

Versuch 104 – Der Doppler-Effekt

Marco Lafrentz Philipp Leser

24.01.2006 – Abtestiert am 31.01.2006

Ziel des durchgeführten Versuchs sind die experimentelle Überprüfung der Formeln des Doppler-Effektes und die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	2
2. Versuchsaufbau und Durchführung	2
2.1. Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger	2
2.2. Messung der Schallgeschwindigkeit	3
2.3. Messung der Frequenz	4
3. Auswertung	5
3.1. Die Geschwindigkeit des Wagens	5
3.2. Bestimmung der Ruhfrequenzen	8
3.3. Ermittlung der Schallgeschwindigkeit c	8
3.4. Messung des Doppler-Effekts mit der Schwebungsmethode	11
3.5. Messung des Doppler-Effekts mit der direkten Messung der Frequenz	13
3.6. Vergleich der Ergebnisse mit dem STUDENT'schen t -Test	15
3.6.1. Vergleich der Schwebungsmessung mit der direkten Messung	15
3.6.2. Vergleich der Schwebungsmessung mit der Wellenlängemethode	16
3.6.3. Vergleich der direkten Messung mit der Wellenlängemethode	16
A. Anhang	17
A.1. Literatur	17
A.2. Messdaten	17

1. Theorie

Der Doppler-Effekt ist bei jeder Form von Wellen zu beobachten. Hervorgerufen wird er durch eine Relativbewegung zwischen Quelle und Empfänger.

Sollte, wie in diesem Versuch, ein Medium als Träger der Welle dienen, so werden Bewegungen der Quelle und des Empfängers bezüglich des Mediums beschrieben. Man muss Bewegungen der Quelle und des Empfängers getrennt betrachten:

Im Ruhezustand nimmt der Empfänger die von der Quelle ausgesandte Frequenz ν_0 wahr.

Bewegt sich der Empfänger mit einer Geschwindigkeit v relativ zu einer ruhenden Quelle, so überstreicht er bei $v > 0$ mehr und bei $v < 0$ weniger Wellenzüge und registriert eine Frequenz

$$\nu_E = \nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (1.1)$$

wobei $c = \nu_0 \lambda_0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Die Frequenzänderung beträgt somit

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v}{c}. \quad (1.2)$$

Im anderen Fall, bewegt sich nur die Quelle mit einer Geschwindigkeit v relativ zum Medium. Ein ruhender Empfänger nimmt somit bei $v > 0$ eine verkürzte und bei $v < 0$ eine verlängerte Wellenlänge wahr und registriert eine Frequenz

$$\nu_E = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (1.3)$$

2. Versuchsaufbau und Durchführung

Unser Ziel ist es nun die soeben hergeleiteten Formeln 1.1 und 1.3 experimentell zu überprüfen. Hierzu gliedert sich unser Versuch in drei Teile.

2.1. Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger

Für die erste Messung, die Messung der relativen Geschwindigkeiten, verwenden wir einen Versuchsaufbau nach Abbildung 1.

Durchläuft der Wagen die erste Lichtschranke, so springt der hinter dem Fototransistor geschaltete SCHMITT-Trigger auf L-Potential. Dadurch wird das folgende UND-Gatter ebenfalls auf L-Potential gesetzt. Dies führt dazu, dass der T-Eingang des Flip-Flip-Gatters von H-Potential auf L-Potential wechselt und der Zustand des Q-Ausgangs, zuvor mit L-Potential initialisiert, auf H-Potential springt. Jedesmal wenn der Untersetzer ein H-Potential schaltet, läuft nun das Zählwerk eine Stelle weiter. Folglich kann man über die Einstellung des Untersetzers und den Daten der Zeitbasis eine Zeitmessung Δt in bestimmter Genauigkeit vornehmen. Durchläuft der Wagen die zweite Lichtschranke, so geschieht prinzipiell das

