Solo tienen solución lo casos T201 y T204.- En los demás casos se obtiene ángulos imposibles.
T200.	*B*E*		*D*E*		*D*F*		**DF*	NO	
T201. Solución 43	*B*E*		*D*E*		*D*F*		*AD**	Sí	
T202.	*B*E*		*D*E*		**EF*		*A*F*	NO	
T203.	*B*E*		*D*E*		**EF*		**DF*	NO	
T204. Solución 44	*B*E*		*D*E*		**EF*		*AD**	Sí	
T205.	*B*E*		*D*E*		*DE**		*A*F*	NO	
T206.	*B*E*		*D*E*		*DE**		**DF*	NO	
T207.	*B*E*		*D*E*		*DE**		*AD**	NO	

Solución 43 (T201)

Con vértice singular (1) = 90º en *C*, se puede obtener la partición que se indica en la siguiente figura, haciendo el triángulo *DEB* isósceles en *D*, continuando con ángulo singular (3) en el punto *E*, para el triángulo *DEF*, y en *F* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*E* → *D*E* → *D*F* → *AD**).

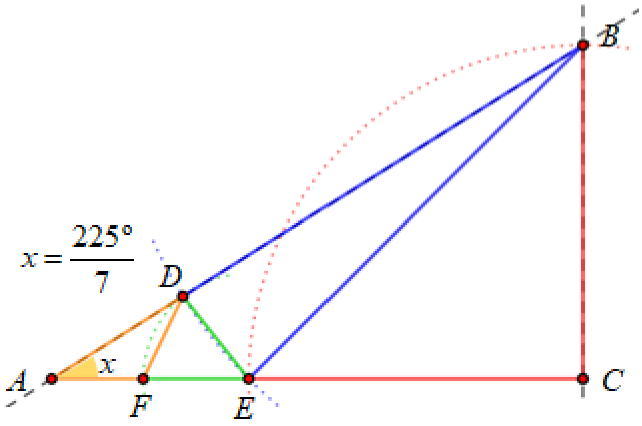


Con esto, debe cumplirse:
Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
En *ABE*: $\delta + (2) = 45º$.
En *DBE*: $(2) + 2\beta = 180º \Rightarrow 2\beta = 135º + \delta \rightarrow$

$$\beta = 67{,}5º + \frac{\delta}{2} .$$

En *D*: $\delta + \gamma + \beta = 180º \Rightarrow \delta + 2\delta + 67{,}5º + \frac{\delta}{2} = 180º \Rightarrow \delta = \frac{225º}{7} \approx 32{,}14º$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con ángulo $x = 32{,}14^{\text{o}}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *BCE*.
3) Con centro en *B* y radio *BE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *DBE*.
4) Con centro en *E* y radio *ED* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



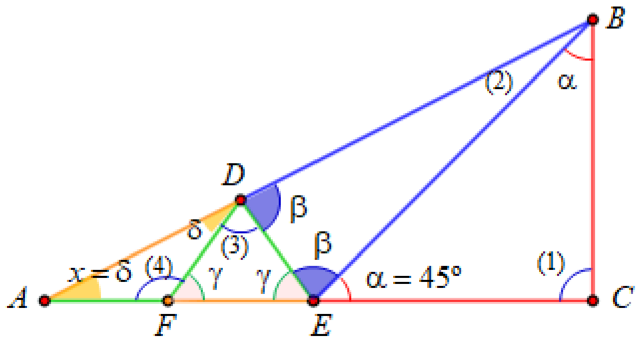
Solución 44 (T204)
Con vértice singular (1) = 90º en *C*, se puede obtener la partición que se indica en la siguiente figura, haciendo el triángulo *DEB* isósceles en *D*, continuando con ángulo singular (3) en el punto *E*, para el triángulo *DEF*, y en *F* para el triángulo *AFE*.
(Variación: *B*E* → *D*E* → **EF* → *AD**).

Con esto, debe cumplirse:
En *ABE*: $\delta + (2) = 45^{\text{o}}$.
En *DBE*: $(2) + 2\beta = 180^{\text{o}} \Rightarrow 2\beta = 135^{\text{o}} + \delta \rightarrow$

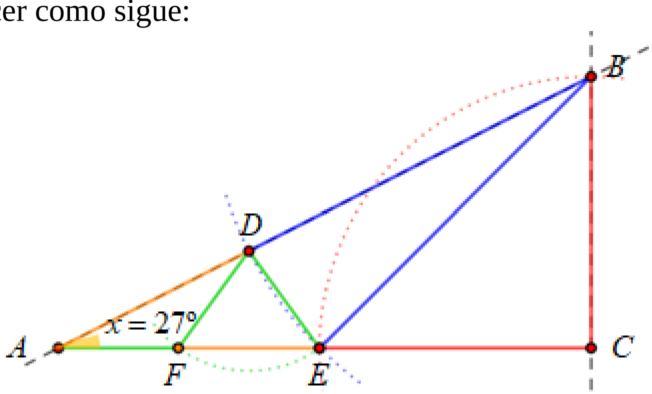
$$\beta = 67{,}5^{\text{o}} + \frac{\delta}{2} \ .$$

Exterior en *F*: $\gamma = 2\delta$.
En *E*: $\gamma + \beta = 135^{\text{o}} \Rightarrow$

$$2\delta + 67{,}5^{\text{o}} + \frac{\delta}{2} = 135^{\text{o}} \Rightarrow \delta = 27^{\text{o}} .$$

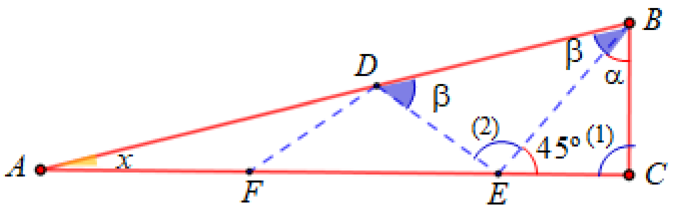


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con ángulo $x = \delta = 27^{\text{o}}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *BCE*.
3) Con centro en *B* y radio *BE* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *DBE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



- **Casos 208 a 216**

Con el vértice (2) en *E*, *DB**, se tienen las 9 opciones que se indican en la siguiente tabla.
(El dibujo adjunto está "forzado").

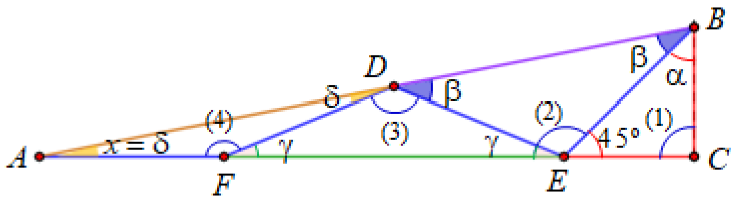


Triángulos	*BCE*		*DBE*		*DEF*		*ADF*	*D* y *F* en la hipotenusa; *E* en *AC*	
T208.	*B*E*		*DB**		*D*F*		*A*F*	NO	En estos 9 casos, el vértice singular (1) está en *C*; el (2) en *E*. En T208, T209, T211 y T212 $\rightarrow\ \delta+\gamma=180^{\circ}$, que no puede ser. En T210, T215 y T216 se obtiene ángulos imposibles.
T209.	*B*E*		*DB**		*D*F*		**DF*	NO	
T210.	*B*E*		*DB**		*D*F*		*AD**	NO	
T211.	*B*E*		*DB**		**EF*		*A*F*	NO	
T212.	*B*E*		*DB**		**EF*		**DF*	NO	
T213. Solución 45	*B*E*		*DB**		**EF*		*AD**	Sí	
T214. Solución 46	*B*E*		*DB**		*DE**		*A*F*	Sí	
T215.	*B*E*		*DB**		*DE**		**DF*	NO	
T216.	*B*E*		*DB**		*DE**		*AD**	NO	

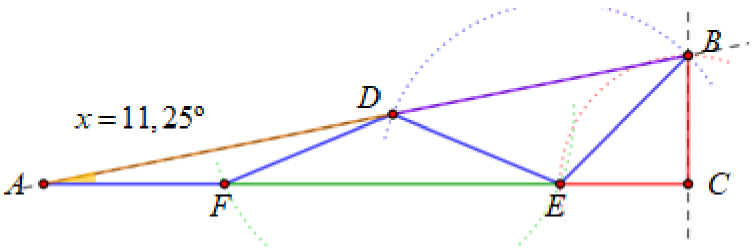
Solución 45 (T213)

Con vértice singular (1) = 90º en *C*, se puede obtener la partición que se indica en la siguiente figura, haciendo el triángulo *DEB* isósceles en *E*, continuando con ángulo singular (3) en el punto *D*, para el triángulo *DEF*, y en *F* para el triángulo *ADF*.
(Variación: *B*E* $\rightarrow$ *DB** $\rightarrow$ **EF* $\rightarrow$ *AD**).

Con esto, debe cumplirse:
En *ABE*: $\delta+\beta=45^{\circ}$.
En *D*: $(3)+\delta+\beta=180^{\circ}\ \rightarrow\ (3)=135^{\circ}$.
En *DEB*: $(3)+2\gamma=180^{\circ}\ \rightarrow\ \gamma=22{,}5^{\circ}$.
Exterior en *F*:
$\gamma=2\delta\ \rightarrow\ x=\delta=11{,}25^{\circ}$.

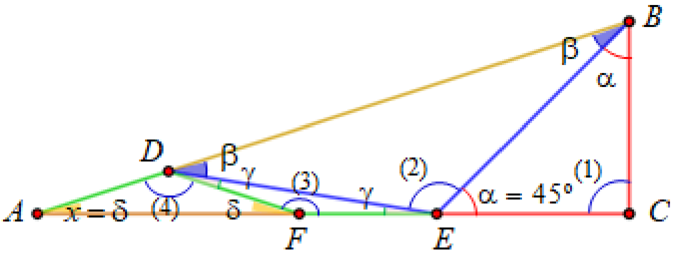


$\rightarrow$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con ángulo $x=11{,}25^{\circ}$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* $\rightarrow$ triángulo *BCE*.
3) Con centro en *E* y radio *EB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* $\rightarrow$ triángulo *DBE*.
4) Con centro en *D* y radio *DE* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



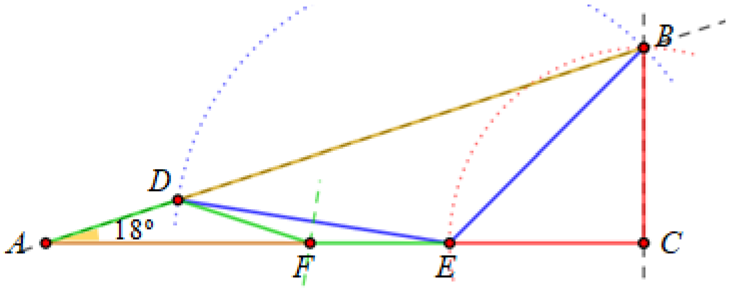
Solución 46 (T214)

Con vértice singular (1) = 90º en *C*, se puede obtener la partición que se indica en la siguiente figura, haciendo el triángulo *DEB* isósceles en *E*, continuando con ángulo singular (3) en el punto *F*, para el triángulo *DEF*, y en *D* para el triángulo *ADF*.
(Variación: *B*E* → *DB** → *DE** → *A*F*).



Con esto, debe cumplirse:
En *ABE*: $\delta+\beta=45^\circ$.
En *E*: $(2)+\gamma=135^\circ \;\rightarrow\; (2)=135^\circ-\gamma$.
En *DBE*: $(2)+2\beta=180^\circ \;\rightarrow\; 2\beta=45^\circ+\gamma$.
Exterior en *F*: $\delta=2\gamma$.
En *ADF*:
$(4)+2\delta=180^\circ \;\rightarrow\; (4)=180^\circ-4\gamma$.
En *D*: $(4)+\gamma+\beta=180^\circ \;\rightarrow\; 180^\circ-4\gamma+\gamma+\dfrac{45^\circ}{2}+\dfrac{\gamma}{2}=180^\circ \;\rightarrow\; \gamma=9^\circ \;\Rightarrow\; x=\delta=18^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Con ángulo $x=18^\circ$ se construye el triángulo *ABC*.
2) Con centro en *C* y radio *CB* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *BCE*.
3) Con centro en *E* y radio *EB* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D* → triángulo *DBE*.
4) La mediatriz de *DE* corta al lado *AC* en el punto *F*. Se obtienen así los triángulos *DEF* y *ADF*.



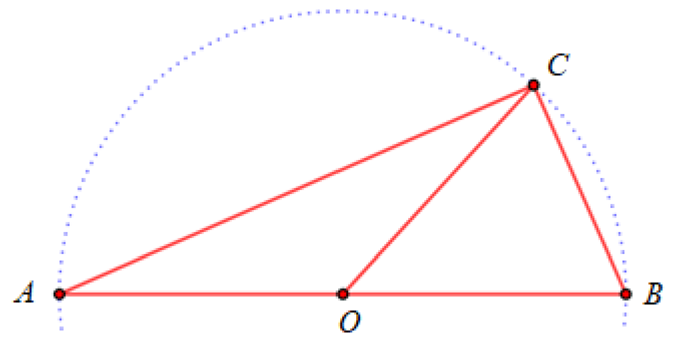
4. PARTICIONES DE TIPO IV

A continuación se estudian las posibles soluciones de partición de un triángulo rectángulo *ABC* en cuatro triángulos isósceles cuando los puntos *D*, *E* y *F* se toman cada uno en un lado del triángulo.

Un caso general (teniendo en cuenta la circunferencia circunscrita)

- Como se sabe, la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo tiene como diámetro la hipotenusa de ese triángulo, siendo el centro *O* de esa circunferencia el punto medio de la hipotenusa.

Por tanto, los segmentos *OA*, *OB* y *OC* miden lo mismo: son tres radios de la circunferencia. Esto implica que los triángulos *ACO* y *OCB* son isósceles.



Esto significa que cualquier triángulo rectángulo puede descomponerse en dos isósceles.

