

# Experimentelle Übungen für Physiker I (WS 05/06)

## Versuch 311 – Hall-Effekt und Elektrizitätsleitung bei Metallen

Marco Lafrentz      Philipp Leser

17.01.2006 – Abtestiert am 30.01.2006

Ziel des Versuchs ist die Untersuchung verschiedener Materialkonstanten, die die Elektrizitätsleitung in Metallen beeinflussen. Zusätzlich wird die Hysteresekurve eines Elektromagneten aufgenommen.

### Inhaltsverzeichnis

<b>1. Theorie</b>	<b>2</b>
1.1. Die elektrische Leitfähigkeit von metallischen Kristallen . . . . .	2
1.2. Bestimmung der Ladungsträgerzahl $n$ mit dem HALL-Effekt . . . . .	4
1.2.1. Der anomale HALL-Effekt . . . . .	5
1.3. Weitere mikroskopische Leitfähigkeitsparameter . . . . .	5
1.3.1. Die mittlere freie Weglänge $\bar{\ell}$ . . . . .	5
1.3.2. Die Beweglichkeit $\mu$ der Elektronen . . . . .	6
<b>2. Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>3. Auswertung</b>	<b>7</b>
3.1. Bestimmung makroskopischer Größen . . . . .	7
3.2. Bestimmung mikroskopischer Leitfähigkeitsparameter . . . . .	11
3.3. Hysteresekurve . . . . .	11
<b>A. Anhang</b>	<b>13</b>
A.1. Literatur . . . . .	13
A.2. Messdaten . . . . .	13

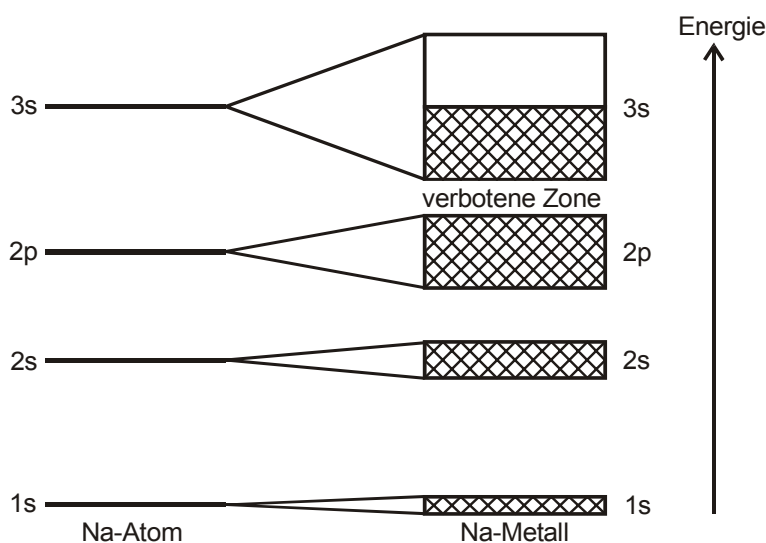
# 1. Theorie

Für die Bestimmung der gesuchten mikroskopischen Größen wird in diesem Versuch eine Widerstandsmessung sowie die Messung der HALL-Spannung benutzt. Zunächst ist also die Herleitung der theoretischen Zusammenhänge zwischen den Größen erforderlich.

## 1.1. Die elektrische Leitfähigkeit von metallischen Kristallen

Die Leitfähigkeit von metallischen Festkörpern ist eine Konsequenz der streng periodischen Gitterstruktur von Kristallen. Die Metallatome sind so eng angeordnet, dass ihre äußeren Elektronen ein gemeinsames System bilden. Beobachtet man bei einzelnen Atomen streng definierte Energieniveaus, auf denen sich die Elektronen gemäß des PAULI-Prinzips<sup>1</sup> befinden, so zeigt der Festkörper ein anderes Phänomen: Die einzelnen Energieniveaus der Atome gehen in sogenannte *Energiebänder* des gesamten Systems über, in denen die Elektronen quasikontinuierlich verschiedene Energien annehmen können.

Die Energiebänder können nicht nur unterschiedlich breit sein, es besteht auch die Möglichkeit, dass sie sich überlappen oder Lücken zwischen ihnen auftreten (sogenannte *verbotene Zonen*). Die Abbildung 1 zeigt am Beispiel der 1s-, 2s-, 2p-, und 3s-Schalen des Natriumatoms die Verteilung der Energiebänder.