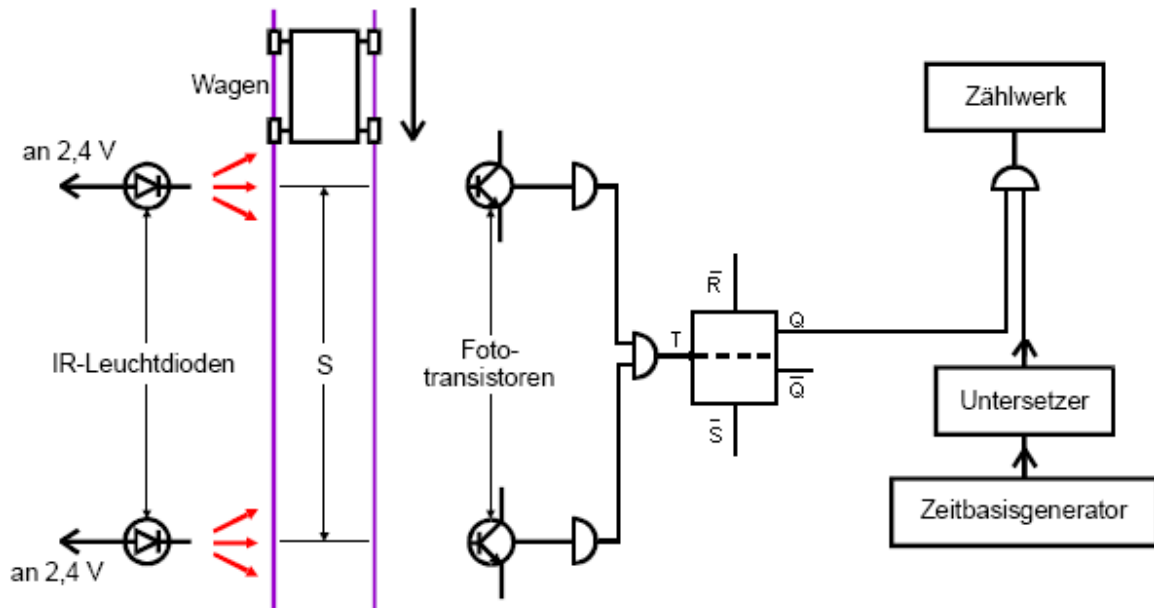


Abbildung 1: Versuchsaufbau zur Messung der Wagengeschwindigkeit

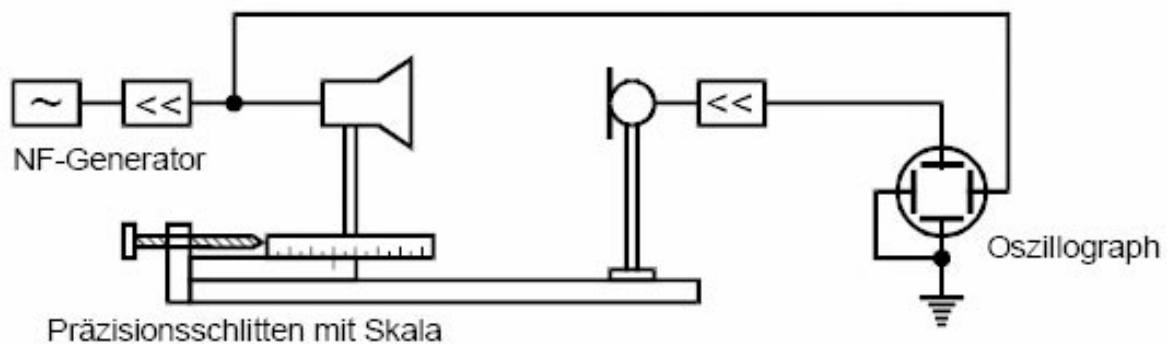


Abbildung 2: Versuchsaufbau zur Schallgeschwindigkeitsmessung

gleiche, ausser, dass der Q-Ausgang nun von H-Potential zu L-Potential wechselt und die Zeitmessung stoppt.

Um aus der gemessenen Zeit, die Geschwindigkeit v zu ermitteln, messen wir den Abstand Δx der beiden Leuchtdioden. Wir berechnen $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Wir wiederholen diese Messung für jede mögliche Geschwindigkeit.

2.2. Messung der Schallgeschwindigkeit

Im zweiten Abschnitt des Versuchs, bestimmen wir die Schallgeschwindigkeit c in Luft. Hierzu verwenden wir einen Versuchsaufbau nach Abbildung 2.

Der Empfänger steht dem Sender auf einem Präzisionsschlitten gegenüber. Das Signal der Quelle und des Empfängers werden gleichzeitig auf den X- bzw. Y-Eingang eines Oszillographen geschaltet. Die zu beobachtenden Figures, sind ein Maß für die Phasendifferenz beider Signale. Verschiebt man den Präzisionsschlitten