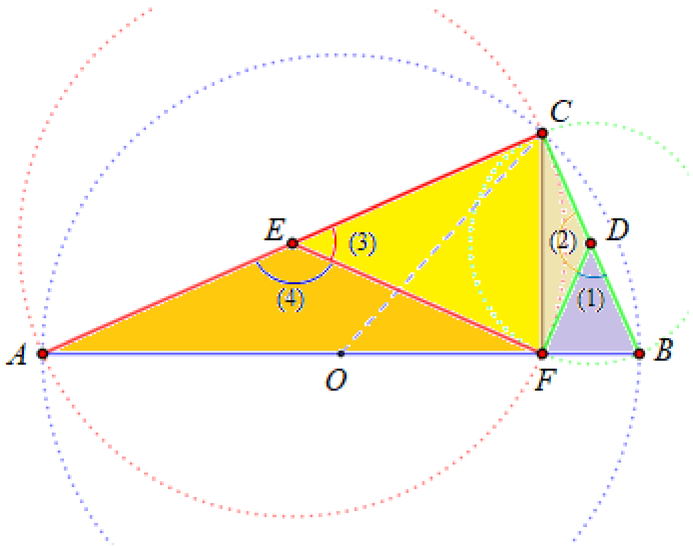
- Si desde el vértice rectángulo *C* se traza la perpendicular a la hipotenusa, el triángulo *ACB* queda partido en dos nuevos triángulos rectángulos, *ACF* y *CBF*.

Aplicando el resultado anterior a cada uno de esos triángulos, cuyas circunferencias circunscritas tienen centro en *E* y *D*, respetivamente, entonces:

1) El triángulo *ACF* se parte en dos triángulos isósceles, *AEF* y *ECF*;

2) Lo mismo sucede con *CDF*, que se parte en otros dos triángulos isósceles, *CDF* y *FDB*.

Por consiguiente, el triángulo rectángulo inicial queda dividido en cuatro triángulos isósceles.

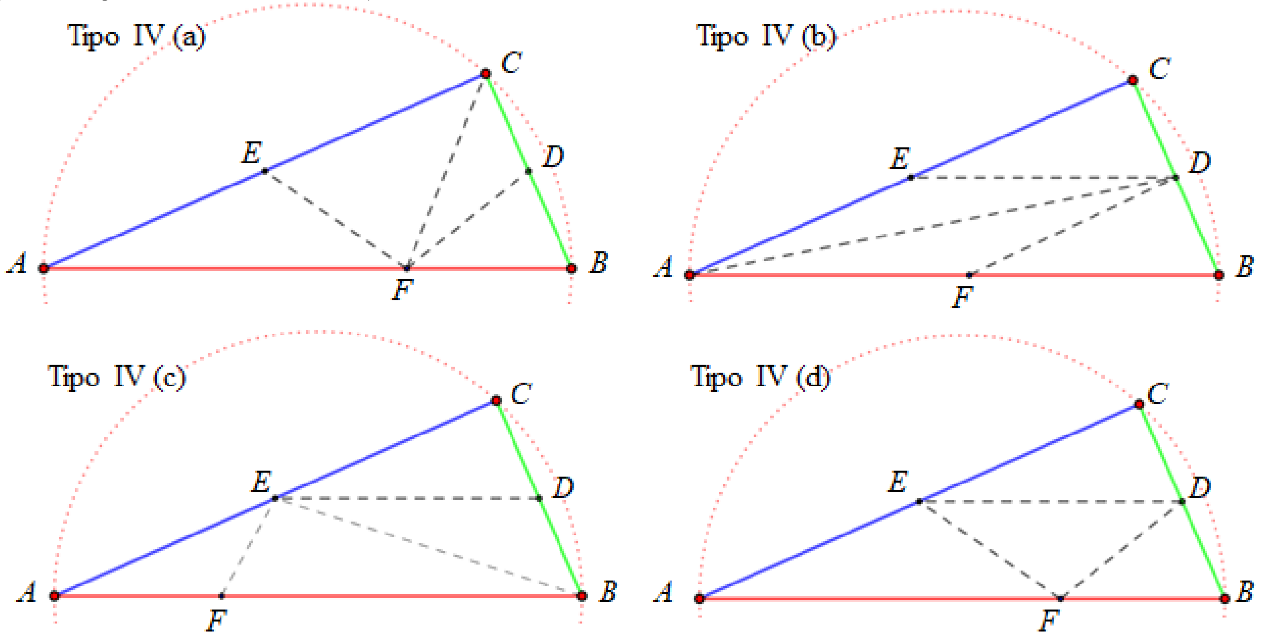


→ Obsérvese que los nuevos vértices, *D*, *E* y *F*, están cada uno en un lado del triángulo dado, pero cumpliendo estrictas condiciones, pues *F* es el pie de la altura del triángulo *ACB* desde *C*, y *E* y *D* son los puntos medios de los catetos.

→ Suponiendo siempre que el ángulo más pequeño está en *A* $\left(A < 45^{\circ}\right)$, los ángulos singulares de los distintos triángulos se sitúan dos en el punto *E* [(4) y (3)], y otros dos en el punto *D* [(2) y (1)]. En el caso concreto de $A = 30^{\circ}$ se cumple que los triángulos *ECF* y *FDB* son equiláteros, luego los ángulos (3) y (1) podrían situarse en cualquier vértice de su triángulo. (Si $A > 45^{\circ}$ la situación es simétrica a la considerada: *A* y *B* se intercambian).

Pero ¿habría soluciones cuando los puntos *D*, *E*, *F* se moviesen de las posiciones descritas? Por ejemplo, en el supuesto de que *F* no fuese el pie de la altura desde *C*.

Nuevamente pueden plantearse multitud de casos, que gráficamente pueden clasificarse como sigue (los dibujos están mal hechos).



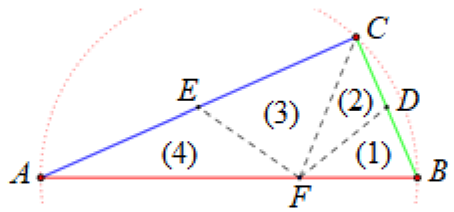
<u>Obsérvese</u> que en las particiones de los Tipos IV (b), (c) y (d) el ángulo singular (2), del triángulo *CDE*, necesariamente debe estar en *C*. Por otra parte, los Tipos IV (b) y (c) son “simétricos”.

<u>4.1. Particiones de Tipo IV (a)</u>

Se forman los triángulos *AEF*, *ECF*, *CDF* y *FDB*, con vértices singulares (4), (3), (2) y (1).

El total de variaciones que pueden considerarse vuelve a ser 81, el resultado de multiplicar 3 × 3 × 3 × 3: cada vértice singular puede situarse en 3 puntos distintos.

El estudio de las posibles soluciones puede hacerse a partir de las consideraciones que siguen:



1.ª ¿Podría situarse el vértice (4) en el punto *A*?

Si así fuera, y suponiendo que $A = (4) < 45^o$, se deduce:

– El vértice (3) debe estar en *E*, pues δ < 90º. (En un triángulo isósceles los ángulos iguales son siempre agudos).

– Por tanto, en *D* debe situarse alguno de los ángulos singulares (1) o (2).

- Si el ángulo (1) está en *D* y (2) en *C*, entonces:

Exterior en *D*: $\beta = 2\alpha$.

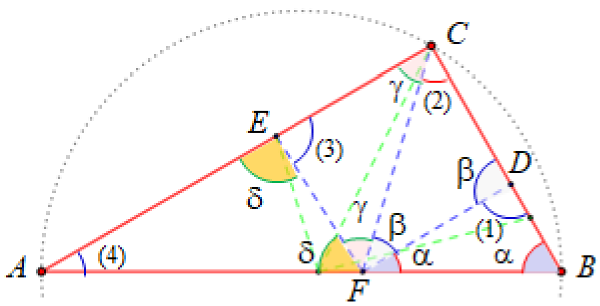
En *CDF*: $(2) + 2\beta = 180^o \to (2) + 4\alpha = 180^o$.

En *C*: $\gamma + (2) = 90^o \to \gamma = 4\alpha - 90^o$.

Exterior en *E*: $\delta = 2\gamma \to \delta = 8\alpha - 180^o$.

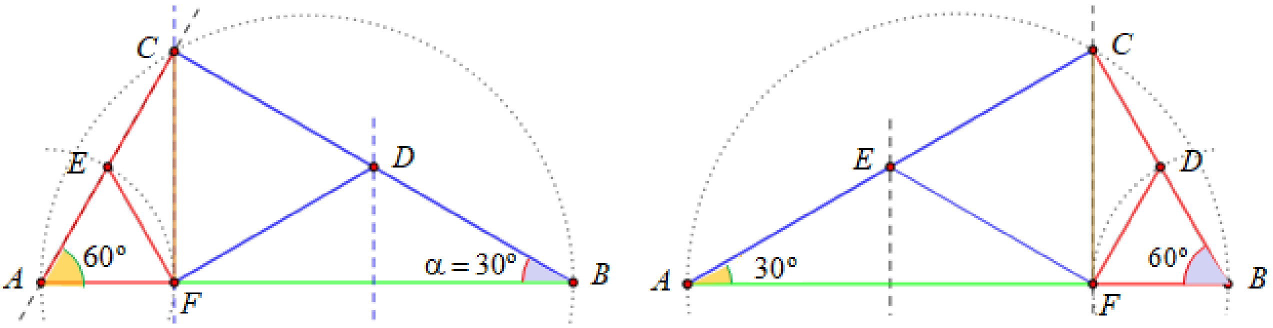
En *F*: $\delta + \gamma + \beta + \alpha = 180^o \Rightarrow$

$8\alpha - 180^o + 4\alpha - 90^o + 2\alpha + \alpha = 180^o \Rightarrow \alpha = 30^o$.



Pero esto implica que β = 60º y que *CF* es perpendicular a la hipotenusa; además, el triángulo *CDF* será equilátero. También se obtiene que (4) = 60º, que contradice la hipótesis inicial de (4) < 45º. <u>Por lo tanto, en estas condiciones (4) no puede estar en *A*.</u>

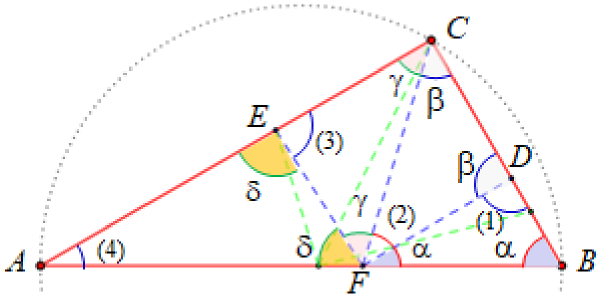
Nota: La solución encontrada es un caso particular de la dada inicialmente, pues si $A = (4) = 60^o$, la partición es simétrica a la que se obtiene si $A = 30^o$, como puede observarse en la figura que sigue.



- Si para *FDB* el ángulo (1) está en *D* y (2) está en *F*, entonces:

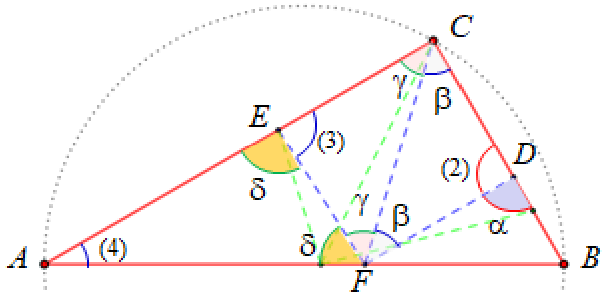
Exterior en *D*: $\beta = 2\alpha$.
En *CDF*: $(2) + 2\beta = 180^o \rightarrow (2) = 180^o - 4\alpha$.
En *C*: $\gamma + \beta = 90^o \rightarrow \gamma = 90^o - 2\alpha$.
Exterior en *E*: $\delta = 2\gamma \rightarrow \delta = 180^o - 4\alpha$.
En *F*: $\delta + \gamma + (2) + \alpha = 180^o \Rightarrow$

$180^o - 4\alpha + 90^o - 2\alpha + 180^o - 4\alpha + \alpha = 180^o \Rightarrow$
$\alpha = 30^o$.



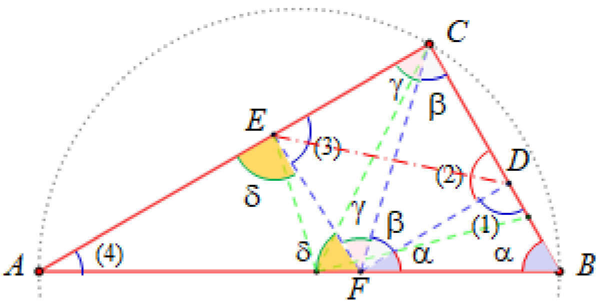
Pero esto implica que β = 60º = (2) y que *CF* es perpendicular a la hipotenusa *AB*. Se trataría del caso particular anterior: $A = 60^o$, cuya solución es simétrica a la que se obtiene si $A = (4) = 30^o$.
Por lo tanto, en estas condiciones, (4) no puede estar en *A*.

- Si el ángulo (1) estuviese en otro vértice, *B* o *F*, entonces, para *CDF* el ángulo (2) estará en *D*. Por tanto, $\beta + \gamma = 90^o$; luego, en el cuadrilátero *ECDF* se cumple (2) + (3) = 180º, que no es posible, pues (2) y (3) tienen que ser mayores de 90º. (Si (2) ≤ 90 → α ≥ 90º; si (3) ≤ 90 → δ ≥ 90º: ambas cosas son imposibles).
Por consiguiente, tampoco puede darse este caso.



- Si los ángulos (1) y (2) están ambos en *D*, entonces:

En *CBF*: $2\alpha + 2\beta = 180^o \rightarrow \alpha + \beta = 90^o$.
Luego, *CF* es perpendicular a *AB*.
Como *E* y *D* pertenecen a la mediatriz de *CF* (por estar (3) en *E* y (2) en *D*), entonces ambos puntos coinciden con el centro de los catetos.
Por consiguiente, *AE* = *EC* = *EF*, lo que obliga a que el ángulo (4) esté en *E*; situación que solo es compatible con la hipótesis de partida si *AEF* es equilátero: $A = 60^o$.



Por lo tanto, en ningún caso el ángulo singular (4) puede estar en *A*.