**Abbildung 1:** Verteilung der Energiebänder im Natriumfestkörper. Die schraffierten Flächen symbolisieren besetzte Bänder. [1]

Wegen des PAULI-Verbots können die Energiebänder nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen aufnehmen. Für einen elektrischen Strom müssen die Ladungsträger jedoch beschleunigt werden, um in Bewegung versetzt werden zu können; dazu müssen diese also in der Lage sein, Energie aufzunehmen. Dies können nur

<sup>1</sup>Das PAULI-Prinzip besagt, dass zwei Elektronen eines Systems nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen dürfen.

Elektronen, deren Energieband noch Platz für höhere Energiezustände hat. Diese Bedingung wird vom höchsten, nur teilweise besetzten, Energieband erfüllt, das man deshalb auch *Leitfähigkeitsband* nennt. Die Elektronen in diesem Band heißen *Leitfähigkeitselektronen*.

Für die Herleitung der Leitfähigkeitsbeziehung wird die Beschleunigung betrachtet, die das elektrische Feld auf die Elektronen ausübt. Geht man von einer *mittleren Flugzeit*  $\bar{\tau}$  aus, die zwischen zwei zufälligen Stößen der Leitungselektronen mit Strukturdefekten oder Ionenrümpfen vergeht, so führt die Beschleunigung durch das elektrische Feld auf eine Geschwindigkeitsänderung von ( $e_0$  und  $m_0$  sind die Elektronenladung bzw. -masse,  $\vec{E}$  ist das elektrische Feld)

$$\Delta\vec{v} = -\frac{e_0}{m_0}\vec{E}\bar{\tau}$$

in Richtung des elektrischen Felds während der genannten Zeit. Betrachtet man nun mehrere Stöße und daraus folgende Beschleunigungen hintereinander, so wird die Richtung der Streuung zufällig verteilt sein und die Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des Feldes  $\vec{E}$  im Mittel verschwinden. Es ist daher sinnvoll, eine *mittlere Driftgeschwindigkeit*  $\vec{v}_d$  in Richtung des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  einzuführen:

$$\vec{v}_d = \frac{1}{2}\Delta\vec{v} \quad (1.1)$$

Mit Hilfe dieser Geschwindigkeit kann man nun einen Ausdruck für die Stromdichte  $j$  im Festkörper aufstellen. Geht man von  $n$  Elektronen pro Volumeneinheit aus, so lautet diese

$$j = -n\vec{v}_d e_0. \quad (1.2)$$

Setzt man den Ausdruck 1.1 für die Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_d$  ein, erhält man

$$j = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} E.$$

Der Übergang zu dem geometrieabhängigen Ausdruck für den Strom  $I$  führt man durch die Ersetzungen  $j = I/Q$  und  $E = U/L$  durch (hierbei sind  $Q$  und  $L$  der Querschnitt und die Länge der Leiters):

$$I = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} \frac{Q}{L} U$$

Die aufgestellte Gleichung entspricht dem OHM'schen Gesetz, was es nun ermöglicht, den Leitwert  $S$ , bzw. den Widerstand  $R$  abzulesen:

$$S = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} \frac{Q}{L}$$
$$R = 2 \frac{m_0}{e_0^2} \frac{1}{n \bar{\tau}} \frac{L}{Q}$$

Lässt man die Geometrieabhängigkeiten  $L$  und  $Q$  weg, kann man die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  und den spezifischen Widerstand  $\rho$  angeben:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau}$$

$$\rho = 2 \frac{m_0}{e_0^2} \frac{1}{n \bar{\tau}}$$

Die Widerstand eines Leiters ist leicht bestimmbar, ebenso die geometrischen Parameter. Zur experimentellen Bestimmung eines der Parameter  $n$  oder  $\bar{\tau}$  mit Hilfe der hergeleiteten Beziehungen muss der jeweils andere bekannt sein. Es wird hier der HALL-Effekt genutzt, um die Ladungsträgerzahl  $n$  auf anderem Wege zu bestimmen:

### 1.2. Bestimmung der Ladungsträgerzahl $n$ mit dem HALL-Effekt

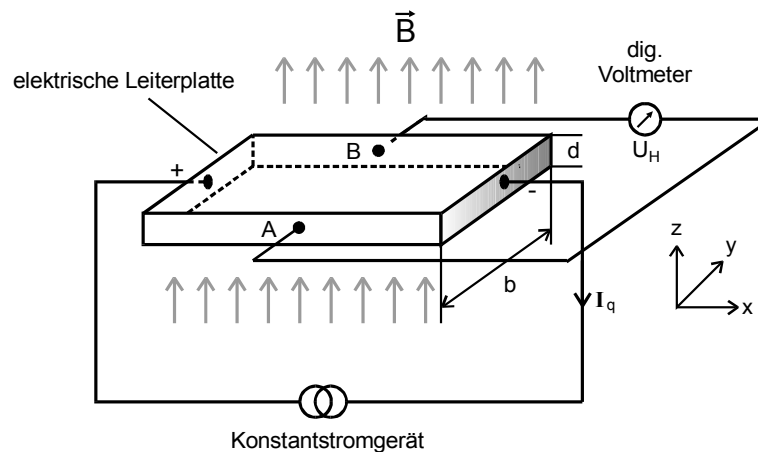


Abbildung 2: Illustration des HALL-Effekts [1]