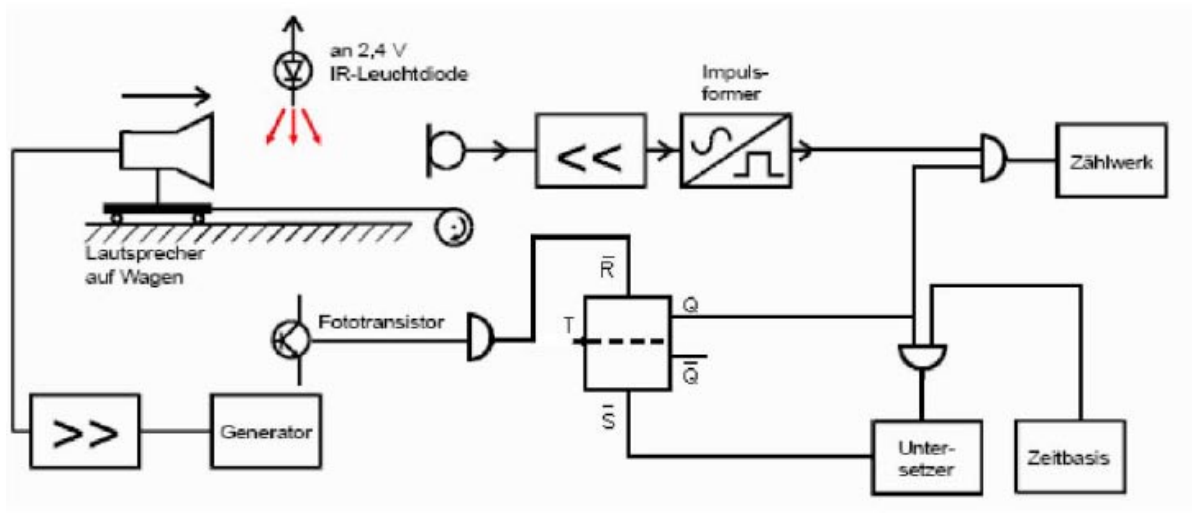


Abbildung 3: Versuchsaufbau zur Messung der Frequenz

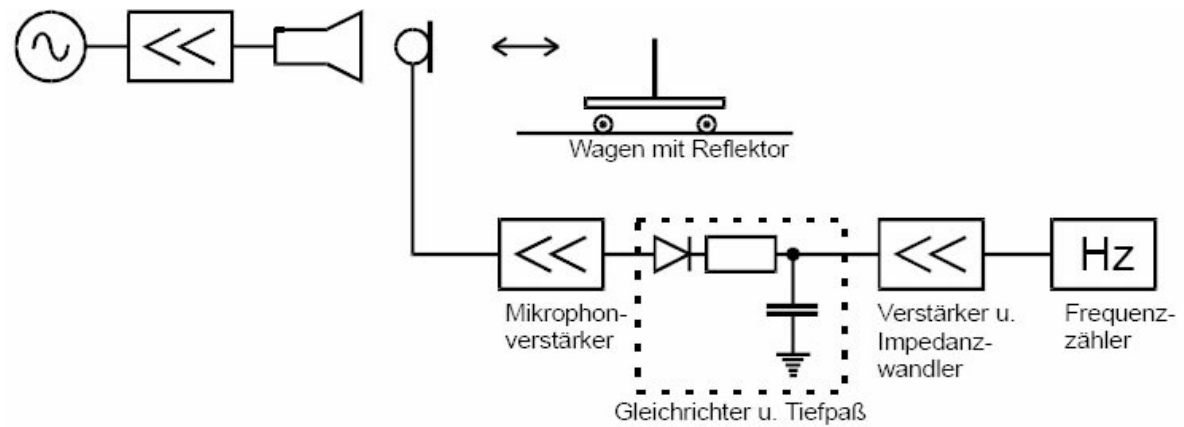


Abbildung 4: Versuchsaufbau für die Messung der Frequenzänderung mit der Schwebungsmethode

bis die Signale in Phase sind und misst den Abstand, so entspricht dieser der Wellenlänge λ . Über die Frequenz ν berechnet sich die Schallgeschwindigkeit $c = \lambda\nu$.

2.3. Messung der Frequenz

In dem dritten und letzten Abschnitt messen wir die Frequenzen bei unterschiedlichen Relativgeschwindigkeiten. Hierzu verwenden wir einen Aufbau nach Abbildung 3.

Das Unterbrechen der Lichtschranke startet die Messung. Das Zählwerk zählt für jeden Wellenzug, der vom Mikrophon registriert wurde und mittels eines Impulsformers in ein elektrisches Signal umgewandelt wird, eine Stelle weiter. Nach einer Sekunde, also nach 10^6 Impulsen aus der Zeitbasis ($1 \frac{\text{Impuls}}{\mu\text{s}}$), stoppt der Unter-setzer die Messung. Die vom Zähler angezeigte Zahl entspricht somit direkt

der Frequenz ν_E , die als Impulse pro Sekunde definiert ist. Die Frequenzänderung

$$\Delta\nu = \Delta\nu_E - \nu_0$$

die sich aus dem Doppler-Effekt ergibt, lässt sich auch über die sogenannte Schwebungsmethode bestimmen. Hierzu wird der Aufbau aus Abbildung 3 gemäß Abbildung 4 verändert. Das Mikrophon, hinter dem Sender positioniert, registriert ein Schallfeld der Form:

$$A(t) = 2A_0 \cos\left(2\pi\frac{2\nu_0 t + \Delta\nu t}{2}\right) \cos\left(2\pi\frac{\Delta\nu t}{2}\right).$$

Dieses ist eine Überlagerung aus dem reflektierten Schallfeld und dem der Quelle. Um direkt die Frequenzänderung $\Delta\nu$, die der Frequenz der Schwebung entspricht, messen zu können, lassen wir einen Tiefpass die höheren Frequenzen der Trägerwellen herausfiltern.

Da wir in unserem Experiment nur ganzzahlige Frequenzänderungen messen können, der Unterschied zwischen Gleichung 1.1 und 1.3 jedoch im Bereich < 1 liegt, unterscheiden wir diese Formen der Relativbewegungen nicht.

3. Auswertung

3.1. Die Geschwindigkeit des Wagens

Die Bestimmung der Geschwindigkeit erfolgt über eine Längenmessung der Messstrecke sowie über Messungen der benötigten Zeit, um diese zu durchfahren.

Zunächst muss die Länge der Messstrecke bestimmt werden: Da die Sender und Empfänger der Lichtschranken nicht exakt gegenüber platziert sind, ist es notwendig, den Abstand sowohl einerseits zwischen den beiden Sendern als auch zwischen den beiden Empfängern zu messen. Da das Metallplättchen, das den Lichtstrahl unterbricht näher am Sender angebracht ist, wird die Länge zwischen den Sendern bei der Mittelwertbildung fünffach gewichtet. Dazu wird folgende Formel benutzt:

$$\langle l \rangle = \frac{5l_S + l_E}{6}$$

Auf die Messungen mit dem Maßband ist eine Ungenauigkeit von

$$\sigma_l = 0.3 \text{ cm}$$

anzunehmen. Mit GAUSS'scher Fehlerfortpflanzung erhält man dann eine Ungenauigkeit für den Mittelwert:

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle l \rangle} &= \sqrt{\sigma_{l_S}^2 \left. \frac{\partial \langle l \rangle}{\partial l'_S} \right|_{l'_S=l_S}^2 + \sigma_{l_E}^2 \left. \frac{\partial \langle l \rangle}{\partial l'_E} \right|_{l'_E=l_E}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{6} \cdot 0.3 \text{ cm}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} \cdot 0.3 \text{ cm}\right)^2} \\ &= 0.26 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tabelle 1: Längenmessung. σ ist der absolute Fehler, r der relative.

	Länge [cm]	σ [cm]	r
l_S	41.7	0.3	0.72 %
l_E	41.9	0.3	0.72 %
$\langle l \rangle$	41.73	0.26	0.61 %

Damit erhält man die gemittelte Länge aus Tabelle 1.

Für die Geschwindigkeitsberechnung benötigt man ebenfalls die Zeit, die der Wagen benötigt, um die Messstrecke zu durchfahren. Der Messwagen wird bei allen möglichen Getriebestellungen jeweils fünf mal in beide Richtungen durch die Messstrecke gefahren. Die Schaltung zählt dabei die verstrichene Zeitdauer. Der Mittelwert der einzelnen Messungen wird bestimmt mit (für N Messungen)

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k.$$

Die Ungenauigkeit auf dem Mittelwert errechnet sich aus der Standardabweichung

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (t_k - \langle t \rangle)^2}$$
 wie folgt:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{N}}$$

Die Formeln für den Mittelwert sowie die Ungenauigkeiten werden im gesamten Protokoll benutzt.