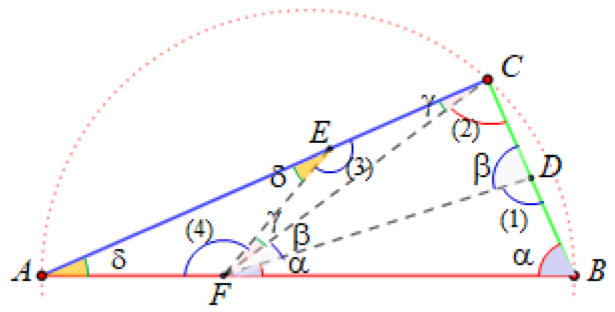
2.ª ¿Podría situarse el vértice (4) en el punto *F*?

Si así fuera, y suponiendo que $A = \delta < 45^{o}$, se deduce:
– El vértice (3) debe estar en *E*, pues δ < 90º.
– Por tanto, en *D* hay que situar alguno de los ángulos singulares (1) o (2).

- Si el ángulo (1) está en *D* y (2) en *C*, entonces:

Exterior en *D*: $\beta = 2\alpha$.
En *ABC*: $\alpha + \delta = 90^{o} \rightarrow \delta = 90^{o} - \alpha$.
En *AEF*: $(4) = 180^{o} - 2\delta \rightarrow (4) = 2\alpha$.
Exterior en *E*: $\delta = 2\gamma \rightarrow \gamma = 45^{o} - \dfrac{\alpha}{2}$.
En *F*: $(4) + \gamma + \beta + \alpha = 180^{o} \Rightarrow$

$$2\alpha + 45^{o} - \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + \alpha = 180^{o} \Rightarrow \alpha = 30^{o}.$$



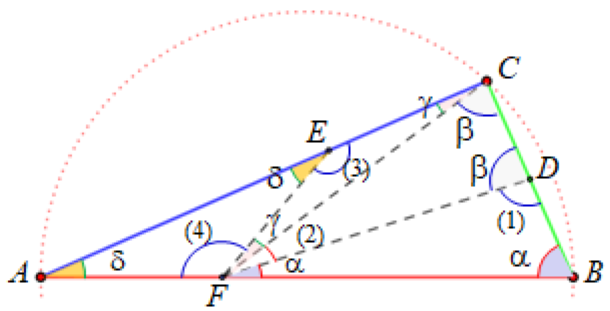
Pero esto implica que $\delta = 60^{o} > 45^{o}$, que contradice la hipótesis inicial. (Sin restricciones, la solución es la ya indicada para $A = 60^{o}$).
<u>Por lo tanto, en estas condiciones el vértice singular (4) no puede estar en *F*.</u>

- Si para *FDB* el ángulo (1) está en *D* y (2) en *F*, entonces:

Exterior en *D*: $\beta = 2\alpha$.
En *CDF*: $(2) + 2\beta = 180^{o} \rightarrow (2) = 180^{o} - 4\alpha$.
En *C*: $\gamma + \beta = 90^{o} \rightarrow \gamma = 90^{o} - 2\alpha$.
Exterior en *E*: $\delta = 2\gamma \rightarrow \delta = 180^{o} - 4\alpha$.
En *AEF*: $(4) + 2\delta = 180^{o} \rightarrow (4) = 8\alpha - 180^{o}$.
En *F*: $(4) + \gamma + (2) + \alpha = 180^{o} \Rightarrow$

$$8\alpha - 180^{o} + 90^{o} - 2\alpha + 180^{o} - 4\alpha + \alpha = 180^{o} \Rightarrow$$

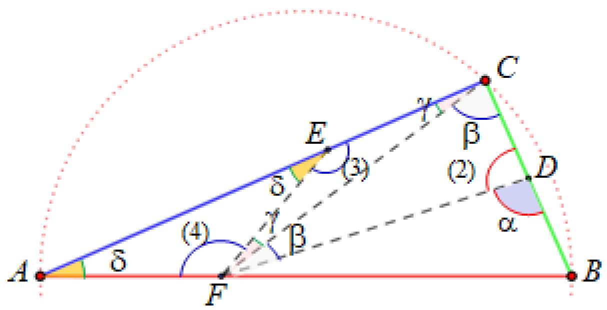
α = 30º.



Pero esto implica que $A = \delta = 60^{o}$, que contradice la hipótesis inicial de $A < 45^{o}$. (Sin restricciones, la solución es la ya indicada para $A = 60^{o}$).
<u>Por lo tanto, en estas condiciones, (4) no puede estar en *F*.</u>

- Si el ángulo (1) estuviese en otro vértice, *B* o *F*, entonces, el ángulo (2) del triángulo *CDF* estará en *D*.

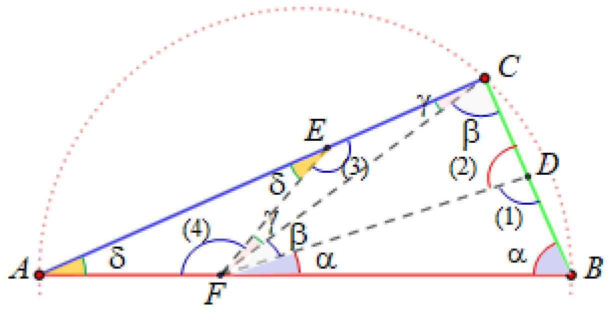
Por tanto, $\beta + \gamma = 90^{o}$; luego, en el cuadrilátero *ECDF* se cumple (2) + (3) = 180º, que no es posible, pues (2) y (3) tienen que ser mayores de 90º. (Si (2) ≤ 90 → α ≥ 90º; si (3) ≤ 90 → δ ≥ 90º: ambas cosas son imposibles).



Por consiguiente, tampoco puede darse este caso: <u>(4) no puede estar en *F*.</u>

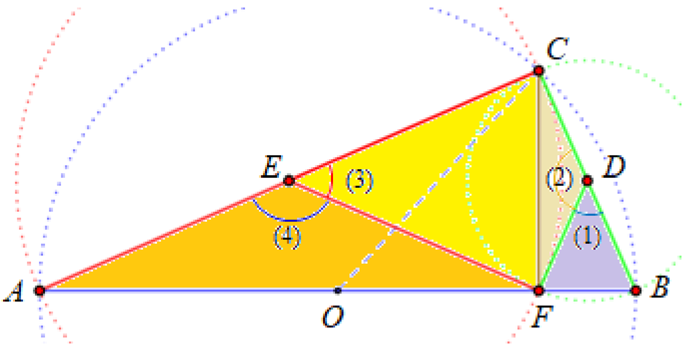
- Si los ángulos (1) y (2) están ambos en *D*, entonces:

En *CBF*: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.
Luego, *CF* es perpendicular a *AB*.
Como *E* y *D* pertenecen a la mediatriz de *CF* (por estar (3) en *E* y (2) en *D*), entonces ambos puntos coinciden con el centro de los catetos.
Por consiguiente, *AE* = *EC* = *EF*, lo que obliga a que el ángulo (4) esté en *E*; situación que solo es compatible con la hipótesis de partida si $A = 60^\circ$.



Por lo tanto, en ningún caso el ángulo singular (4) puede estar en *F*.

Por consiguiente, el ángulo singular (4) del triángulo *AEF* solo puede situarse en el punto *E*.
Así, la partición del triángulo *ABC* en cuatro triángulos isósceles puede hacerse siempre, tal y como se vio al principio de este apartado.



Cuando $A = 30^\circ$, los triángulos *ECF* y *FDB* resultan equiláteros.
Cuando $A = 45^\circ$, todos los triángulos pequeños también son rectángulos.

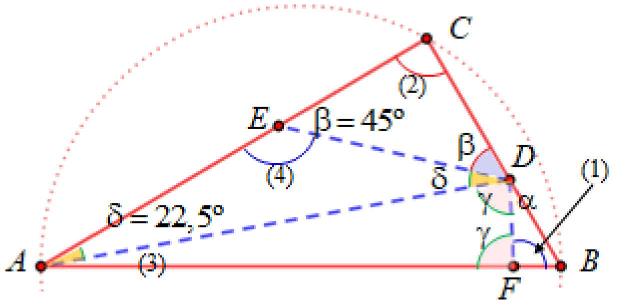
4.2. Particiones de Tipo IV (b)

Se forman los triángulos *AED*, *ADF*, *CDE* y *DBF*, con vértices singulares (4), (3), (2) y (1). respectivamente.

Como $C = 90^{\circ}$, entonces, en ese punto debe situarse el ángulo (2), deduciéndose, entre otras cosas, que:

– En *CDE*, $\beta = 45^{\circ}$ → (4) debe estar en *E* y vale 135º.

– En *AED*, $\delta = 22{,}5^{\circ}$; $ADB = 112{,}5^{\circ}$.



Esto reduce notablemente los casos posibles, pues solo hay que considerar la posición de los vértices (3) y (1).

→ **Si (3) está en *A*** → (1) solo puede estar en *F*.
(Recuérdese que ninguno de los ángulos iguales puede ser mayor o igual que 90º). Luego:
Exterior en *F*: $\gamma = 2\alpha$.

Como $\gamma + \alpha = 112{,}5^{\circ} \Rightarrow \alpha = 37{,}5^{\circ} \Rightarrow A = 52{,}5^{\circ}$.
La designo como **Solución 47**.

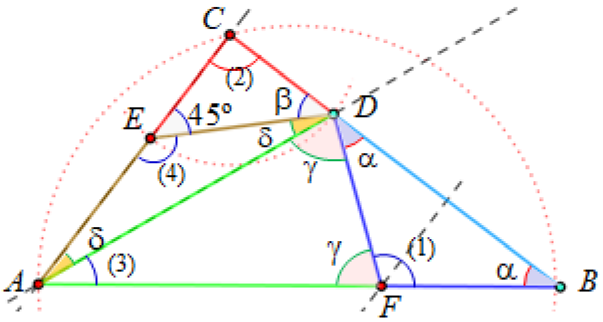
Para <u>construir</u> esta partición (la adjunta):

1) Con $A = 52{,}5^{\circ}$ se dibuja *ACB*.

2) Se deduce que (3) = 52,5º – 22,5º = 30º y se mide dicho ángulo a partir de *AB*. Así se obtiene el punto *D*.

3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta a *AC* en *E*. Se obtienen *AED* y *CDE*.

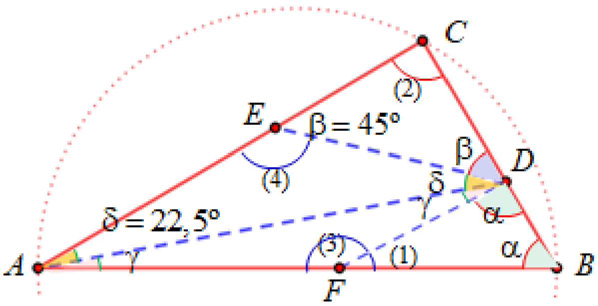
4) La mediatriz de *DB* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen *ADF* y *DBF*.



→ **Si (3) está en *F*** → (1) podría situarse en cualquiera de los puntos *F*, *B* o *D*.

a) Si los ángulos (3) y (1) están en *F*, se cumplirá:
En *ADB*, $2\gamma + 2\alpha = 180^{\circ} \rightarrow \gamma + \alpha = 90^{\circ}$.

Como $ADB = \gamma + \alpha = 112{,}5^{\circ}$, se obtiene una contradicción.
<u>Este caso no puede darse.</u>

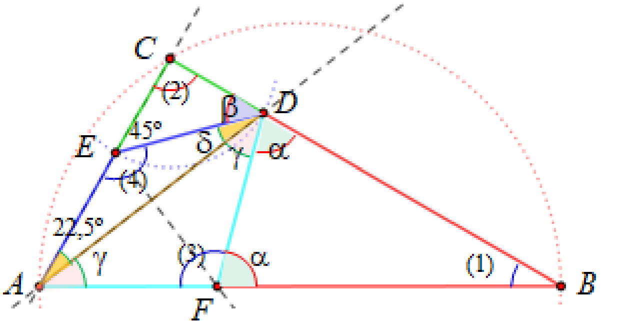


b) En el supuesto de que (3) esté en *F* y (1) en *B* se cumplirá:
Exterior en *F*: $\alpha = 2\gamma$.

Como $ADB = \gamma + \alpha = 112{,}5^{\circ} \Rightarrow 3\gamma = 112{,}5^{\circ} \rightarrow \gamma = 37{,}5^{\circ}$, α = 75º, (1) = 30º y $A = 60^{\circ}$.
Esta será la **Solución 48**.

Para <u>construir</u> esta partición (la adjunta):

1) Con $A = 60^{\circ}$ se dibuja *ACB*.
2) Se mide $\gamma = 37{,}5^{\circ}$ a partir de *AB*. Así se obtiene el punto *D*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta a *AC* en *E*. Se obtienen *AED* y *CDE*.
4) La mediatriz de *AD* corta al lado *AB* en el punto *F*. Se obtienen *ADF* y *DBF*.

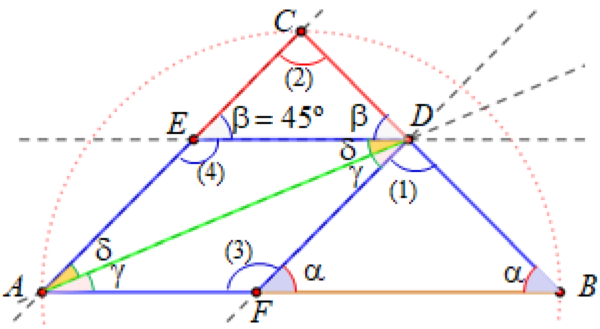


c) Por último, si (3) está en *F* y (1) en *D* se cumplirá:
Exterior en *F*: $\alpha = 2\gamma$.
Como en *ACB*, $\delta + \gamma + \alpha = 90^{\circ}$, siendo $\delta = 22{,}5^{\circ} \Rightarrow 3\gamma + 22{,}5^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow \gamma = 22{,}5^{\circ}$.

Luego $\alpha = 45^{\circ}$ y $A = 45^{\circ}$.