Die Abbildung 2 zeigt einen prinzipiellen Versuchsaufbau zur Beobachtung des HALL-Effekts. Ein konstanter Strom  $I_q$  fließt durch die Leiterplatte in Richtung der positiven  $x$ -Achse, während ein Magnetfeld  $\vec{B}$  in  $z$ -Richtung anliegt. Die LORRENTZ-Kraft  $\vec{F}_L$  bewegt nun die Ladungsträger in Richtung der negativen  $y$ -Achse, wodurch ein zusätzliches elektrisches Feld in dieser Richtung erzeugt wird. Das Feld wird gerade so groß, dass die LORRENTZ-Kraft kompensiert wird. Aus diesem Gleichgewicht kann man die HALL-Spannung  $U_H$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  herleiten ( $b$  ist die in der Abbildung eingezeichnete Breite der Leiterplatte):

$$U_H = E_y b$$

$$= \bar{v}_d B b$$

Setzt man unter Beachtung von  $j = I_q / (bd)$  ( $d$  ist die Dicke der Leiterplatte) die Driftgeschwindigkeit  $\bar{v}_d$  aus Gleichung 1.2 ein, so erhält man schließlich

$$U_H = - \frac{1}{ne_0} \frac{B \cdot I_q}{d}. \quad (1.3)$$

Mit einer Messung der HALL-Spannung, des angelegten Querstroms  $I_q$  und des Geometriewertes  $d$  lässt sich also die Ladungsträgerdichte  $n$  und das Vorzeichen der Ladung bestimmen. Aus der Gleichung 1.2 lässt sich weiterhin leicht die mittlere Driftgeschwindigkeit  $\bar{v}_d$  bestimmen.

### 1.2.1. Der anomale HALL-Effekt

Überlappen sich bei Metallen zwei Energiebänder, kann es vorkommen, dass Elektronen spontan von unteren in höhere Bänder übergehen. Dabei entstehen in den unteren Bänder sogenannte *Löcher*, die ortsveränderlich sind. Auf diese Weise kann man sie als positive Ladungsträger ansehen, die sich durch den Festkörper bewegen können.

Misst man einen *anomalen HALL-Effekt*, also einen durch diese positiven Ladungsträger hervorgerufenen HALL-Effekt, so beobachtet man ein umgekehrtes Vorzeichen der HALL-Spannung gegenüber dem Fall der Elektronenleitung. Man kann also durch Betrachtung des Vorzeichens beurteilen, ob die Löcher- oder die Elektronenleitung überwiegt.

### 1.3. Weitere mikroskopische Leitfähigkeitsparameter

Es lassen sich noch einige weitere Parameter der Leitfähigkeit mit den gemessenen Größen ermitteln:

#### 1.3.1. Die mittlere freie Weglänge $\bar{\ell}$

Zunächst ist die sogenannte *mittlere freie Weglänge*  $\bar{\ell}$  von Interesse. Dabei handelt es sich um die mittlere Strecke, die ein Elektron zwischen zwei Stößen zurücklegt. Ist die mittlere Flugzeit bekannt, lässt sie sich über die Beziehung

$$\bar{\ell} = \bar{\tau} \cdot |v|$$

herleiten, wobei  $|v|$  die Totalgeschwindigkeit der Elektronen bezeichnet. Diese ist nicht identisch mit der Driftgeschwindigkeit  $\bar{v}_d$ , sondern entsteht durch die Wärmebewegung der Kristallbausteine des Metalls. Aus dem Energiesatz  $\frac{1}{2}m_0 |\bar{v}|^2 = E$  folgt, dass die Geschwindigkeit bei bekannter Energie  $E$  mit

$$|v| = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}$$

anzusetzen ist. Für die Angabe der Energie ist zu beachten, dass Elektronen wegen des PAULI-Verbots einer FERMI-DIRAC-Verteilung unterliegen. Man kann zeigen, dass für die Energie  $E$  gilt:

$$E = \frac{h^2}{2m_0} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^2}$$

Damit erhält man für die mittlere freie Weglänge

$$\bar{\ell} = \bar{\tau} \sqrt{\frac{2E}{m_0}}.$$

### 1.3.2. Die Beweglichkeit $\mu$ der Elektronen

Unter der *Beweglichkeit*  $\mu$  der Ladungsträger versteht man den Proportionalitätsfaktor zwischen der Driftgeschwindigkeit und dem von außen angelegten elektrischen Feld:

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E}$$

Setzt man die Gleichung 1.1 für die Driftgeschwindigkeit ein und löst man die Gleichung dann nach  $\mu$  auf erhält man die Beweglichkeit

$$\mu = \frac{\bar{v}_d}{E} = \frac{\bar{v}_d}{\frac{U}{l}} = \frac{\bar{v}_d \cdot l}{U} = \frac{\bar{v}_d}{2m_0} \cdot \frac{m_0 \cdot l}{U}$$

## 2. Versuchsaufbau und Durchführung

In diesem Versuch werden vier Messreihen durchgeführt:

- Messung der Widerstände von Tantal- und Kupferdrähten
- Bestimmung der geometrischen Abmessungen der Drähte und Platten
- Aufnahme der Hysteresekurve des verwendeten Elektromagneten
- Messung der HALL-Spannung für Tantal- und Kupferproben

Zur Messung der Widerstände wird ein mit einer Differenzmethode arbeitendes Ohmmeter benutzt, welches sehr genaue Ergebnisse liefert. Die geometrischen Abmessungen (Drahtdurchmesser und Dicke der leitenden Platten) werden jeweils fünf mal mit einer Mikrometerschraube gemessen, damit im weiteren Verlauf mit dem Mittelwert weitergearbeitet werden kann.

Der benutzte Elektromagnet ist für Ströme bis 4 A ausgelegt. Mit Hilfe eines Teslameters wird die Feldstärke zwischen den Polschuhen bei verschiedenen Strömen gemessen, sowohl während des Hochfahrens des Magneten als auch während des Abschaltens. Auf diese Weise kann eine Hysteresekurve aufgenommen werden und die maximale Feldstärke bei einer Stromstärke von 4 A bestimmt werden.

Bei der Messung der HALL-Spannung ist zu beachten, dass diese klein gegenüber der Störspannung ist, die aus der Tatsache entsteht, dass die beiden Kontaktpunkte  $A$  und  $B$  (s. auch Abbildung 2) praktisch nie auf einer Äquipotentialfläche liegen können. Durch zwei Messungen bei jeweils umgekehrter Feldrichtung des Magnetfelds kann ausgenutzt werden, dass sich das Vorzeichen der HALL-Spannung so ändert, die Störspannung aber weiterhin das gleiche Vorzeichen behält. Man kann also bei  $U_{\text{ges}+} = U_H + U_{\text{St}}$  und  $U_{\text{ges}-} = -U_H + U_{\text{St}}$  die HALL-Spannung bestimmen mit

$$U_H = \frac{1}{2} (U_{\text{ges}+} - U_{\text{ges}-})$$

Zur besseren Messung der immernoch kleinen HALL-Spannung wird ein Verstärker benutzt, der das Signal um einen Faktor 100 verstärkt. Es werden für jede Probe mehrere Messungen bei unterschiedlichen Querströmen  $I_q$  durchgeführt, um die Genauigkeit der Messung zu erhöhen.

	$L[\text{m}]$	$d[\text{mm}]$	$R[\text{Ohm}]$	$D[\text{mm}]$
Kupfer	1,73	0,1082	3,447	0,0336
Tantal	1,73	0,2528	4,935	0,0242

**Tabelle 1:** elektrischer Widerstand und geometrische Abmessungen der Proben

### 3. Auswertung

In unserem Experiment untersuchten wir Proben der Metalle Kupfer und Tantal. Die Auswertung der Messergebnisse beider Proben ist identisch und geschieht daher parallel.

#### 3.1. Bestimmung makroskopischer Größen

Um im weiteren Verlaufe mikroskopische Leitfähigkeitsparameter zu berechnen, ermitteln wir zunächst die Länge  $L$ , den Durchmesser<sup>2</sup>  $d$  und den elektrischen Widerstand  $R$  des Drahtes und die Dicke<sup>2</sup>  $D$  der Probe (siehe Tabelle 1). Die Messungen werden für weitere Rechnungen als fehlerfrei angenommen. Weiter messen wir die auftretende HALLspannung  $U_H$  in Abhängigkeit von dem Strom  $I_q$ , der durch die Probe fließt. Da es nicht möglich ist, die Spannung an äquipotentialen Kontaktpunkten abzugreifen und das Magnetfeld exakt in einem rechten Winkel auszurichten, muss man gegebene Störspannungen  $U_{\text{Str}}$  nach