Mit den gemittelten Zeiten $\langle t \rangle$ sowie der Länge l kann man nun die Geschwindigkeiten v ausrechnen:

$$v = \frac{l}{\langle t \rangle}$$

Der relative Fehler auf die Geschwindigkeit lässt sich mit der GAUSS'schen Fehlerfortpflanzung berechnen:

$$r_v = \sqrt{r_{\langle t \rangle}^2 + r_l^2}$$

Die Rechnungen und Ergebnisse finden sich in der Tabelle 2.

Tabelle 2: Berechnungen für die gemittelten Zeiten und Geschwindigkeiten mit Ungenauigkeiten. Die Indizes v bezeichnen die Vorwärtsrichtung (hin zum Mikrofon), die Indizes r die entgegengesetzte Richtung.

Gang:	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6
$t_v [100\mu s]$	8225	9240	10305	11787	14029	17144	22276	29738	45488	90864
	8346	9235	10354	11784	13719	16526	22298	28543	45506	91742
	8352	9284	10370	11783	13772	16495	22293	29414	41674	91554
	8401	9267	10297	11805	13715	16458	21618	29329	41107	91665
	8349	9140	10307	11764	14264	16444	22557	29391	44955	91884
	8307									
$\sigma_{t_v} [100\mu s]$	59.49	55.81	33.02	14.57	241.09	298.35	349.95	443.16	2170.91	397.47
$\langle t_v \rangle [100\mu s]$	8330	9233.2	10326.6	11784.6	13899.8	16613.4	22208.4	29283	43746	91541.8
$\sigma_{\langle t_v \rangle} [100\mu s]$	24.29	24.96	14.77	6.52	107.82	133.42	156.5	198.19	970.86	177.75
$r_{\langle t_v \rangle} [\%]$	0.29	0.27	0.14	0.06	0.78	0.80	0.70	0.68	2.22	0.19
$t_r [100\mu s]$	8205	9355	10457	11812	13716	16840	21042	27433	41265	86004
	8445	9379	10423	11775	14031	16831	21419	27483	45336	91256
	8430	9350	10450	11780	13718	16750	21723	28400	41181	91122
	8416	9323	10473	11787	14447	17212	20962	29255	41143	91088
	8431	9397	10416	11770	13693	16745	20609	28423	41122	91563
	8419									
$\sigma_{t_r} [100\mu s]$	91.70	28.38	23.83	16.45	325.57	193.17	430.22	759.13	1860.43	2356.78
$\langle t_r \rangle [100\mu s]$	8391	9360.8	10443.8	11784.8	13921	16875.6	21151	28198.8	42009.4	90206.6
$\sigma_{\langle t_r \rangle} [100\mu s]$	37.44	12.69	10.66	7.36	145.6	86.39	192.4	339.49	832.01	1053.99
$r_{\langle t_r \rangle} [\%]$	0.45	0.14	0.10	0.06	1.05	0.51	0.91	1.20	1.98	1.17
$v_v [\frac{m}{s}]$	0.50100	0.45199	0.40413	0.35413	0.30024	0.25120	0.18792	0.14252	0.09540	0.04559
$\sigma_{v_v} [\frac{m}{s}]$	0.00334	0.00297	0.00249	0.00213	0.00294	0.00252	0.00174	0.00129	0.00219	0.00029
$r_{v_v} [\%]$	0.67	0.66	0.62	0.60	0.98	1.00	0.93	0.90	2.30	0.63
$v_r [\frac{m}{s}]$	0.49736	0.44583	0.39960	0.35413	0.29979	0.24730	0.19731	0.14800	0.09934	0.04626
$\sigma_{v_r} [\frac{m}{s}]$	0.00372	0.00274	0.00243	0.00213	0.00361	0.00195	0.00215	0.00199	0.00206	0.00061
$r_{v_r} [\%]$	0.75	0.61	0.61	0.60	1.21	0.79	1.09	1.34	2.07	1.31

3.2. Bestimmung der Ruhfrequenzen

Mit einer digitalen Schaltung werden die Ruhfrequenzen f der sieben Einstellungsmöglichkeiten jeweils mehrfach gemessen und die Mittelwerte bestimmt: Man erkennt deutlich, dass die Fehler unterhalb der Genauigkeit der Messappara-

Tabelle 3: Frequenzmessung

Frequenzeinstellung	f [Hz]					$\langle f \rangle$ [Hz]	σ_f [Hz]	r_f [%]
1	21703	21702	21703	21702		21702.50	0.29	0.0013
2	20742	20742	20742	20742		20742.00	0.00	0.0000
3	20166	20166	20166	20166		20166.00	0.00	0.0000
4	19589	19589	19589	19589		19589.00	0.00	0.0000
5	19398	19398	19398	19397		19397.75	0.25	0.0013
6	19205	19205	19206	19206	19206	19205.60	0.24	0.0013
7	19013	19014	19013	19014	19014	19013.60	0.24	0.0013

tur liegen: Diese arbeitet nur auf 1 Hz genau. Im weiteren Verlauf werden die hier ermittelten Frequenzen daher als fehlerfrei angenommen.