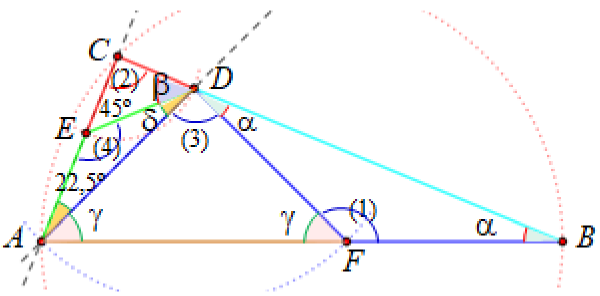
Esta **Solución 49** puede <u>construirse</u> como sigue:

1) Con $A = 45^{\circ}$ se dibuja *ACB*; *AB* puede ser cualquiera, aquí he tomado *A*(0, 0) y *B*(8, 0).
2) Como $\gamma = \delta = 22{,}5^{\circ}$, *D* es el punto de corte de la bisectriz de *A* con el lado *CB*.
3) Trazando paralelas desde *D* a los otros dos lados del triángulo *ACB* se obtienen los puntos *E* y *F*, que determinan los triángulos *AED* y *CDE*, *ADF* y *DBF*.



→ **Si (3) está en *D*** → (1) solo puede estar en *F*.
Entonces se cumple:
En *F*: $\gamma + (1) = 180^{\circ}$.
En *DBF*: $(1) + 2\alpha = 180^{\circ} \rightarrow \gamma = 2\alpha$.
Como en *ADB*, $\delta + \gamma + \alpha = 90^{\circ}$, siendo $\delta = 22{,}5^{\circ} \Rightarrow 3\alpha + 22{,}5^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow \alpha = 22{,}5^{\circ}$.

Luego $\gamma = 45^{\circ}$ y $A = 67{,}5^{\circ}$.

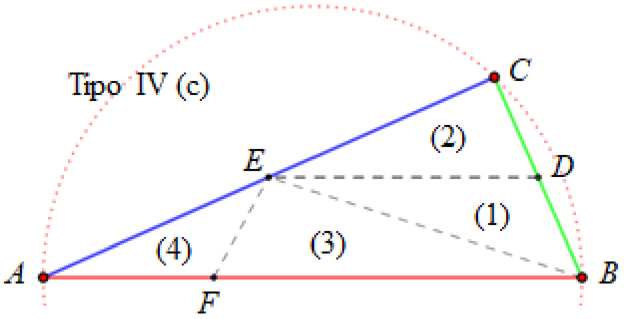


Esta **Solución 50** puede <u>construirse</u> como sigue:

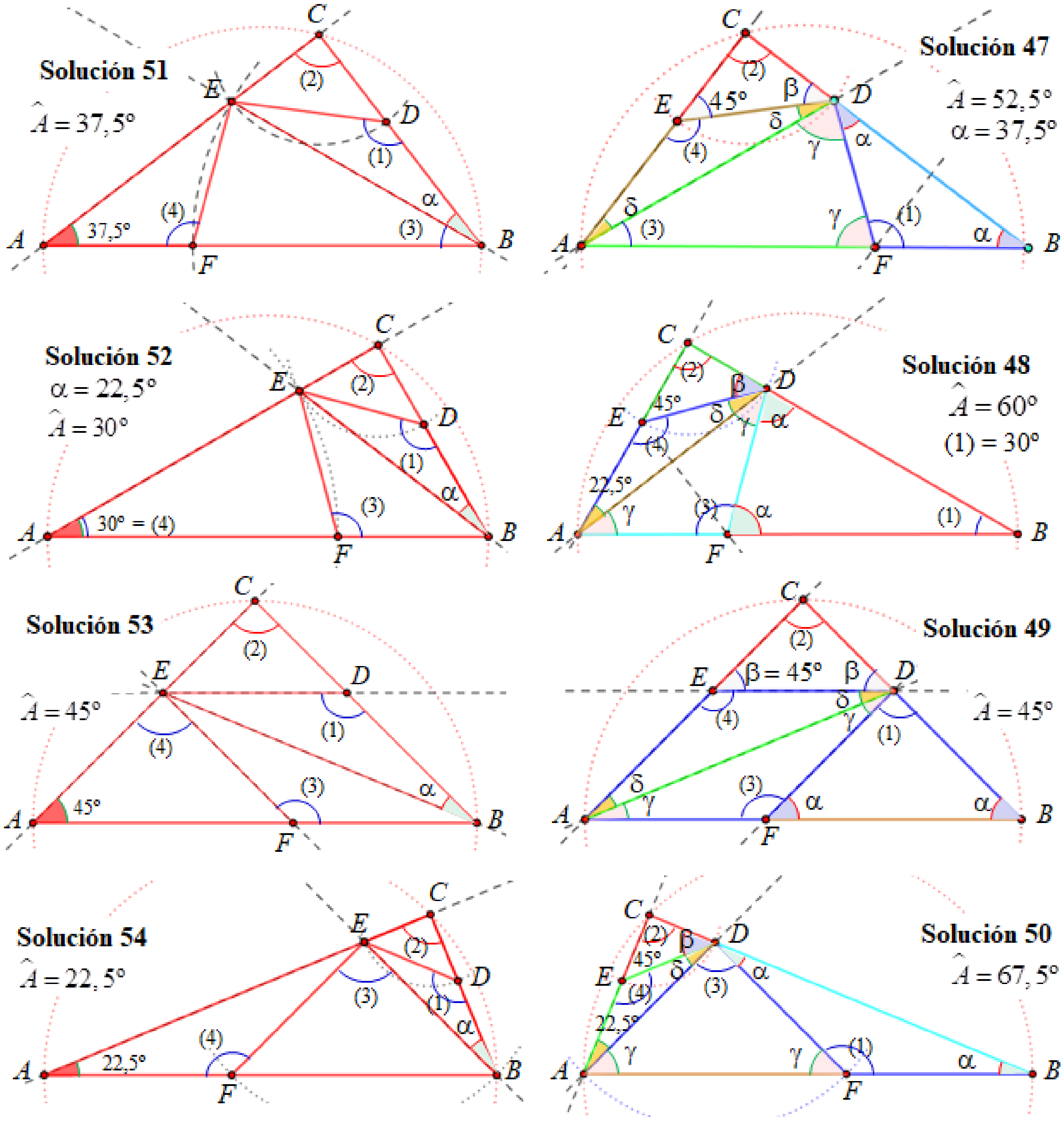
1) Con $A = 67{,}5^{\circ}$ se dibuja *ACB*; *AB* puede ser cualquiera, aquí he tomado *A*(0, 0) y *B*(8, 0).
2) Se mide un ángulo $\gamma = 45^{\circ}$ a partir de *AB*. Así se obtiene el punto *D*.
3) Con centro en *C* y radio *CD* se traza un arco que corta a *AC* en *E*. Se obtienen *AED* y *CDE*.
4) Con centro en *D* y radio *DA* se traza un arco que corta a *AB* en *F*. Se obtienen *ADF* y *DBF*.

4.3. Particiones de Tipo IV (c)

En estos casos se forman los triángulos *AEF*, *FEB*, *CDE* y *DBE*, con vértices singulares (4), (3), (2) y (1), respectivamente.

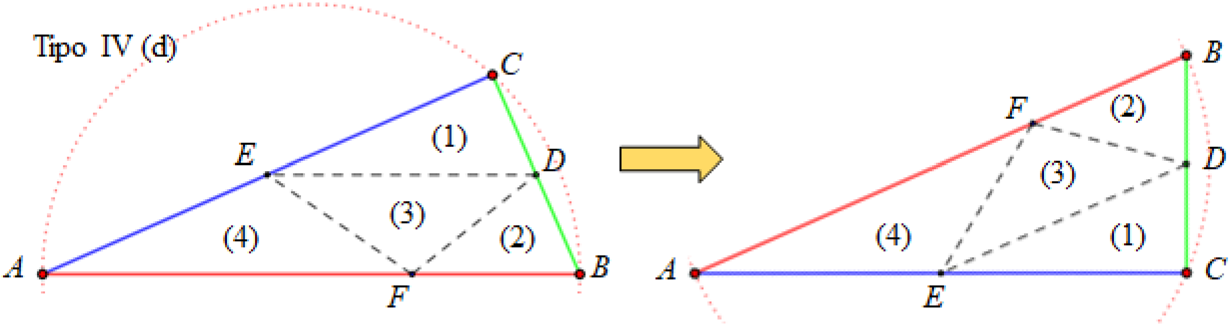


Como $C = 90º$, entonces, en ese punto debe situarse el ángulo (2), deduciéndose, entre otras cosas, que:
– En *CDE*, β = 45º → (1) está en *D* y vale 135º.
– En *DBE*, α = 22,5º; $AEB = 112,5º$.
Las soluciones son "simétricas" de las encontradas en las Particiones de Tipo IV (b): cambiando *A* por *B*. Aquí, los valores para el ángulo *A* serán: $A = 37,5º$; $A = 30º$; $A = 45º$; $A = 22,5º$. **Soluciones 51, 52, 53 y 54.**



4.4. Particiones de Tipo IV (d)

Los puntos *D*, *E* y *F* están uno en cada lado y son vértices del mismo triángulo. Por tanto, se forman los triángulos *AFE*, *DEF*, *BDF* y *DCE*, con vértices singulares (4), (3), (2) y (1), respectivamente. (Cambio de posición el triángulo para hacer un estudio más cómodo).



Como en *DCE*, $C = 90^{\circ}$, entonces, en ese punto debe situarse el ángulo (1), siendo $\alpha = 45^{\circ}$.
Pueden presentarse un total de 27 casos, que designaré como TIV1, TIV2 … TIV27.

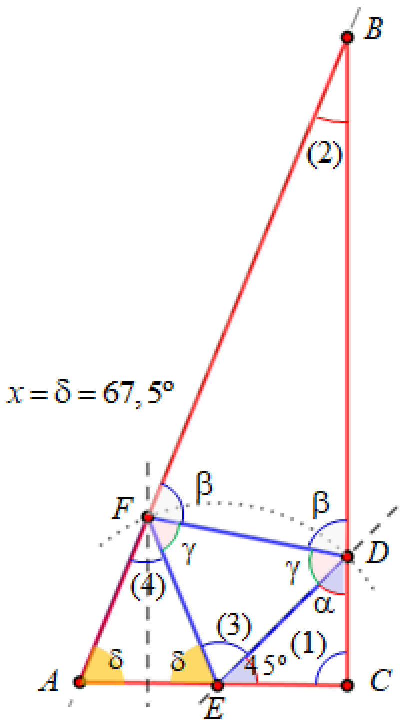
- **Casos TIV1 a TIV9**

Triángulos	*DCE*		*BDF*		*DEF*		*AFE*	*D*, *E* y *F* uno en cada lado	
TIV1. Solución 55	*D*E*		**DF*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos los vértices (1) y (2) se mantienen fijos, en *C* y *B*, respectivamente.
TIV2.	*D*E*		**DF*		*D*F*		**FE*	NO	
TIV3. Solución 56	*D*E*		**DF*		*D*F*		*AF**	Sí	
TIV4. Solución 57	*D*E*		**DF*		**EF*		*A*E*	Sí	
TIV5.	*D*E*		**DF*		**EF*		**FE*	NO	
TIV6. Solución 58	*D*E*		**DF*		**EF*		*AF**	Sí	Los casos TIV2, TIV5 y TIV7 generan “triángulos” imposibles.
TIV7.	*D*E*		**DF*		*DE**		*A*E*	NO	
TIV8. Solución 59	*D*E*		**DF*		*DE**		**FE*	Sí	
TIV9. Solución 60	*D*E*		**DF*		*DE**		*AF**	Sí	

Solución 55 (TIV1)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *B*, (3) en *E* y (4) en *F*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D*E* → **DF* → *D*F* → *A*E*).

Como $\alpha = 45^{\circ} \rightarrow \beta + \gamma = 135^{\circ} \Rightarrow (4) = 45^{\circ}$.
Luego, en *AFE*: $(4) + 2\delta = 180^{\circ} \rightarrow \delta = 67{,}5^{\circ}$.

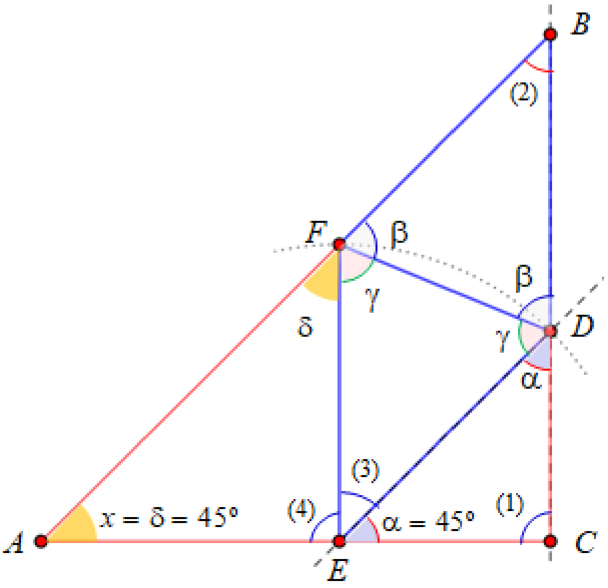
→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue.
1) Se traza el lado *AC* (con una longitud arbitraria).
2) En *A* se mide el ángulo $\delta = 67{,}5^{\circ}$; sobre ese lado se asentará la hipotenusa *AB*.
3) Sobre el lado *AC* se toma un punto *E* y se traza la mediatriz de *AE*, que corta a *AB* en *F*.
4) En ese mismo punto *E* se traza una recta de pendiente 45º y un arco de radio *AF*. Recta y arco se cortan en *D*.
5) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.



Solución 56 (TIV3)

Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *B*, (3) y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: *D*E* → **DF* → *D*F* → *AF**).



Como $\alpha = 45^\circ$ en *D*: $\beta+\gamma=135^\circ$.

En *F*: $\delta+\gamma+\beta=180^\circ \Rightarrow x=\delta=45^\circ$.

Las medidas de los otros ángulos son:

(4) = 90º; (3) = 45º; (2) = 45º;

$\gamma=67{,}5^\circ$; $\beta=67{,}5^\circ$.

→ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Se traza el lado *AC*, sin fijar *C*.

2) En *A* se mide el ángulo $x=45^\circ$, y sobre ese lado se toma el punto *F*, que proyectado sobre el lado *AC* determina el punto *E* → triángulo *AFE*.

3) En *E* se traza una recta formando con *AC* un ángulo de α = 45º.