$$U_H = \frac{1}{2}(U_+ - U_-)$$

$$U_+ = U_H + U_{\text{Str}}$$

$$U_- = -U_H + U_{\text{Str}}$$

rausrechnen. Hierin sind  $U_-$  und  $U_+$  Spannungsmessungen bei entgegengesetzter Stromrichtung. Unsere Ergebnisse für Kupfer sind der Tabelle 2 und für Tantal der Tabelle 3 zu entnehmen. Da für weitere Rechnungen jedoch nur der Quotient  $\frac{I_q}{U_H}$  von Interesse ist, wird dieser über eine lineare Ausgleichsrechnung der Form  $Y = B * X$  (mit ORIGINPRO 7.5) bestimmt. Mit der Methode der kleinsten Quadrate gilt dann

$$B = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind den Abbildungen 3 (Kupfer) und 4 (Tantal) zu entnehmen.

---

<sup>2</sup> $d$  und  $D$  sind Mittelwerte und werden berechnet nach:  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  ( $N$ =Anzahl der Messungen)

$I_q$ [A]	$U_+$ [mV]	$U_-$ [mV]	$U_H$ [ $\mu$ V]
0,0	19,0	19,0	0,0
0,5	21,1	20,9	1,0
1,0	22,8	22,7	0,5
1,5	24,6	24,4	1,0
2,0	26,4	26,1	1,5
2,5	28,3	27,8	2,5
3,0	30,2	29,5	3,5
3,5	31,9	31,3	3,0
4,0	33,7	33,2	2,5
4,5	35,5	34,9	3,0
5,0	37,4	36,6	4,0
5,5	39,3	38,4	4,5
6,0	41,1	40,2	4,5
6,5	42,8	41,8	5,0
7,0	44,6	43,6	5,0
7,5	46,4	45,3	5,5
8,0	48,3	47,0	6,5
8,5	50,1	48,8	6,5
9,0	51,8	50,6	6,0
9,5	53,6	52,4	6,0
10,0	55,3	53,8	7,5

**Tabelle 2:** Messung der HALLspannung für Kupfer

$I_q$ [A]	$U_+$ [mV]	$U_-$ [mV]	$U_H$ [ $\mu$ V]
0,0	18,9	18,9	0,0
0,5	13,1	12,8	1,5
1,0	7,8	7,2	3,0
1,5	2,7	1,6	5,5
2,0	-2,6	-4,1	7,5
2,5	-8,1	-9,8	8,5
3,0	-13,5	-15,6	10,5
3,5	-19,3	-21,3	10,0
4,0	-24,8	-27,2	12,0
4,5	-30,6	-32,9	11,5
5,0	-36,1	-38,5	12,0
5,5	-42,1	-44,4	11,5
6,0	-47,8	-49,9	10,5
6,5	-53,2	-55,5	11,5
7,0	-58,4	-61,3	14,5