3.3. Ermittlung der Schallgeschwindigkeit c

Zunächst werden für die sieben Frequenzeinstellungen vier Punkte gleicher oder entgegengesetzter Phase mit der Mikrometerschraube eingestellt. Die Abstände zwischen diesen Punkten entsprechen dann jeweils einer halben Wellenlänge. Die gemessenen Positionen x finden sich in Tabelle 4. Aus den Differenzen lassen sich

Tabelle 4: Positionen x der Mikrometerschraube für gleiche bzw. entgegengesetzte Phase

Frequenzeinstellung	x [mm]			
1	49.73	41.72	33.59	25.52
2	48.35	39.97	31.40	23.05
3	45.69	36.93	27.23	19.54
4	42.61	33.66	24.69	15.65
5	47.45	38.40	29.39	19.25
6	43.37	33.18	24.04	15.85
7	48.51	39.38	29.34	20.04

nun leicht die Wellenlängen errechnen, wobei bei den Fehlern zu beachten ist, dass die relativen Fehler der Differenzen d und der Wellenlängen λ gleich groß sind, während die absoluten Fehler der Wellenlängen jeweils doppelt so groß sind wie die absoluten Fehler der halben Wellenlängen d . Die Ergebnisse der Wellenlängenberechnung sind in der Tabelle 5 aufgeführt. Die Schallgeschwindigkeit c kann

Tabelle 5: Bestimmung der Wellenlänge λ . Der absolute Fehler der Wellenlänge ist doppelt so groß wie der absolute Fehler der halben Wellenlänge d , die relativen Fehler r sind gleich groß.

Frequenzeinstellung	d [mm]			$\langle d \rangle$ [mm]	$\sigma_{\langle d \rangle}$ [mm]	r [%]	λ [mm]	σ_{λ} [mm]
1	8.01	8.13	8.07	8.07	0.03	0.43	16.14	0.07
2	8.38	8.57	8.35	8.43	0.07	0.82	16.87	0.14
3	8.76	9.70	7.69	8.72	0.58	6.66	17.43	1.16
4	8.95	8.97	9.04	8.99	0.03	0.30	17.97	0.05
5	9.05	9.01	10.14	9.40	0.37	3.94	18.80	0.74
6	10.19	9.14	8.19	9.17	0.58	6.30	18.35	1.16
7	9.13	10.14	9.20	9.49	0.33	3.43	18.98	0.65

nun bestimmt werden mit

$$c = f\lambda.$$

Es werden nun die ermittelten Wellenlängen λ und die im letzten Abschnitt aufgeführten Frequenzen f (Tabelle 3) genutzt, um die Schallgeschwindigkeit für jede Frequenzeinstellung auszurechnen. Hierbei folgt der Fehler auf die einzelnen Schallgeschwindigkeiten c aus dem Fehler auf die Wellenlängenberechnung: Die relativen Fehler bleiben gleich, der absolute Fehler lässt sich daraus durch Multiplikation mit c errechnen. Theoretisch sollten die berechneten Schallgeschwindig-

Tabelle 6: Berechnung der Schallgeschwindigkeit c .

Frequenzeinstellung	c [$\frac{m}{s}$]	σ_c [$\frac{m}{s}$]	r_c [%]
1	350.28	1.50	0.43
2	349.85	2.86	0.82
3	351.56	23.42	6.66
4	352.08	1.07	0.30
5	364.68	14.36	3.94
6	352.36	22.19	6.30
7	360.88	12.38	3.43

keiten gleich sein, was die Bildung eines Mittelwerts sinnvoll macht. Aufgrund der starken Abweichungen bei den Fehlern der errechneten Schallgeschwindigkeiten c bietet sich ein gewichteter Mittelwert an, in dem die quadratischen absoluten Fehler als Gewichte fungieren:

$$\langle c \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{c_k}^2} c_k}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{c_k}^2}}$$

Der absolute Fehler auf diesen Mittelwert wird berechnet mit

$$\sigma_{\langle c \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{c_k}^2}}}.$$

Damit erhält man für die gemittelte Schallgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\langle c \rangle &= (351.43 \pm 0.83) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 351.43 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0.24 \text{ \%}.\end{aligned}$$

Zum Vergleich der beiden Formeln für den DOPPLER-Effekt bei bewegtem Sender und bewegtem Empfänger, überprüfen wir die Größenordnung der Differenz der Ergebnisfrequenzen, indem wir die maximal benutzte Geschwindigkeit in die Formeln einsetzen ($f_{E,S}$ sind die Frequenzen bei bewegtem Empfänger bzw. bewegtem Sender, f_0 ist die Grundfrequenz, hier die Grundfrequenz $f_0 = 20742$ Hz der Frequenzeinstellung 2, $v_{E,S}$ sind die Geschwindigkeiten des Empfängers bzw. des Senders):

$$\begin{aligned}f_E &= f_0 \left(1 + \frac{v_E}{c}\right) \\ &= 20771.57 \text{ Hz} \\ f_S &= f_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}}\right) \\ &= 20771.61 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Die Differenz der Frequenzen beträgt dann

$$\begin{aligned}f_S - f_E &= 20771.61 \text{ Hz} - 20771.57 \text{ Hz} \\ &= 0.04 \text{ Hz} \\ &\ll 1 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Da die Auflösung des Frequenzzählers 1 Hz beträgt, kann man den Unterschied zwischen den beiden Formeln für die in diesem Versuch benutzten Geschwindigkeiten vernachlässigen.

Die gesuchte Kenngröße $\kappa = \frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$ ist dann bei der auch in den nächsten Abschnitten benutzten Frequenzeinstellung 2 ($f = 20742$ Hz ist die Frequenz der Einstellung 2)

$$\begin{aligned}\kappa &= (59.02 \pm 0.14) \frac{1}{\text{m}} \\ &= 59.02 \frac{1}{\text{m}} \pm 0.24 \text{ \%}.\end{aligned}$$

Der relative Fehler der Größe entspricht dem relativen Fehler der Schallgeschwindigkeit.

3.4. Messung des Doppler-Effekts mit der Schwebungsmethode

Für die Schwebungsmethode wird der Wagen in den verschiedenen Geschwindigkeiten rückwärts über die Messstrecke gefahren und die Schwebungsfrequenz über ein Intervall von 1 s gemessen, wobei die Schallquelle einen Ton mit der Frequenzeinstellung 2 sendet. Die Differenzen werden bei jeder Getriebestufe fünfmal aufgenommen und schließlich gemittelt: Zu beachten ist, dass bei dieser Mess-

Tabelle 7: Gemessene Schwebungsfrequenzen f bei verschiedenen Geschwindigkeiten $2v$.