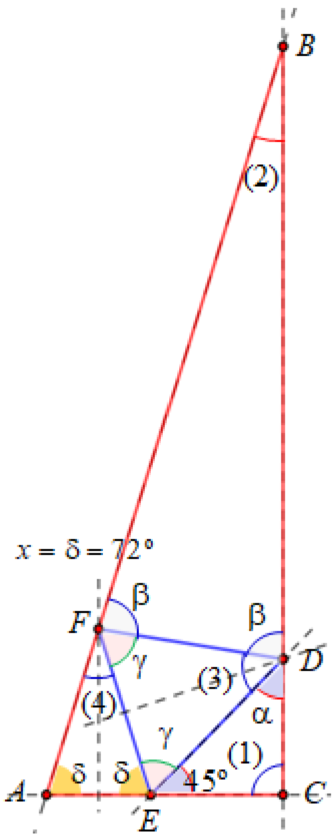
4) Con centro en *E* y radio *EF* se traza un arco que corta a la recta anterior en el punto *D* → Triángulos *DEF* y *DCE*.

5) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*. Se obtienen así los triángulos *ABC* y *BDF*.

Solución 57 (TIV4)

Este caso, con vértice singular (1) en *C*, (2) en *B*, (3) en *D* y (4) en *F*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: *D*E* → **DF* → **EF* → *A*E*).



Con esto, debe cumplirse que:

Como $\alpha=45^\circ$ en *E*: $\delta+\gamma=135^\circ \rightarrow \gamma=135^\circ-\delta$.

En *AFE*: $(4)+2\delta=180^\circ \rightarrow (4)=180^\circ-2\delta$.

En *BDF*:

$$(2)+2\beta=180^\circ \rightarrow \beta=90^\circ-\frac{(2)}{2}. \text{ Como } (2)=90^\circ-\delta \Rightarrow \beta=45^\circ+\frac{\delta}{2}.$$

En *F*:

$$(4)+\gamma+\beta=180^\circ \rightarrow 180^\circ-2\delta+135^\circ-\delta+45^\circ+\frac{\delta}{2}=180^\circ \rightarrow \delta=72^\circ \;.$$

→ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Se traza el lado *AC*, sin fijar *C*.

2) En *A* se mide el ángulo $\delta=72^\circ$.

3) Sobre el lado *AC* se toma un punto *E* y se traza la mediatriz de *AE*, que corta a *AB* en *F*.

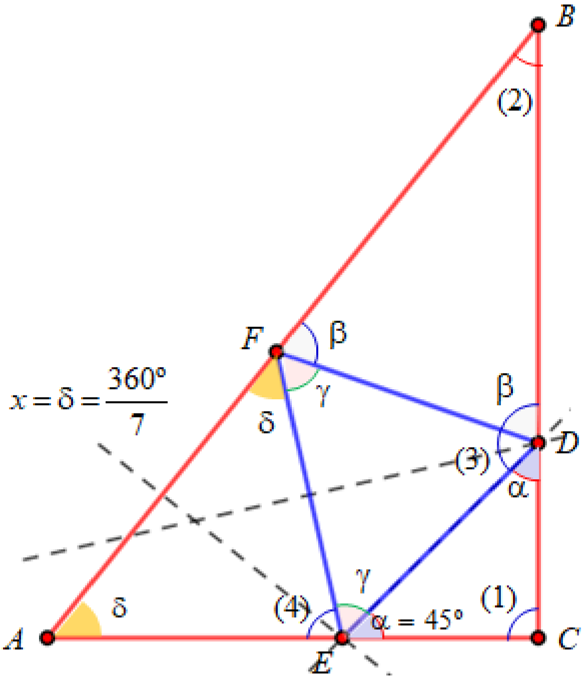
4) En ese mismo punto *E* se traza una recta de pendiente 45º y se dibuja la mediatriz de *EF*. Recta y mediatriz se cortan en *D*.

5) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*. Se obtienen así todos los triángulos buscados.

Solución 58 (TIV6)
Este caso, con vértice singular (1) en *C*, (2) en *B*, (3) en *D* y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D**E* → **DF* → *D**F* → *AF**).

Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $x = \delta$; $(2)+\delta = 90^o \to \alpha = 90^o - \delta$.
En *BDF*: $(2)+2\beta = 180^o \to \delta = 2\beta - 90^o$.
En *E*: $(4)+\gamma = 135^o$
En *AFE*: $(4)+2\delta = 180^o \to \gamma = 2\delta - 45^o \to \gamma = 4\beta - 225^o$.
En *F*: $\delta+\gamma+\beta+\alpha = 180^o \to 2\beta - 90^o + 4\beta - 225^o + \beta = 180^o \to \beta = \dfrac{495^o}{7}$.
Luego, $\delta = \dfrac{360^o}{7} \approx 51,43^o$.

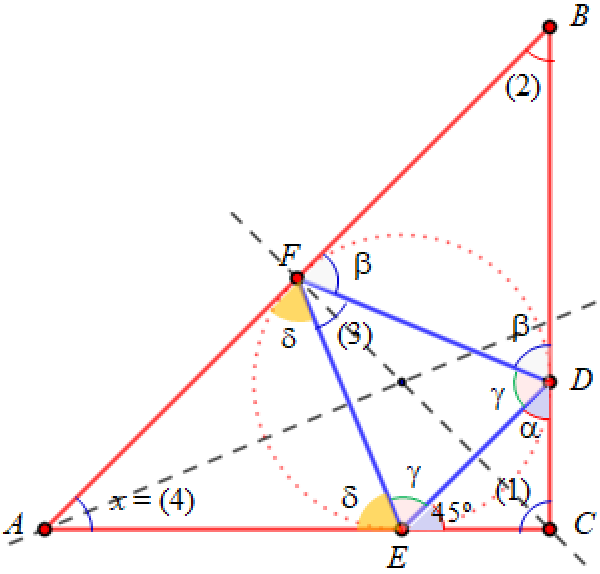
→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) Sobre la horizontal que parte de *A* se mide el ángulo $\delta = \dfrac{360^o}{7} \approx 51,43^o$ y se traza el lado *AB*, con longitud indefinida.
2) Sobre *AB* se elige un punto *F* y se traza la mediatriz de *AF*, que corta a la horizontal por *A* en *E* → triángulo *AFE*.
3) Se traza la mediatriz de *FE*; y en ese mismo punto *E* se traza una recta de pendiente 45º. Recta y mediatriz se cortan en *D* → triángulo *DEF*.
4) La perpendicular por *D* a la horizontal por *A*, se cortan en el punto *C*; y en su prolongación se determina *B* → triángulos *DCE* y *BDF*.



Solución 59 (TIV8)

Este caso, con vértice singular (1) en *C*, (2) en *B*, (3) en *F* y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: *D*E* → **DF* → *DE** → **FE*).



Con esto, como $\alpha = 45^{\circ}$:

En *E*, $\delta + \gamma = 135^{\circ}$; en *D*, $\beta + \gamma = 135^{\circ} \to \beta = \delta$.

Luego, (4) = (2) = 45º.

→ La construcción de esta partición puede hacerse como sigue:

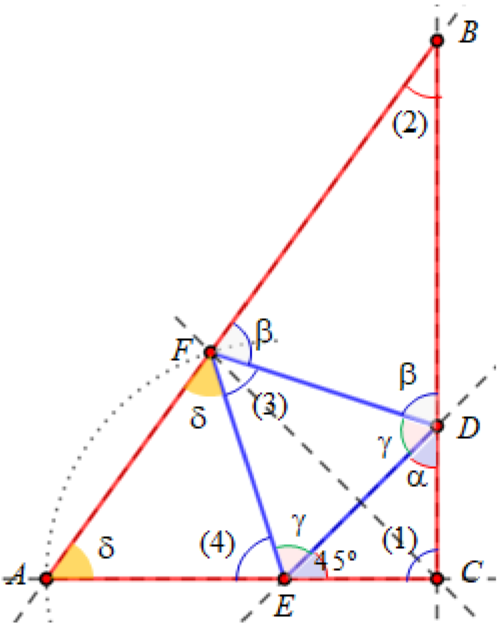
1) Se dibuja el triángulo *ABC*, rectángulo e isósceles, pues $A = B = 45^{\circ}$.

2) Los puntos *D*, *E* y *F* que determinan los triángulos buscados son los de tangencia de la circunferencia inscrita con el triángulo dado. (El centro de esa circunferencia es el punto de corte de las bisectrices del *ABC*).

Solución 60 (TIV9)

Este caso, con vértice singular (1) en *C*, (2) en *B*, (3) en *F* y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: *D*E* → **DF* → *DE** → *AF**).



Con esto, como $\alpha = 45^{\circ}$:

En *E*, $(4) + \gamma = 135^{\circ}$; en *D*, $\beta + \gamma = 135^{\circ} \to (4) = \beta$.

En *AFE*: $(4) + 2\delta = 180^{\circ} \to \beta + 2\delta = 180^{\circ} \to$

$\beta = 180^{\circ} - 2\delta \to 2\beta = 360^{\circ} - 4\delta$.

En *ABC*: $(2) + \delta = 90^{\circ} \to (2) = 90^{\circ} - \delta$.

En *BDF*: $(2) + 2\beta = 180^{\circ} \to$

$90^{\circ} - \delta + 360^{\circ} - 4\delta = 180^{\circ} \Rightarrow \delta = 54^{\circ}$.

→ La construcción de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Sobre la horizontal que parte de *A* se mide el ángulo $\delta = 54^{\circ}$ y se traza *AB*, con longitud indefinida.

2) Sobre *AC* se elige un punto *E* y, con centro en él y radio *EA*, se traza un arco que corta a *AB* en *F* → triángulo *AFE*.

3) En *E* se traza una recta de pendiente 1 (α = 45º); y desde *F* se traza una perpendicular a ella, cuyo corte con la horizontal es *C*.

4) La perpendicular por *C* permite encontrar los puntos *D* y *B* → triángulos *DCE*, *ABC* y *BDF*.

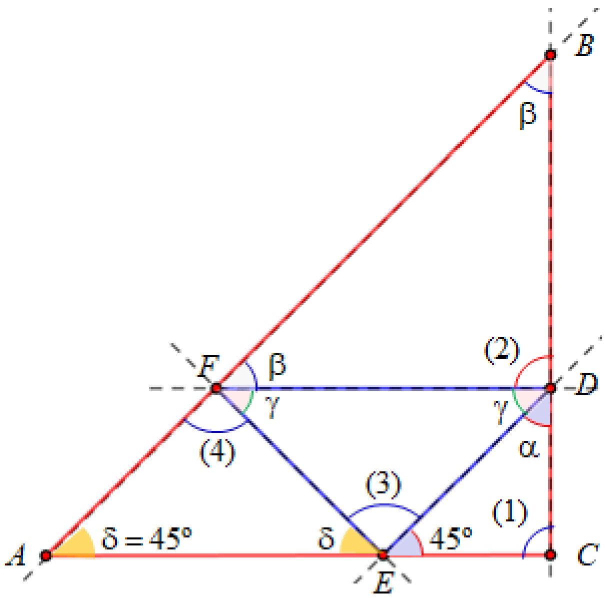
- **Casos TIV10 a TIV18**

Triángulos	*DCE*		*BDF*		*DEF*		*AFE*	*D*, *E* y *F* uno en cada lado	
TIV10. Solución 61	*D*E*		*B*F*		*D*F*		*A*E*	Sí	En estos 9 casos los vértices (1) y (2) se mantienen fijos, en *C* y *D*, respectivamente. En TIV12 y TIV15 se obtiene γ = 90º: absurdo. Tampoco pueden construirse la partición TIV16.
TIV11. Solución 62	*D*E*		*B*F*		*D*F*		**FE*	Sí	
TIV12.	*D*E*		*B*F*		*D*F*		*AF**	NO	
TIV13. Solución 63	*D*E*		*B*F*		**EF*		*A*E*	Sí	
TIV14. Solución 64	*D*E*		*B*F*		**EF*		**FE*	Sí	
TIV15.	*D*E*		*B*F*		**EF*		*AF**	NO	
TIV16.	*D*E*		*B*F*		*DE**		*A*E*	NO	
TIV17. Solución 65	*D*E*		*B*F*		*DE**		**FE*	Sí	
TIV18. Solución 66	*D*E*		*B*F*		*DE**		*AF**	Sí	

Solución 61 (TIV10)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *D*, (3) en *E* y (4) en *F*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D*E* → *B*F* → *D*F* → *A*E*).