**Tabelle 3:** Messung der HALLspannung für Tantal



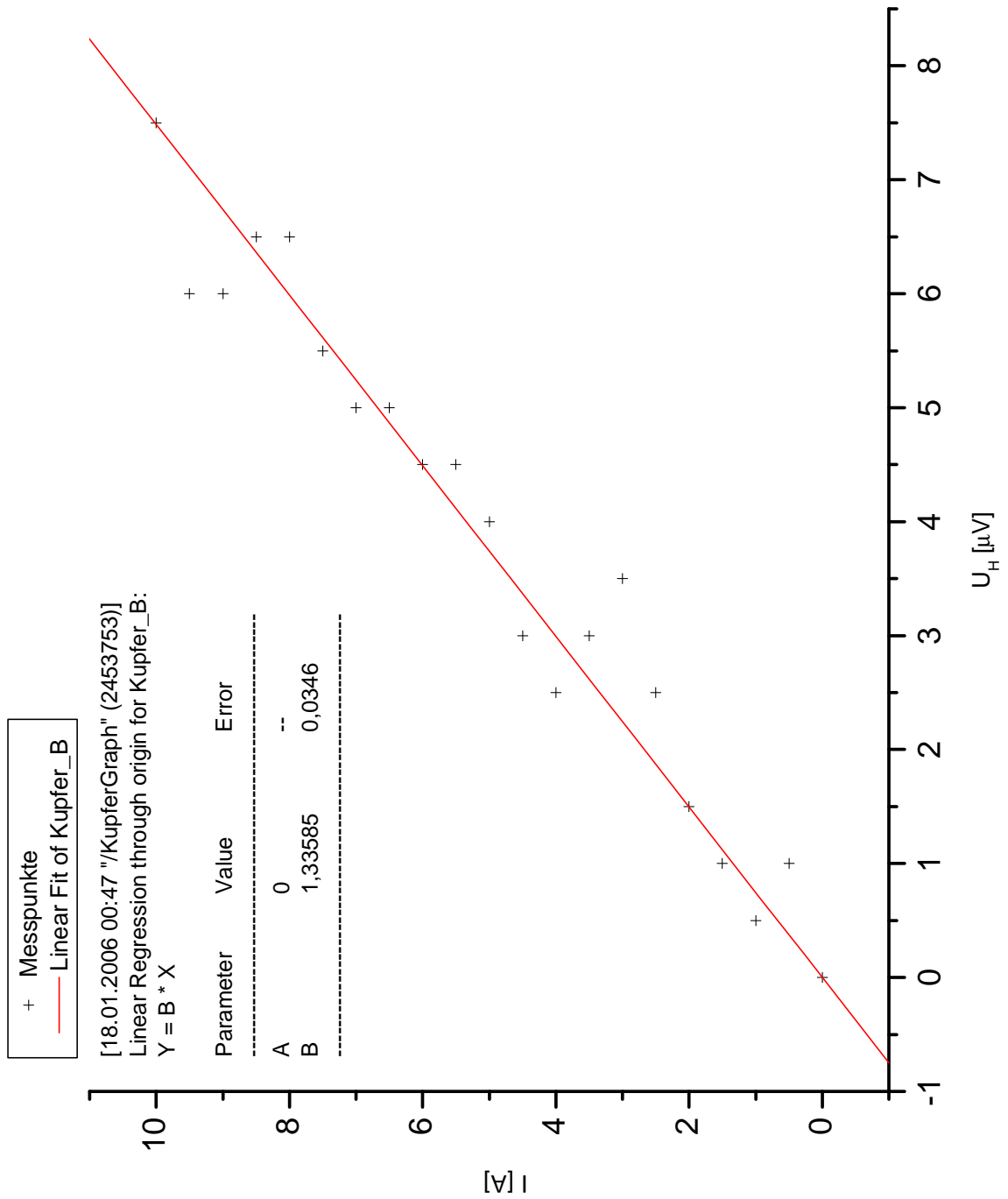


Abbildung 3: Ausgleichsrechnung für die HALLspannung bei Kupfer

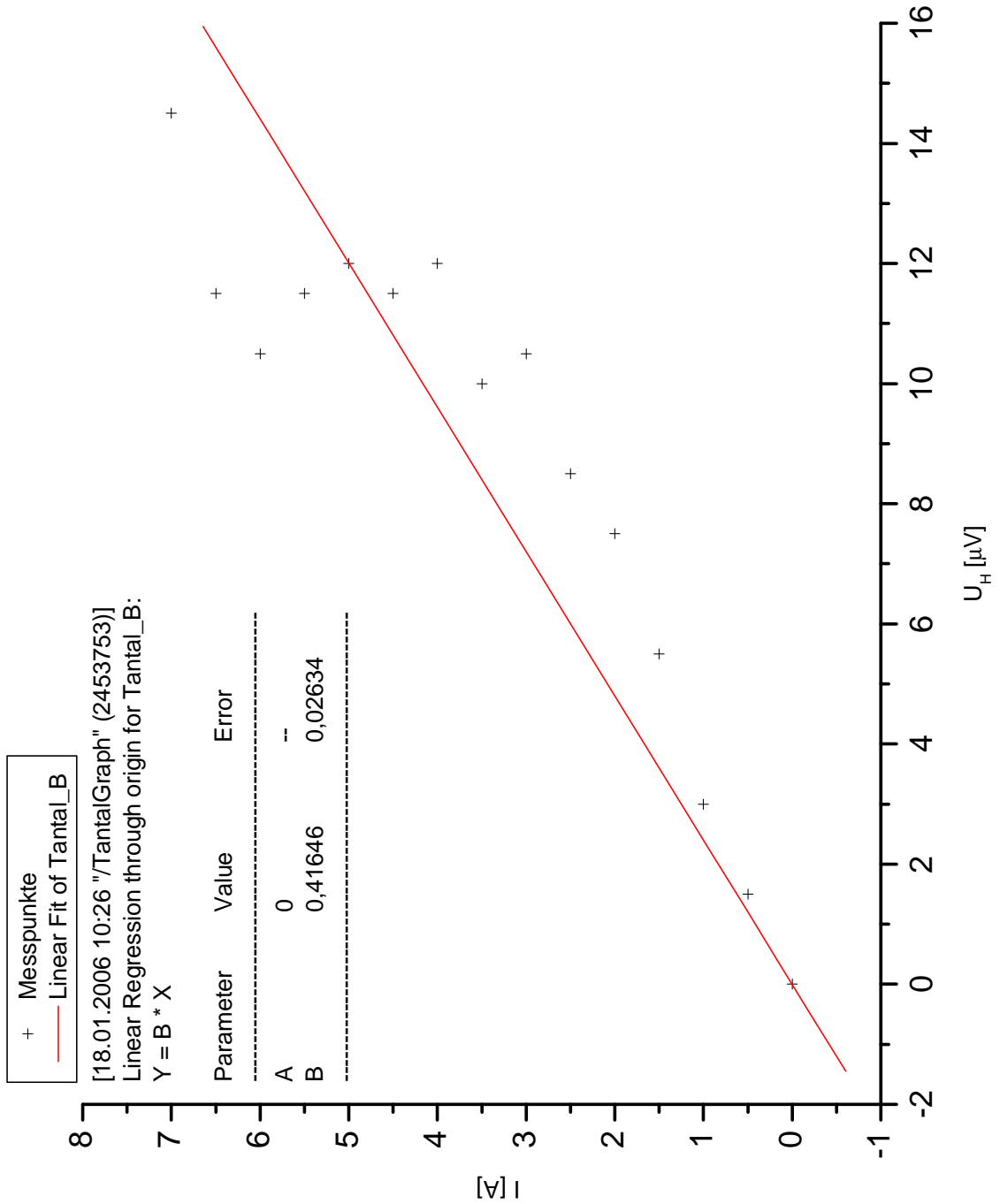


Abbildung 4: Ausgleichsrechnung für die HALLspannung bei Tantal

### 3.2. Bestimmung mikroskopischer Leitfähigkeitsparameter

Aus diesen makroskopischen Größen lassen sich nun mikroskopische Leitfähigkeitsparameter errechnen<sup>3</sup> ( $B = 0.409 \text{ T}$ ).

$$n\bar{\tau} = \frac{2m_0L}{Re_0^2Q}$$

$$n = \frac{B}{e_0d} \frac{I_q}{U_H} \quad \text{Ladungsträger pro Volumen}$$

$$z = n \frac{\text{Atomvolumen}}{N_A} \quad \text{Ladungsträger pro Atom}$$

$$\bar{\tau} = \frac{n\bar{\tau}}{n} \quad \text{mittlere Flugzeit}$$

$$\bar{v}_d = \frac{1}{ne_0} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \quad \text{mittlere Driftgeschwindigkeit}$$

$$\mu = \frac{\bar{\tau}e_0}{2m_0} \quad \text{Beweglichkeit,}$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m_0} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{8\pi}n\right)^2} \quad \text{FERMI-Energie}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_F}{m_0}} \quad \text{Totalgeschwindigkeit}$$

$$\bar{l} = \bar{\tau}v \quad \text{mittlere freie Weglänge}$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \quad \text{AVOGADRO-Konstante}$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js} \quad \text{PLANCK'sches Wirkungsquantum}$$

$$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \quad \text{Elementarladung}$$

$$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg} \quad \text{Elektronenmasse}$$

Geht man nun bei Kupfer von einem Atomvolumen von  $7,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  und bei Tantal von  $10,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$  aus, so erhält man die Werte aus Tabelle 4.

Statistische Fehler aus der Regressionsrechnung und der Mittelwertbildung werden vernachlässigt, da systematische Fehler, wie z.B. Schwankungen der Temperatur der Proben, wesentlich größere Ungenauigkeiten hervorrufen.

Geht man bei Kupfer von Elektronenleitung aus, so handelt es sich bei Tantal ebenfalls um Elektronenleitung, da alle Werte gleiche Vorzeichen besitzen.

### 3.3. Hysteresekurve

Unsere Messung der Flussdichte  $B$  des verwendeten Elektromagneten ergibt, wie in Abbildung 5 zu sehen, eine Hysterese.

<sup>3</sup>Alle Konstanten für diese Rechnungen aus [2]