Gang	$2v_r [\frac{m}{s}]$	f [Hz]					$\langle f \rangle$ [Hz]	$\sigma_{\langle f \rangle}$ [Hz]
60	0.99472	60	60	60	59	60	59.8	0.2
54	0.89166	54	54	54	54	54	54.0	0.0
48	0.79920	48	48	48	48	49	48.2	0.2
42	0.70826	42	42	42	42	42	42.0	0.0
36	0.59957	36	36	37	36	36	36.2	0.2
30	0.49460	30	29	29	29	30	29.4	0.3
24	0.39462	24	24	24	24	24	24.0	0.0
18	0.29599	18	18	18	18	18	18.0	0.0
12	0.19869	13	13	13	13	13	13.0	0.0
6	0.09253	7	7	7	7	7	7.0	0.0

methode nicht die tatsächliche Wagengeschwindigkeit v_r , sondern die doppelte Wagengeschwindigkeit $2v_r$ zu benutzen ist. Die Messwerte aus der Tabelle 7 werden einer linearen Regression unterzogen, der dazugehörige Plot ist in Abbildung 5 aufgeführt. Die Ergebnisse der Regression mit einer Funktion der Art $f(x) = \kappa x + b$ sind (mit dem Programm `GNUPLOT` ermittelt):

$$\begin{aligned} \kappa &= (58.902 \pm 0.544) \frac{1}{\text{m}} \\ &= 58.902 \frac{1}{\text{m}} \pm 0.923 \% \\ b &= (0.9416 \pm 0.3361) \text{ Hz} \\ &= 0.9416 \text{ Hz} \pm 35.70 \% \end{aligned}$$

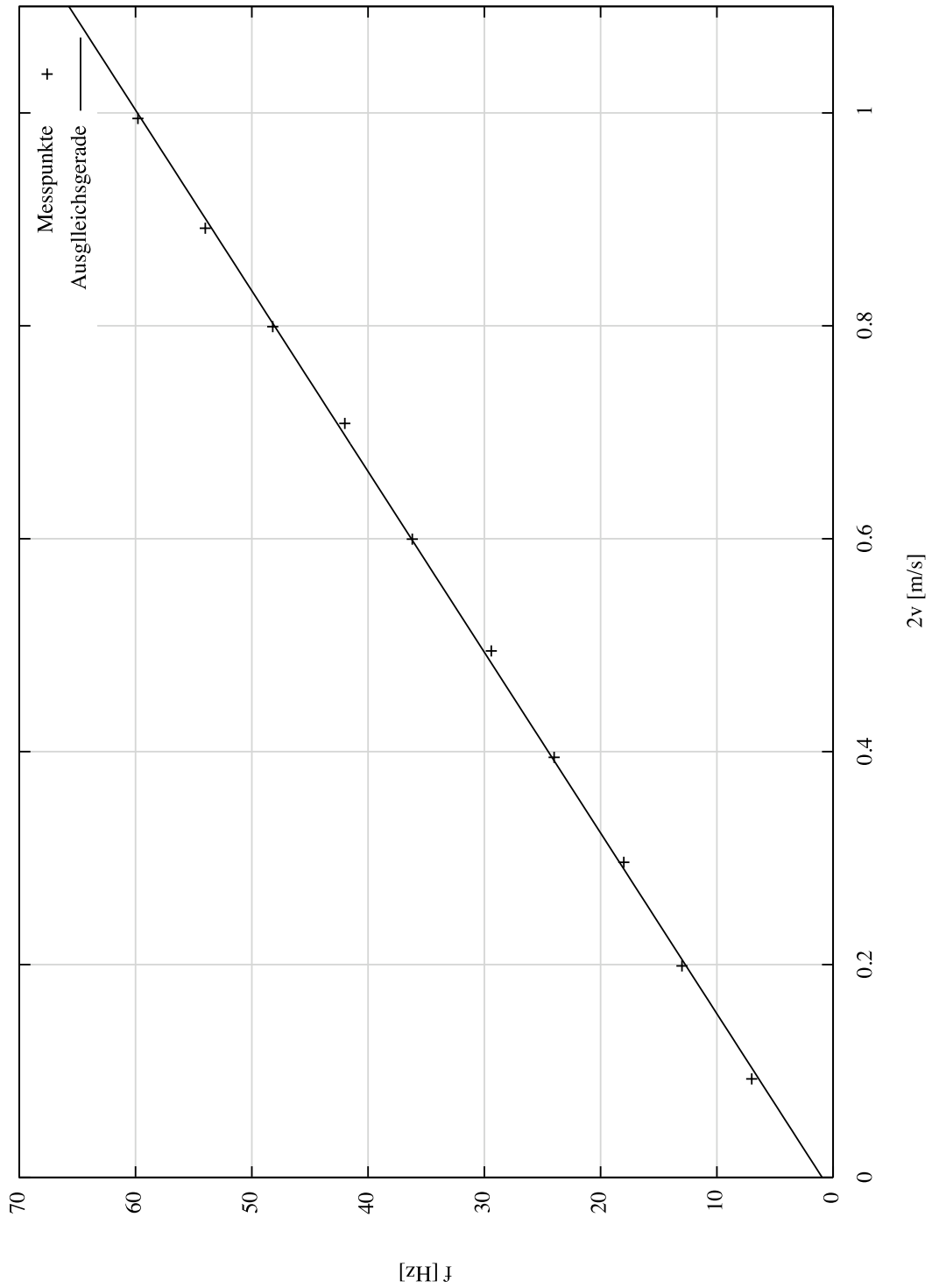


Abbildung 5: Regressionsrechnung für die Messung der Frequenzdifferenz mit der Schwebungsmethode (Messwerte in der Tabelle 7. Die Fehlerbalken sind klein gegen die Größe der Messpunkte.