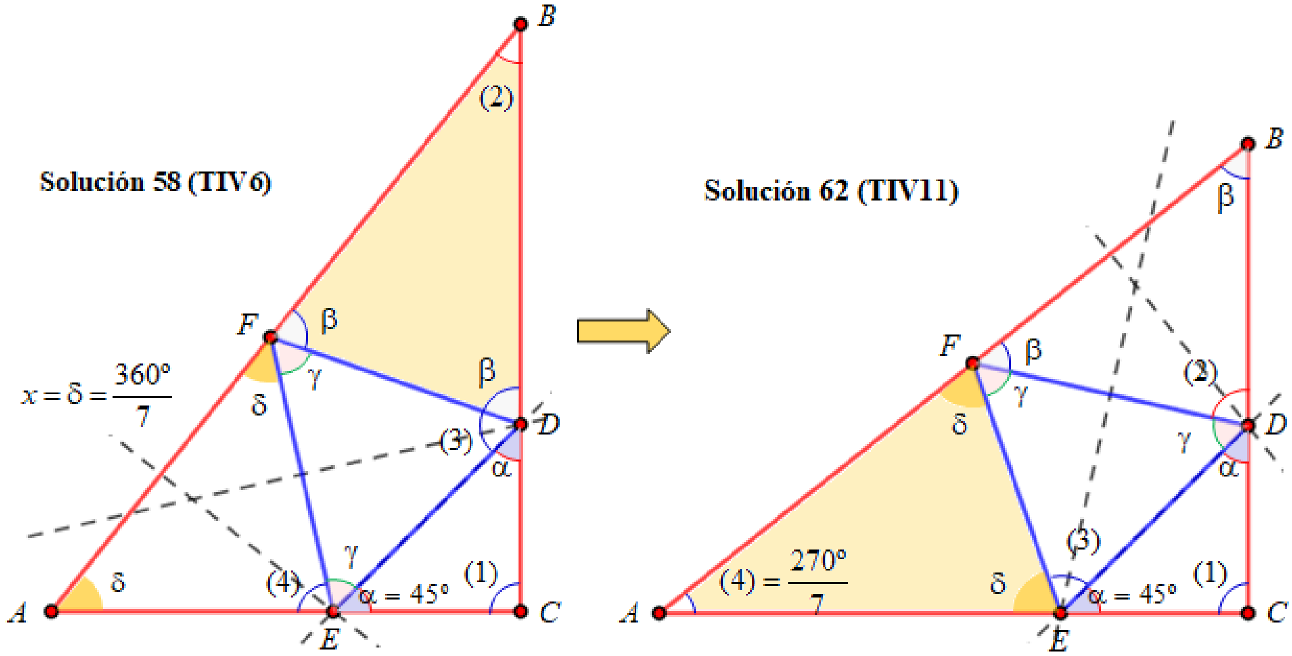
Con esto, debe cumplirse que:
En *ABC*: $\beta+\delta=90^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\delta$.
En *AFE*: $(4)+2\delta=180^\circ \Rightarrow (4)=180^\circ-2\delta$.
En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^\circ$; en *E*, $(3)+\delta=135^\circ \Rightarrow \delta=2\gamma-45^\circ \to \gamma=\frac{45^\circ}{2}+\frac{\delta}{2}$.
En *F*: $(4)+\gamma+\beta=180^\circ \Rightarrow 180^\circ-2\delta+\frac{45^\circ}{2}+\frac{\delta}{2}+90^\circ-\delta=180^\circ \Rightarrow \delta=45^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) En *A* se mide el ángulo $\delta=45^\circ$; sobre ese lado se asentará la hipotenusa *AB*.
2) En el lado *AB* se toma un punto *F* y se traza la perpendicular a *AB*, que corta a *AC* en *E* → Triángulo *AFE*.
3) En *E* se traza una recta de pendiente 45º y en *F* una paralela a *AC*. Ambas rectas se cortan en *D*.
4) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.

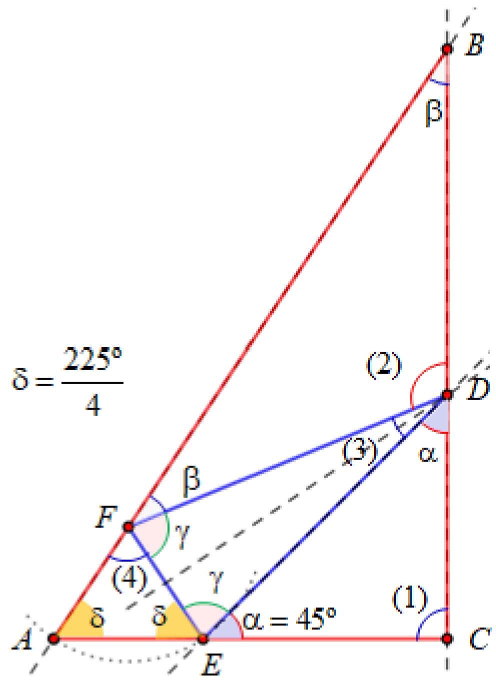


Solución 62 (TIV11)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *D*, (3) en *E* y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D**E* $\to$ *B**F* $\to$ *D**F* $\to$ **FE*).

Se obtiene mediante una simetría y un giro de 90º de la Solución TIV6: $(4)=\dfrac{270^\circ}{7}\approx 38{,}57^\circ$.



Solución 63 (TIV13)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) y (3) en *D*, y (4) en *F*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D**E* $\to$ *B**F* $\to$ **EF* $\to$ *A**E*).



En este caso se cumple:
En *E*: $\delta+\gamma=135^\circ \;\to\; \gamma=135^\circ-\delta$.
En *ABC*: $\beta+\delta=90^\circ \;\to\; \beta=90^\circ-\delta$.
En *AFE*: $(4)+2\delta=180^\circ \;\to\; (4)=180^\circ-2\delta$.
En *F*: $(4)+\gamma+\beta=180^\circ \;\Rightarrow$

$$180^\circ-2\delta+135^\circ-\delta+90^\circ-\delta=180^\circ \;\Rightarrow\; \delta=\frac{225^\circ}{4}.$$

$\to$ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) En *A* se mide el ángulo $\delta=225^\circ/4$; sobre ese lado se asentará la hipotenusa *AB*.
2) En el lado *AB* se toma un punto *F* y, con centro en él y radio *FA*, se traza un arco que corta a *AC* en *E* $\to$ Triángulo *AFE*.
3) Se traza la mediatriz de *FE*; y en *E* una recta de pendiente 45º. Ambas rectas se cortan en *D*.
4) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.

Solución 64 (TIV14)

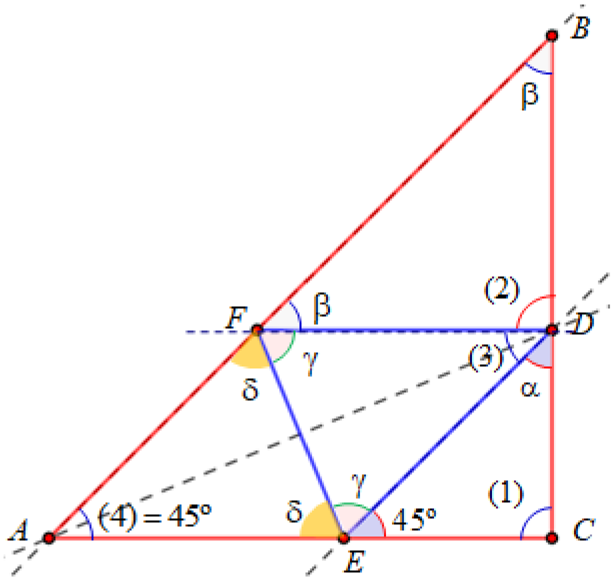
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) y (3) en *D* y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta. (Variación: *D*E* → *B*F* → **EF* → **FE*).

Se cumple:

Exterior en *E*: $\delta+\gamma=135^o \;\rightarrow\; \beta=45^o$.

Por tanto:

(2)= 90º; (3) = (4) = 45º; $\delta=\gamma=67,5^o$



→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Para $A=45^o$ se dibuja *ABC*.

2) La bisectriz del ángulo *A* corta a *BC* en *D*.

3) Por D se trazan paralelas a *AB* y *AC*, que cortan a *AC* y *AB* en los puntos *E* y *F*, respectivamente.

Se obtienen así todos los triángulos buscados.

<u>Nota</u>: Esta partición es la misma que la Solución 56 (TIV3). Se obtiene mediante una simetría y un giro de 90º.

Solución 65 (TIV17)

Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *D*, (3) en *F* y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta. (Variación: *D*E* → *B*F* → *DE** → **FE*).

Se cumple:

En *ABC*: $x+\beta=90^o$, $x=(4) \;\rightarrow\; x=90^o-\beta$

En *D*: como $\alpha=45^o \rightarrow (2)+\gamma=135^o$.

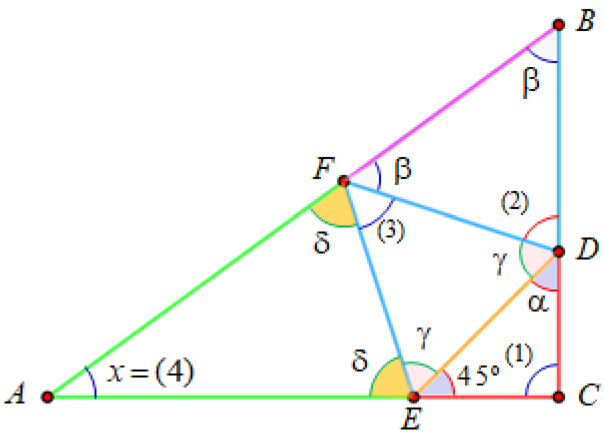
En *E*: $\delta+\gamma=135^o \;\rightarrow\; \gamma=135^o-\delta$ y $\delta=(2)$.

En *DEF*: $(3)+2\gamma=180^o \;\rightarrow\; (3)=2\delta-90^o$.

En *BDF*: $(2)+2\beta=180^o \;\rightarrow\; \beta=90^o-\dfrac{\delta}{2}$.

En *F*: $\delta+(3)+\beta=180^o \;\Rightarrow$

$$\delta+2\delta-90^o+90^o-\frac{\delta}{2}=180^o \;\Rightarrow\; \delta=72^o .$$



Po tanto, $x=(4)=36^o$. (Los demás ángulos medirán: $\beta=54^o$; (3) = 54º; $\gamma=63^o$; (2) = 72º)

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:

1) Se traza el lado *AC* (horizontal y con una longitud arbitraria).

2) En *A* se mide el ángulo $x=36^o$, y se traza el lado *AB*, también indeterminado. Sobre él se elige el punto *F*.

3) Con centro en *A* y radio *AF* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *AFE*.

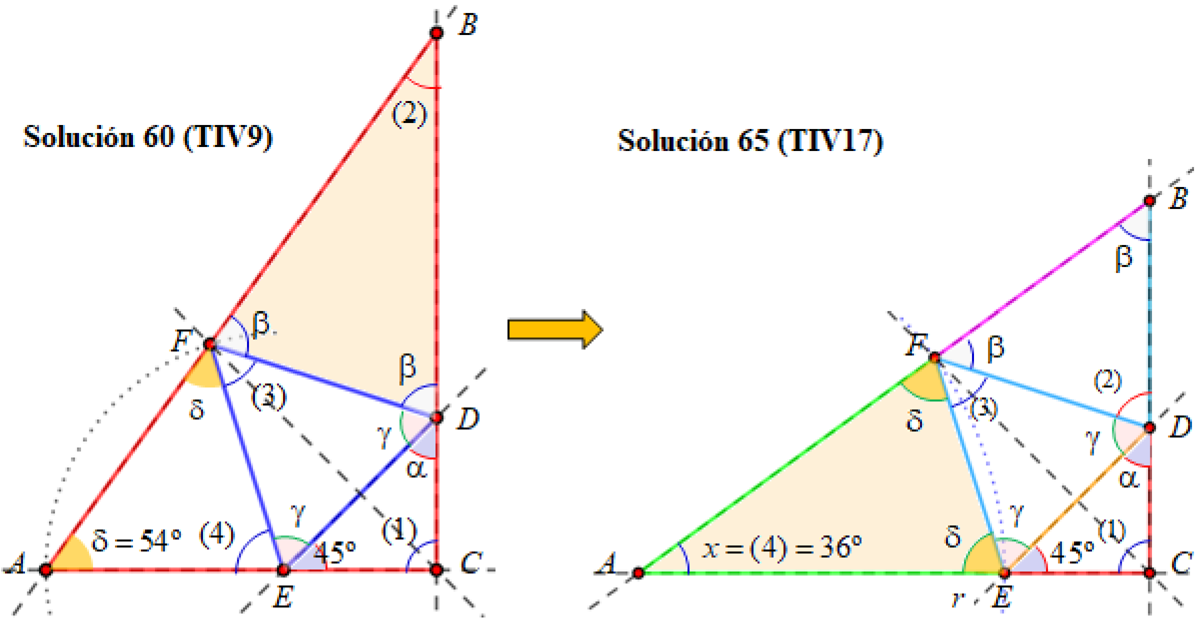
4) En el punto *E* se mide un ángulo de 45º y con esa pendiente se traza la recta *r*. En esa recta se asienta el lado *ED* del triángulo *DEF*.

5) Desde *F* se traza una perpendicular a la recta anterior (la altura de *DEF* desde *F*) . Esa recta corta al lado *AC* en el punto *C*.

6) Desde ese punto *C* se levanta una perpendicular a *AC*, que corta a *r* en *D* y al lado *AB* en *B*.

Se obtienen así todos los triángulos buscados.

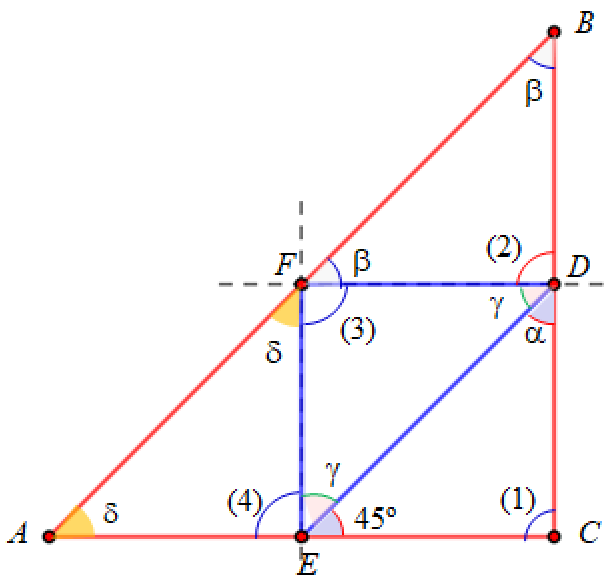
→ Como puede observarse, esta partición es la misma que la Solución TIV9: $(4) = 54^{\circ}$. Se obtiene mediante una simetría y un giro de 90º.



Solución 66 (TIV18)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *D*, (3) en *F* y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D*E* → *B*F* → *DE** → *AF**).

En este caso:
Como (4) = 90º → δ = 45º.

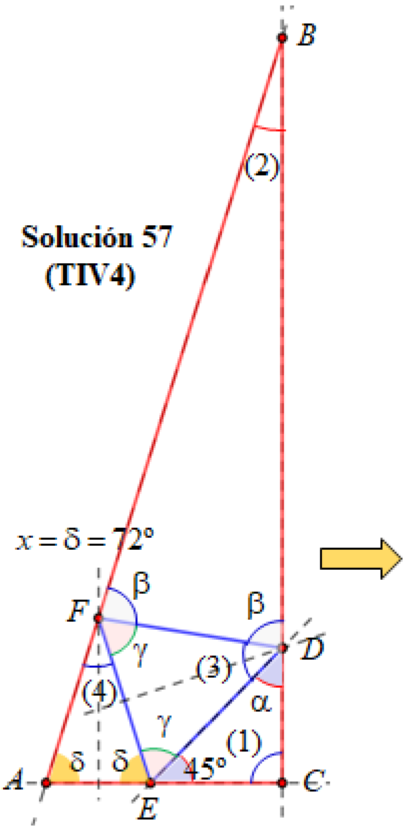
→ Para construir esta partición basta con trazar líneas paralelas a los catetos por los puntos medios de ellos.