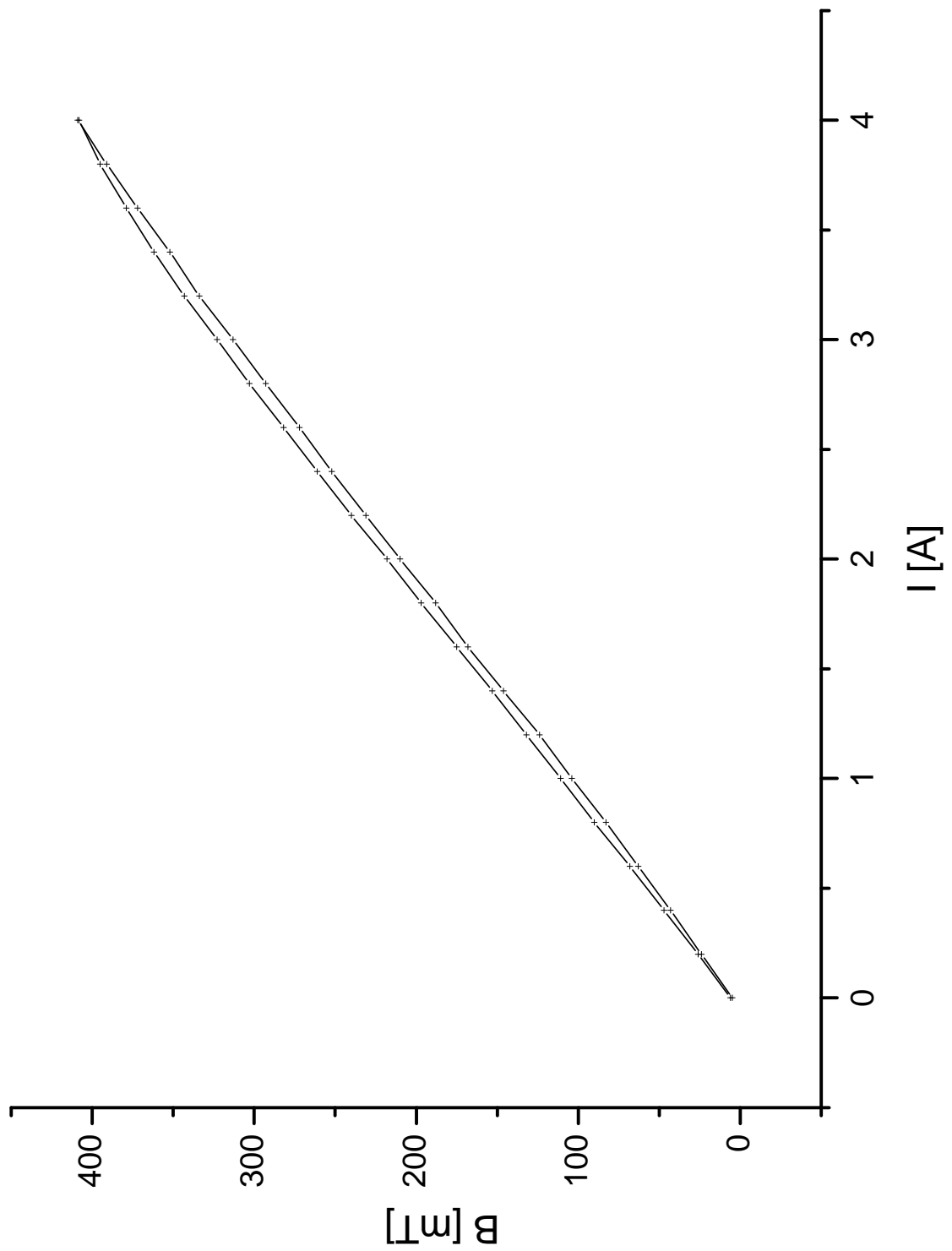


Abbildung 5: Hysteresekurve des verwendeten Elektromagneten

	Kupfer	Tantal
$n\bar{\tau} [\frac{s}{m^3}]$	$3,87 \cdot 10^{15}$	$4,96 \cdot 10^{14}$
$n [\frac{1}{m^3}]$	$1,02 \cdot 10^{29}$	$4,39 \cdot 10^{28}$
$z [\frac{1}{\text{Atom}}]$	1,197	0,795
$\bar{\tau} [s]$	$3,82 \cdot 10^{-14}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
$\bar{v}_d [\frac{m}{s}]$	$6,15 \cdot 10^{-5}$	$1,42 \cdot 10^{-4}$
$\mu [\frac{Cs}{kg}]$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$9,92 \cdot 10^{-4}$
$E_F [J]$	$1,27 \cdot 10^{-18}$	$7,27 \cdot 10^{-19}$
$v [\frac{m}{s}]$	$1,67 \cdot 10^6$	$1,26 \cdot 10^6$
$\bar{l} [m]$	$6,38 \cdot 10^{-8}$	$1,43 \cdot 10^{-8}$

**Tabelle 4:** mikroskopische Leitfähigkeitsparameter

## A. Anhang

### A.1. Literatur

- [1] Die Abbildungen im Theorieteil stammen aus der Versuchsanleitung (<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/INHALTneu.htm>).
- [2] Stöcker, Horst – Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch

### A.2. Messdaten

Angefügt in Kopie.