3.5. Messung des Doppler-Effekts mit der direkten Messung der Frequenz

Auch hier wird die Frequenzeinstellung 2 benutzt. Der Wagen wird jedoch vorwärts und rückwärts über die Messstrecke gefahren und es werden jeweils fünf Messungen der Frequenz vorgenommen. Die Differenz der Frequenz errechnet sich mit $\Delta f = f_0 - f_{\text{gemessen}}$. Die Messwerte finden sich in der folgenden Tabelle 8. Wie bei der Messung mit der Schwebungsmethode wird nun eine lineare Re-

Tabelle 8: Messwerte für die direkte Frequenzmessung; negative Geschwindigkeiten bezeichnen eine Rückwärtsbewegung, positive eine Vorwärtsbewegung des Wagens.

$v[\frac{m}{s}]$	$f[\text{Hz}]$					$\langle f \rangle [\text{Hz}]$	$\sigma_{\langle f \rangle} [\text{Hz}]$	$\Delta f [\text{Hz}]$
-0.49736	20712	20712	20712	20712	20712	20712.00	0.00	-30.00
-0.44583	20716	20715	20715	20715	20715	20715.20	0.20	-26.80
-0.39960	20719	20718	20718	20718	20718	20718.20	0.20	-23.80
-0.35413	20721	20721	20720	20723	20721	20721.20	0.49	-20.80
-0.29979	20725	20724	20725	20724	20724	20724.40	0.24	-17.60
-0.24730	20727	20727	20728	20728	20728	20727.60	0.24	-14.40
-0.19731	20730	20730	20730	20731	20730	20730.20	0.20	-11.80
-0.14800	20732	20733	20733	20732	20733	20732.60	0.24	-9.40
-0.09934	20736	20736	20735	20736	20736	20735.80	0.20	-6.20
-0.04626	20738	20738	20739	20738	20738	20738.20	0.20	-3.80
0.50100	20769	20769	20770	20770	20769	20769.40	0.24	27.40
0.45199	20765	20766	20765	20768	20765	20765.80	0.58	23.80
0.40413	20763	20762	20762	20763	20761	20762.20	0.37	20.20
0.35413	20757	20759	20758	20757	20759	20758.00	0.45	16.00
0.30024	20758	20757	20757	20757	20756	20757.00	0.32	15.00
0.25120	20754	20756	20756	20754	20756	20755.20	0.49	13.20
0.18792	20754	20755	20753	20753	20754	20753.80	0.37	11.80
0.14252	20751	20752	20751	20750	20751	20751.00	0.32	9.00
0.09540	20749	20748	20747	20748	20748	20748.00	0.32	6.00
0.04559	20745	20745	20745	20745	20745	20745.00	0.00	3.00

gression der Frequenzdifferenz gegen die Wagengeschwindigkeit ausgeführt (Abbildung 6). Dabei erhält man folgende Ergebnisse für die Parameter der Funktion $f(x) = \kappa x + b$:

$$\begin{aligned} \kappa &= (55.981 \pm 0.898) \frac{1}{\text{m}} \\ &= 55.981 \frac{1}{\text{m}} \pm 1.60 \% \\ b &= (-0.9578 \pm 0.2782) \text{ Hz} \\ &= -0.9578 \pm 29.05 \% \end{aligned}$$

Bei den Messwerten der Vorwärtsbewegung erkennt man deutliche Abweichungen von der Geraden, die auf unregelmäßigen Bewegungen des Wagens bei dieser Messrichtung beruhen.