- **Casos TIV19 a TIV27**

Triángulos	*DCE*		*BDF*		*DEF*		*AFE*	*D*, *E* y *F* uno en cada lado	
TIV19.	*D*E*		*BD**		*D*F*		*A*E*	NO	En estos 9 casos los
TIV20. Solución 67	*D*E*		*BD**		*D*F*		**FE*	Sí	vértices (1) y (2) se
TIV21. Solución 68	*D*E*		*BD**		*D*F*		*AF**	Si	mantienen fijos: (1) en *C*;
TIV22.	*D*E*		*BD**		**EF*		*A*E*	NO	(2) en *F*.
TIV23. Solución 69	*D*E*		*BD**		**EF*		**FE*	Sí	En TIV19, β = 135º; en
TIV24. Solución 70	*D*E*		*BD**		**EF*		*AF**	Sí	TIV22, γ = 0º; en TIV25,
TIV25.	*D*E*		*BD**		*DE**		*A*E*	NO	γ = 90º; en TIV26, δ =
TIV26.	*D*E*		*BD**		*DE**		**FE*	NO	90º; en TIV27, β = 0º →
TIV27.	*D*E*		*BD**		*DE**		*AF**	NO	soluciones absurdas.

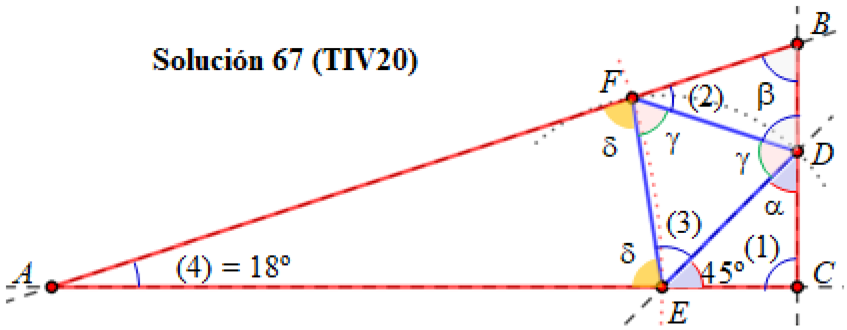
Solución 67 (TIV20)
Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *F*, (3) en *E* y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D*E* → *BD** → *D*F* → **FE*).



Con esto, debe cumplirse que:
En *D*: $\beta+\gamma=135^{\circ} \Rightarrow \gamma=135^{\circ}-\beta$.
En *ABC*: $(4)+\beta=90^{\circ}$.
En *AFE*: $(4)+2\delta=180^{\circ} \Rightarrow 2\delta-\beta=90^{\circ} \rightarrow \delta=45^{\circ}+\dfrac{\beta}{2}$.
En *BDF*: $(2)+2\beta=180^{\circ} \rightarrow (2)=180^{\circ}-2\beta$.
En *F*: $\delta+\gamma+(2)=180^{\circ} \Rightarrow$

$$45^{\circ}+\frac{\beta}{2}+135^{\circ}-\beta+180^{\circ}-2\beta=180^{\circ} \Rightarrow \beta = 72 \rightarrow (4) = 18^{\circ}.$$

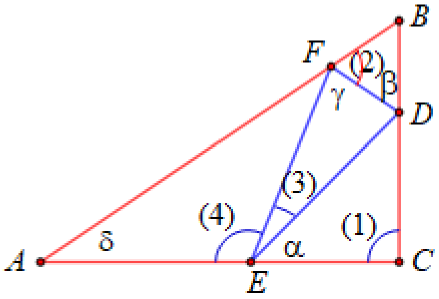
(Como puede verse es la misma solución que la encontrada en TIV4. Se obtiene una a partir de la otra mediante un giro de 90º y una simetría de eje vertical).



→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) En *A* se mide el ángulo de 18º y, con centro en *A* y radio arbitrario, se traza el arco *EF*.
2) Con centro en *E* se traza un arco de radio *EF* y una recta de pendiente 45º, que se cortan en *D*.
3) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.

Solución 68 (TIV21)

Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *F*, (3) y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: $D^*E \to BD^* \to D^*F \to AF^*$).



En este caso se cumple:

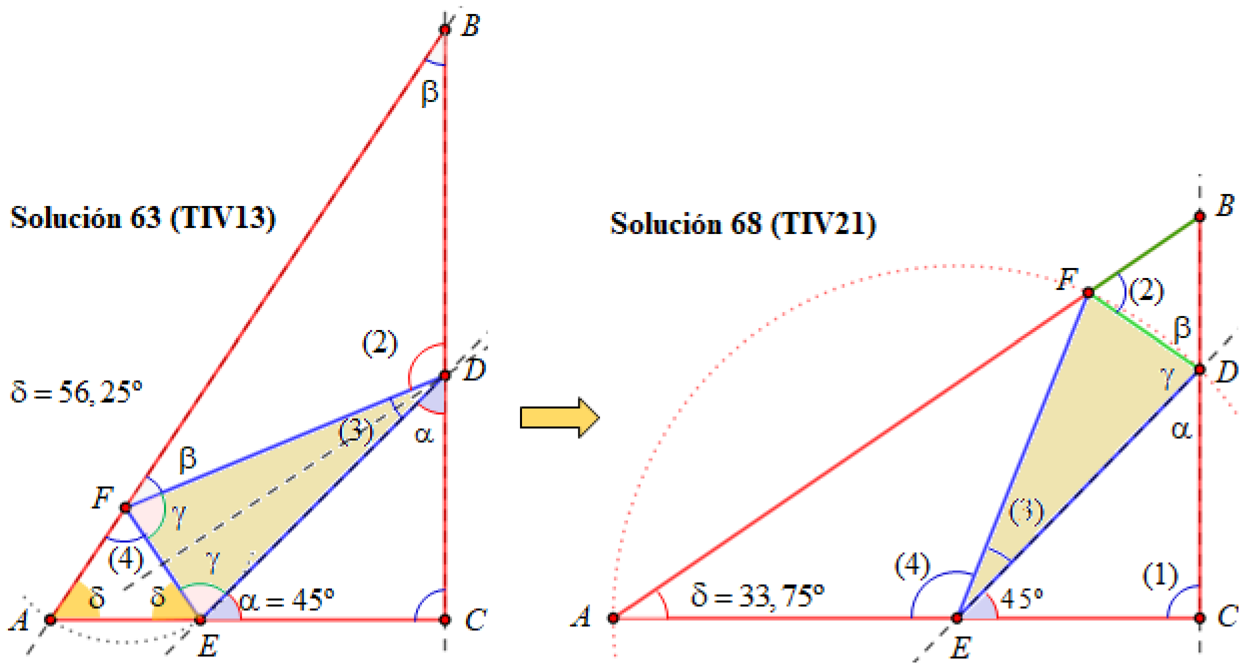
$\gamma = 135^\circ - \beta$; $\delta = 90^\circ - \beta$; $(2) = 180^\circ - 2\beta$.

En *F*: $\delta + \gamma + (2) = 180^\circ \Rightarrow$

$90^\circ - \beta + 135^\circ - \beta + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 56{,}25^\circ$.

Luego, $\delta = 33{,}75^\circ$.

Esta solución es equivalente a la encontrada en TIV13. Se obtiene una a partir de la otra mediante un giro de 90º y una simetría de eje vertical.

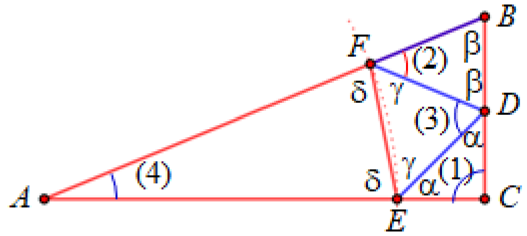


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) En *A* se mide el ángulo de 33,75º y se trazan los lados *AC* y *AB*.
2) En *AC* se elige un punto *E* y desde él se traza un arco de radio *EA* y una recta de pendiente 45º. El arco corta al lado *AB* en *F*; la recta y el arco se cortan en *D*.
3) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.

Solución 69 (TIV23)

Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *F*, (3) en D y (4) en *A*, como se indica en la figura adjunta.

(Variación: *D*E* → *BD** → **EF*→ **FE*).

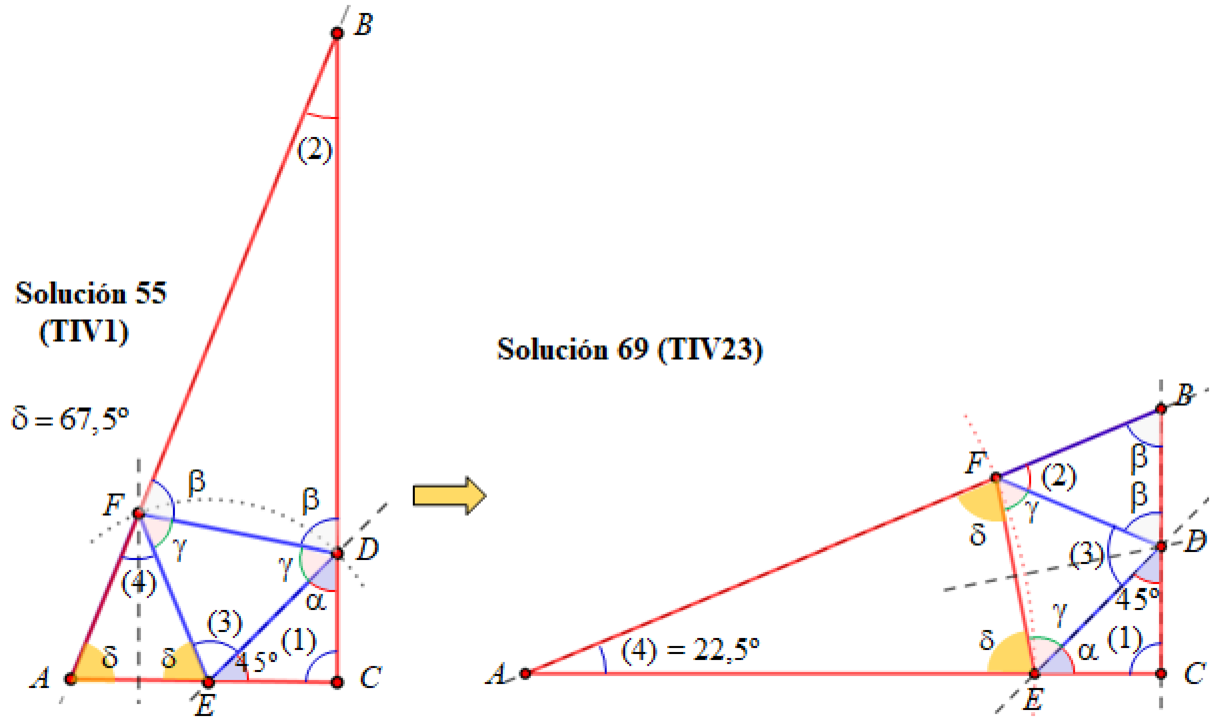


En este caso, como:

$\delta + \gamma = 135º \Rightarrow (2) = 45º \rightarrow \beta = 67{,}5º$.

Luego, (4) = 22,5º.

Esta solución es equivalente a la encontrada en TIV1. Se obtiene una de la otra mediante un giro de 90º y una simetría de eje vertical.



→ Además del método de <u>construcción</u> descrito en Solución 55 (TIV1), también podría hacerse como sigue:

1) En *A* se mide el ángulo de 32,5º y se trazan los lados *AC* y *AB*.

2) Con centro en *A* y radio *AE*, siendo *E* un punto arbitrario de *AC*, se traza un arco que corta a *AB* en *F*.

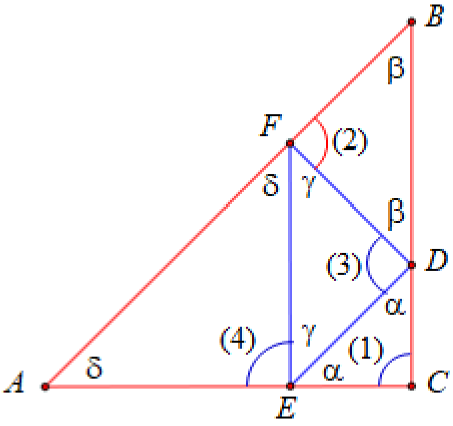
3) Se traza la mediatriz de *EF* y por E una recta de pendiente 45º: se cortan en *D*.

4) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.

Se obtienen así todos los triángulos buscados.

Solución 70 (TIV24)

Los vértices singulares se sitúan en: (1) en *C*, (2) en *F*, (3) en *D* y (4) en *E*, como se indica en la figura adjunta.
(Variación: *D*E* → *BD** → **EF*→ *AF**).



En este caso, como:

$\beta+\delta=90^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\delta$.