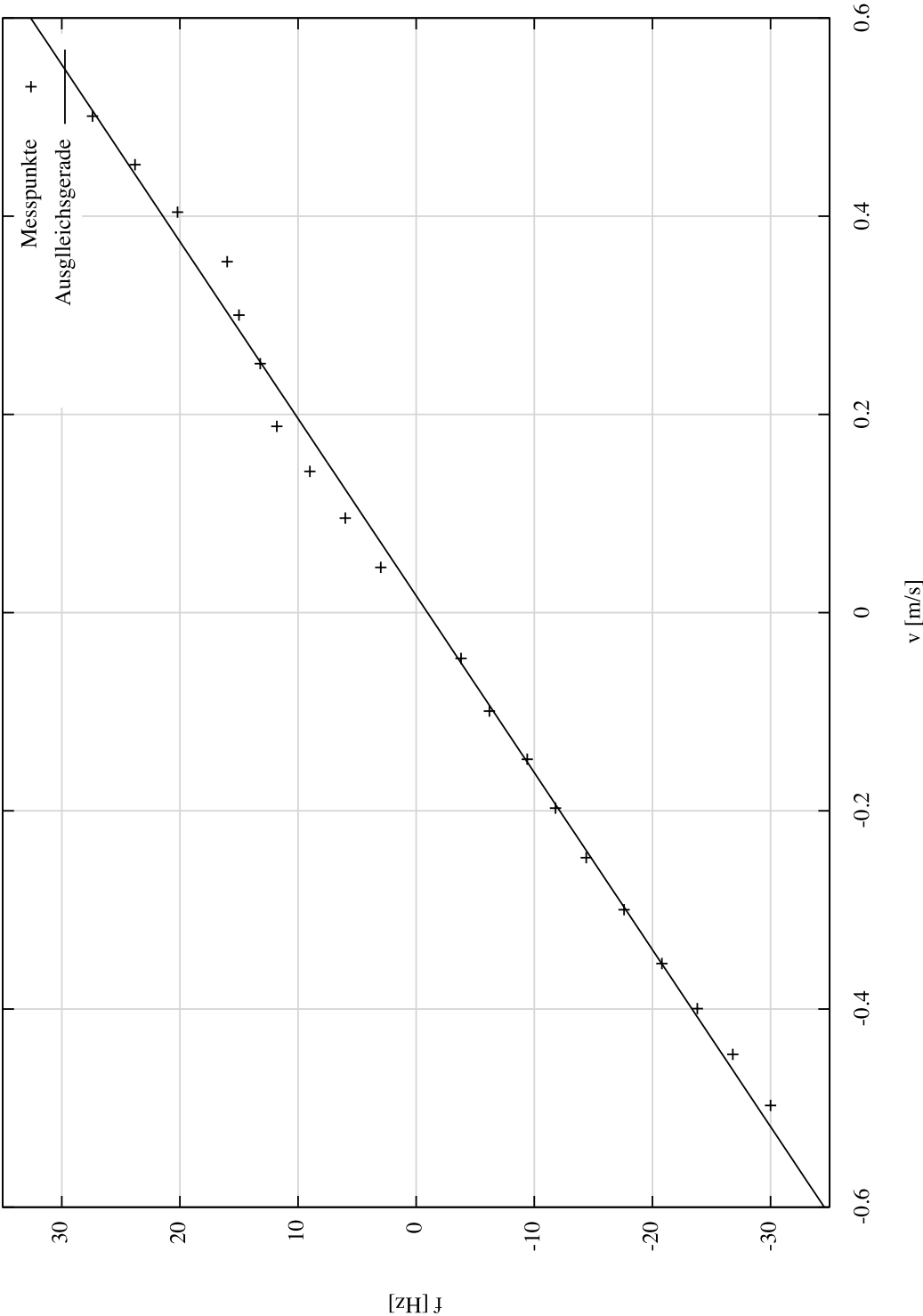


Abbildung 6: Regressionsrechnung für die direkte Messung der Frequenzen (Messwerte in der Tabelle 8)

3.6. Vergleich der Ergebnisse mit dem STUDENT'schen t -Test

Abschließend vergleichen wir die drei Messmethoden für die Größe κ mit einem STUDENT'schen t -Test. Mit diesem Test lässt sich eine Hypothese überprüfen, ob zwischen den Messungen ein systematischer Fehler liegt. Man benutzt dazu die Kenngröße

$$t = \frac{x_a - x_b}{s_D}.$$

Hierbei sind die x_a und x_b die Mittelwerte der beiden Messreihen. Für die Größe s_D gilt

$$s_D^2 = \frac{s_a^2(n_a - 1) + s_b^2(n_b - 1)}{n_a + n_b - 2} \cdot \frac{n_a + n_b}{n_a n_b}.$$

Mit den s_a und s_b bezeichnen wir die jeweiligen Fehler der Mittelwerte, die n_a und n_b bezeichnen die Anzahl der Messungen für jeden Wert. Man kann nun in einer Tabelle den errechneten Wert für t mit Werten vergleichen, die für bestimmte Freiheitsgrade ($n_a + n_b - 2$) und ein festgelegtes Signifikanzintervall den maximalen Wert für t darstellen, bei dem noch keine systematischen Fehler vorliegen.

3.6.1. Vergleich der Schwebungsmessung mit der direkten Messung

Aus den Ergebnissen der entsprechenden Methoden entnimmt man

$$\begin{aligned}x_a &= 58.902 \frac{1}{\text{m}} \\x_b &= 55.981 \frac{1}{\text{m}} \\s_a &= 0.544 \frac{1}{\text{m}} \\s_b &= 0.898 \frac{1}{\text{m}} \\n_a &= 50 \\n_b &= 100.\end{aligned}$$

Damit erhält man einen Wert für s_D und t von

$$\begin{aligned}s_D &= 0.138 \frac{1}{\text{m}} \\t &= 21.124.\end{aligned}$$

Der Wert ist zu vergleichen mit dem Tabellenwert für t auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.001$ und 148 Freiheitsgraden:

$$21.124 > 3.291$$

Es liegt also mit 99.9 % Wahrscheinlichkeit ein systematischer Fehler vor.

3.6.2. Vergleich der Schwebungsmessung mit der Wellenlängemethode

$$x_a = 59.020 \frac{1}{\text{m}}$$

$$x_b = 58.902 \frac{1}{\text{m}}$$

$$s_a = 0.140 \frac{1}{\text{m}}$$

$$s_b = 0.544 \frac{1}{\text{m}}$$

$$n_a = 28$$

$$n_b = 50.$$

Also sind

$$s_D = 0.105 \frac{1}{\text{m}}$$

$$t = 1.124.$$

Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.32$ und 76 Freiheitsgraden erhält man einen Vergleich von:

$$1.124 > 1.02$$

Damit liegt mit 68 % Wahrscheinlichkeit ein systematischer Fehler vor.

3.6.3. Vergleich der direkten Messung mit der Wellenlängenmethode

$$x_a = 59.020 \frac{1}{\text{m}}$$

$$x_b = 55.981 \frac{1}{\text{m}}$$

$$s_a = 0.140 \frac{1}{\text{m}}$$

$$s_b = 0.898 \frac{1}{\text{m}}$$

$$n_a = 28$$

$$n_b = 100.$$

Also sind hier

$$s_D = 0.171 \frac{1}{\text{m}}$$

$$t = 17.798.$$

Bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ und 126 Freiheitsgraden erhält man einen Vergleich von:

$$17.798 > 3.373$$

Damit liegt mit 99.9 % Wahrscheinlichkeit ein systematischer Fehler vor.

A. Anhang

A.1. Literatur

- [1] Die Abbildungen im Theorieteil, sowie die Tabellenwerte für den STUDENT'schen t -Test stammen aus dem Praktikumsskript (<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/INHALTneu.htm>).

A.2. Messdaten

Messdaten angefügt in Kopie.