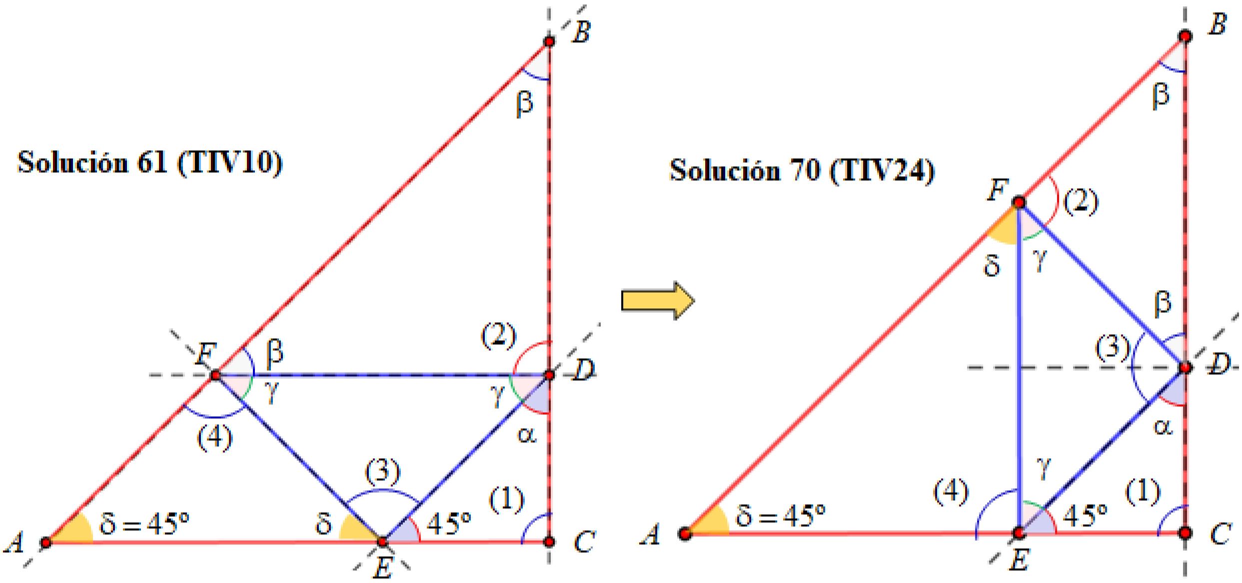
En *BDF*: $(2)=180^\circ-2\beta \rightarrow (2)=2\delta$

En *E*: $(4)+\gamma+\alpha=180^\circ$, siendo $(4)=180^\circ-2\delta$ y α = 45º,
luego $\gamma=2\delta-45^\circ$.

En *F*: $\delta+\gamma+(2)=180^\circ \Rightarrow$

$\delta+2\delta-45^\circ+2\delta=180^\circ \Rightarrow \delta=45^\circ$.

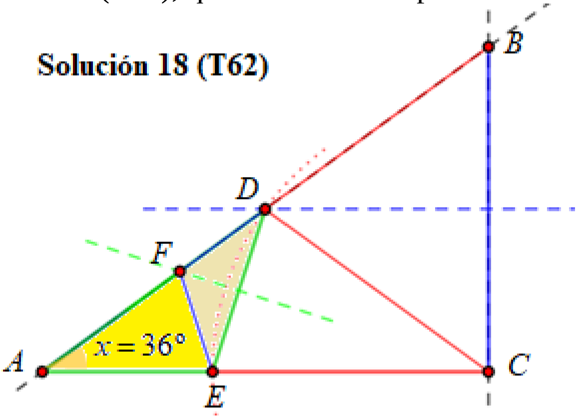
Esta solución es equivalente a la encontrada en TIV10. Se obtiene una de la otra mediante un giro de 90º y una simetría de eje vertical.

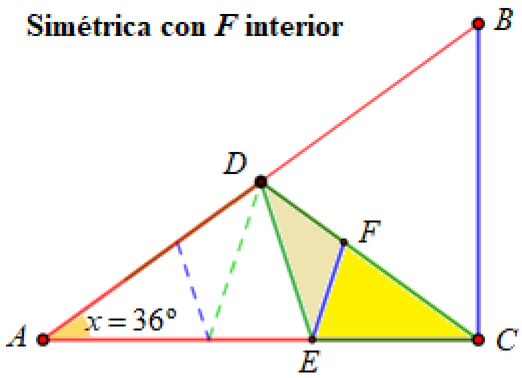


→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue:
1) En *A* se mide el ángulo $\delta=45^\circ$; sobre ese lado se asentará la hipotenusa *AB*.
2) En el lado *AC* se toma un punto *E* y se traza la perpendicular al mismo *AC*, que corta a *AB* en *F* → Triángulo *AFE*.
3) En *E* se traza una recta de pendiente 45º y la mediatriz de *EF*. Ambas rectas se cortan en *D*.
4) La perpendicular por *D* al lado *AC* (inicialmente arbitrario) determina *C* y corta a la hipotenusa en *B*.
Se obtienen así todos los triángulos buscados.

5. ALGUNOS CASOS SUELTOS

Cuando alguno de los puntos *D*, *E*, *F* es interior al triángulo *ABC* hay otras soluciones, aunque no estoy en condiciones de decir cuántas más (dejo el problema abierto para otra ocasión).
No obstante, como indiqué anteriormente, todas las soluciones de las Particiones de Tipo I (c) tienen otra "simétrica" con el punto *F* interior. Allí se construyó una de ellas, la correspondiente a la Solución 18 (T62), que se vuelve a representar.

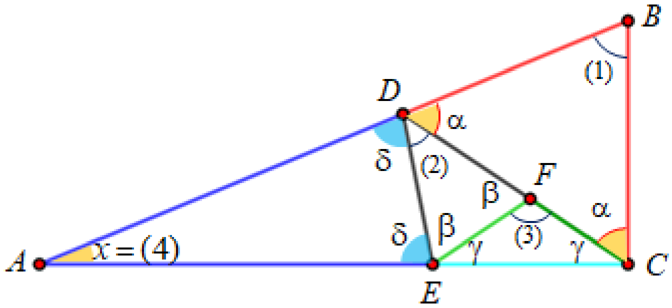




El lector interesado sabrá determinar y construir las "simétricas" de las Soluciones 16, 17, 19, 20, 21, 22 y 23.

→ Para terminar este trabajo propongo <u>algunos casos sueltos</u>. Son los siguientes:

Caso particular 1 (Solución 71)
Con vértice singular (1) en *B*, se puede encontrar también la partición que se muestra a continuación, en donde uno de los vértices de los triángulos, el punto *F*, se encuentra en el interior de *ABC*.



Con esta disposición debe cumplirse:
En *ABC*: $x+(1)=90^\circ \Rightarrow x=90^\circ-(1)$.
En *CBD*:

$$(1)+2\alpha=180^\circ \rightarrow \alpha=45^\circ+\frac{x}{2}.$$

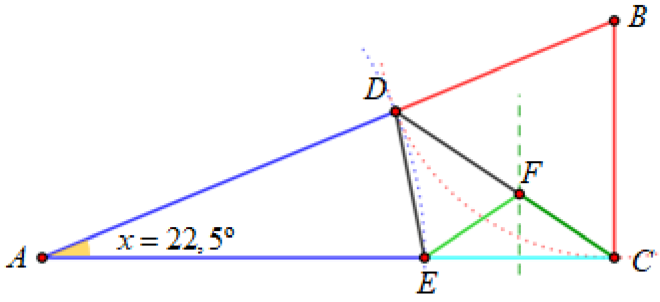
En *C*: $\alpha+\gamma=90^\circ \Rightarrow \gamma=90^\circ-\alpha$.
En *EFC*: $(3)+2\gamma=180^\circ \Rightarrow (3)=2\alpha$.
En *F*: $(3)+\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=180^\circ-(3)$
$\Rightarrow \beta=180^\circ-2\alpha$.
En *DEF*: $(2)+2\beta=180^\circ \Rightarrow (2)=4\alpha-180^\circ \rightarrow (2)=2x$.

En *AED*: $x+2\delta=180^\circ \rightarrow \delta=90^\circ-\dfrac{x}{2}$.

En *D*: $\delta+(2)+\alpha=180^\circ \Rightarrow 90^\circ-\dfrac{x}{2}+2x+45^\circ+\dfrac{x}{2}=180^\circ \Rightarrow x=22{,}5^\circ$.

→ La <u>construcción</u> de esta partición se puede hacer como sigue.
1) Se traza el lado *AC*, con una longitud arbitraria, y una perpendicular por *C* a él.

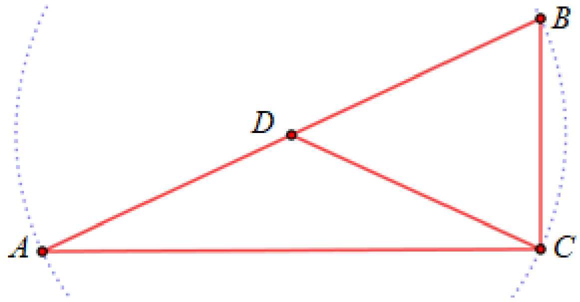
2) En *A*, con un trasportador, se mide el ángulo $x = 22,5°$, y se prolonga hasta que corte a la vertical trazada en *C*. El punto de corte es *B*. Con esto se tiene construido el triángulo *ABC*.
3) Con centro en *B* y radio *BC* se traza un arco que corta al lado *AB* en el punto *D*. Se obtiene así el triángulo *BCD*.
4) Con centro en *A* y radio *AD* se traza un arco que corta al lado *AC* en el punto *E* → triángulo *ADE*.
5) Se traza la mediatriz de *EC*, que corta al segmento *DC* en el punto *F* → triángulo *EFD*.
6) El cuarto triángulo es *DFE*.



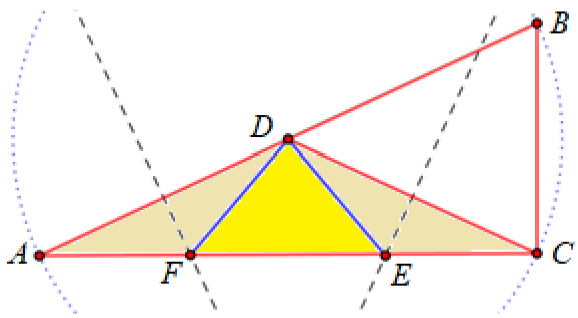
Caso general

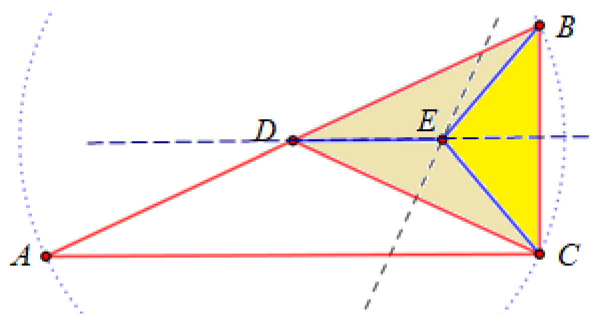
- Como se sabe, la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo tiene como diámetro la hipotenusa de ese triángulo. Por tanto, su centro es el punto medio de ella, *D*; luego, los segmentos *DA*, *DB* y *DC* miden lo mismo: son tres radios de la circunferencia.

Por consiguiente, los triángulos *ADC* y *DBC* son isósceles en *D*. Esto significa que cualquier triángulo rectángulo puede dividirse en dos isósceles.



Por otra parte, cada uno de esos triángulos puede descomponerse en tres triángulos isósceles más pequeños, tal y como se representa en las figuras que siguen.

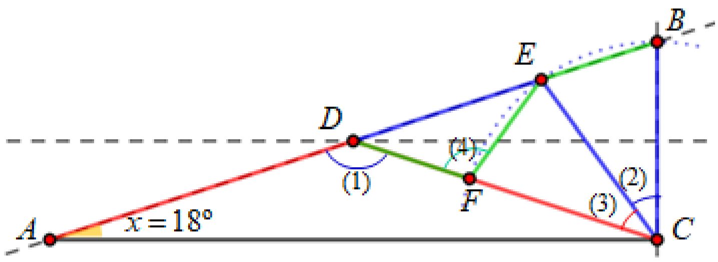




→ El caso de la izquierda es el estudiado en la Solución 35 (T159), que, como se dijo allí, vale siempre. (Los puntos *F* y *E* se obtienen con ayuda de las mediatrices de *AD* y *DC*).

→ La descomposición en tres triángulos isósceles de *DBC*, manteniendo indiviso *ADC*, siempre es posible. El punto *E*, común a los tres nuevos triángulos, es el ortocentro del triángulo *ADC* (corte de sus mediatrices); por tanto, las distancias *EB*, *EC* y *ED* son iguales, lo que implica que los triángulos *EBC*, *ECD* y *EDB* sean isósceles.
<u>Nota</u>: Este caso general podría excluirse ya que solo se utilizan dos puntos *D* y *E*.

Caso particular 2 (Solución 72)
Cuando el ángulo x = 18º, el triángulo *DBC* se puede partir en tres triángulos isósceles de otro modo. Tal como se indica en la figura adjunta.
→ El lector sabrá determinar ese valor de $x = 18º$. El procedimiento es el ya repetido tantas veces, planteando las relaciones angulares dentro del triángulo *BDC*.



→ Existe otra partición que se obtiene trazando un arco con centro en *D* y radio *DE*; el corte con *DC* es el punto *F*.

RESUMEN

Al principio de este trabajo me había propuesto la división de un triángulo rectángulo *ABC*, rectángulo en *C*, en cuatro triángulos isósceles.
Después de un análisis detallado se puede concluir:

1. Cualquier triángulo rectángulo puede dividirse en cuatro triángulos isósceles.
- En las Particiones de Tipo II (el punto *D* en la hipotenusa *AB*; *E* y *F* en el cateto *AC*) esta afirmación se comprueba varias veces:

a) el caso T102 (Solución 25) es válido para todo ángulo $A < 45º$;

b) el caso T135 (Solución 33) es válido para todo ángulo $A < 90º$;

c) el caso T159 (Solución 35) es válido para todo ángulo $A < 45º$.
Para la demostración de estos casos se utilizan propiedades asociadas a la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo, a las mediatrices de sus lados y a la bisectriz de uno de sus ángulos agudos.
- En las Particiones de Tipo IV (cuando los puntos *D*, *E* y *F* se eligen cada uno en un lado del triángulo) se demuestra también que la partición siempre es posible. Para ello se traza la altura desde el ángulo recto y se aplica la propiedad de la circunferencia circunscrita correspondiente a cada uno de los dos triángulos rectángulos que se obtienen.

2. Se han encontrado hasta 70 particiones diferentes, con la condición de que los tres nuevos vértices, puntos *D*, *E* y *F*, estén en alguno de los lados de *ABC* (10 de esas particiones pueden considerarse repetidas, pues se obtienen de otras mediante giros y simetrías). Cada una de esas particiones viene determinada por el valor del ángulo *A*, por la situación de los puntos *D*, *E* y *F* y por la posición de los distintos vértices singulares.

3. Por último, aunque de manera casi anecdótica, se han visto tres particiones en las que uno de los nuevos puntos es interior del triángulo. (Con el punto *F* interior se han mencionado también las particiones "simétricas" de las Soluciones 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 y 23).

Daganzo de Arriba, 29 de septiembre de 2021