

Versuch 401 – Das Michelson-Interferometer

Marco Lafrentz Philipp Leser

13.06.2006 – Abtestiert in der KW 26

Ziel des Versuchs ist die Wellenlängenbestimmung von Lichtquellen mithilfe eines MICHELSON-Interferometers, sowie die Messung des Brechungsindex von Gasen.

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	2
1.1. Interferenzerscheinungen bei ebenen Wellen	2
1.2. Die Kohärenz elektromagnetischer Strahlung	2
1.2.1. Bedingungen an interferenzfähige Lichtquellen	3
2. Versuchsaufbau und Durchführung	4
3. Auswertung	7
3.1. Bestimmung der Wellenlänge eines He-Ne-Lasers	7
3.2. Bestimmung der Brechungsindizes von CO ₂ und Luft	7
3.3. Bestimmung der Wellenlängendifferenz zweier Duplettlinien einer Natriumdampflampe	8
3.4. Diskussion der Ergebnisse	9
A. Anhang	10
A.1. Literatur	10
A.2. Messdaten	10

1. Theorie

Wesentlich für das Verständnis der Funktionsweise des MICHELSON-Interferometers sind die Begriffe der Kohärenz und Interferenz, die in den folgenden Abschnitten erläutert werden sollen.

1.1. Interferenzerscheinungen bei ebenen Wellen

Es wird zunächst von ebenen Wellen ausgegangen, die sich durch

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t - \delta)$$

beschreiben lassen. Hierbei sind x und t die Orts- bzw. Zeitkoordinaten, \vec{E}_0 die Amplitude der Welle, k die Wellenzahl, ω die Frequenz der Welle, sowie δ ein Phasenwinkel. Aus der Linearität der MAXWELL-Gleichungen folgt ein Superpositionsprinzip für die elektrischen und magnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} . Wegen der hohen Frequenz elektromagnetischer Strahlung im sichtbaren Spektrum ist eine direkte Verifikation dieses Prinzips jedoch nicht möglich. Messbar ist nur die Intensität I der Strahlung im zeitlichen Mittel, die über

$$I \propto |\vec{E}|^2$$

mit dem elektrischen Feld zusammenhängt. Die Nichtlinearität dieses Zusammenhangs in \vec{E} führt hier zu Interferenzeffekten: Setzt man für \vec{E} die Summe zweier elektromagnetischer Wellen mit verschiedenen Phasen δ_1 und δ_2 ein, so erhält man beim Ausmultiplizieren des Betragquadrats einen Mischterm, den man als Interferenzterm bezeichnet. Für die Gesamtintensität I_{tot} der beiden Wellen gilt dann

$$I_{\text{tot}} = \text{const.} \cdot 2\vec{E}_0^2 \cos(\delta_2 - \delta_1)$$

Der Interferenzterm sorgt für eine periodische Verstärkung bzw. Auslöschung der messbaren Intensität. Das Skalarprodukt beim Ausmultiplizieren zeigt sofort, dass linear senkrecht zueinander polarisiertes Licht nicht interferenzfähig ist.

1.2. Die Kohärenz elektromagnetischer Strahlung

Die soeben beschriebenen Interferenzeffekte hängen von der Phasendifferenz der beiden ebenen Wellen ab. In der Realität hat man es jedoch beim Licht nicht mit ebenen Wellen zu tun, sondern immer mit einer Folge endlicher Wellenpakete, die aus zwei Gründen nicht ohne weiteres interferenzfähig sind:

1. Die Emission von Licht durch den Übergang von Elektronen von einem höheren in einen niederenergetischen Zustand in einem Atom ist ein statistischer Vorgang, so dass der Phasenwinkel zweier aufeinanderfolgender emittierter Wellen in keinem funktionalen Zusammenhang steht.
2. Endliche Wellenpakete besitzen immer ein kontinuierliches Frequenzspektrum, was die FOURIER-Analyse leicht zeigt. Die einzelnen Komponenten des Spektrums weisen verschiedene Phasen auf, was zur Aufhebung von Interferenzeffekten führen kann.

Licht, dessen Phase nicht fest ist, sondern variiert, bezeichnet man als *inkohärent*. Interferenzfähiges Licht muss also *kohärent* sein. Ein Beispiel für eine solche Lichtquelle ist der Laser.

1.2.1. Bedingungen an interferenzfähige Lichtquellen

Betrachtet man die oben aufgeführten Gründe, warum Licht normalerweise nicht interferenzfähig ist, so kann man daraus Bedingungen ableiten, unter denen man dennoch Interferenz beobachten kann:

1. Gelingt es, den Strahl zu teilen und die optische Weglänge einer der Hälften zu verändern, so tritt Interferenz auf, solange man sicherstellt, dass die Wegänderung kurz genug ist, um die gleichen Wellenpakete zur Interferenz zu bringen. Ist der optische Weg zu lang, treffen auf dem Schirm zwei verschiedene Wellenpakete mit statistisch verschiedenen Phasen aufeinander und man beobachtet im zeitlichen Mittel wieder keine Interferenz.
2. Licht, dessen Spektrum schmal ist, besitzt weniger phasenverschiedene FOURIER-Komponenten und sollte einfacher interferenzfähig sein.

Diese Überlegungen führen zu den Begriffen der *Kohärenzlänge* und *Kohärenzzeit*. Als Kohärenzlänge bezeichnet man den optischen Wegunterschied, bei dem die Interferenzeffekte gerade verschwinden, als Kohärenzzeit bezeichnet man die Dauer des Emissionsakts des Wellenpakets.

Die beiden Begriffe hängen untereinander und mit der Breite des Frequenzspektrums des Wellenpakets zusammen: Als Breite des Frequenzspektrums bezeichnet man die Größe $\Delta\omega = 2\pi/\tau$, wobei τ die Kohärenzzeit ist (Man zeigt dies mit einer FOURIER-Transformation des Wellenpakets). Zwischen der Kohärenzlänge ℓ und -zeit τ kann man mit $\tau = \ell/c$ umrechnen, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Bisher waren mit dem Begriff *Lichtquelle* immer punktförmige Quellen gemeint. In der Realität hat man es jedoch mit ausgedehnten Lichtquellen zu tun, die man durch eine Anreihung vieler Punktquellen darstellen kann. Das Licht einer Quelle ist unter den genannten Bedingungen interferenzfähig, treffen jedoch auf den Beobachtungspunkt Strahlen aus den verschiedenen Punktquellen der ausgedehnten Lichtquelle, so tritt im Allgemeinen keine Interferenz auf, weil sich die einzelnen Interferenzeffekte der Punktquellen der ausgedehnten Lichtquelle aufheben können.

Interferenz beobachten kann man bei ausgedehnten Lichtquellen, wenn ihre Ausdehnung im Vergleich zur Wellenlänge klein ist, sie also fast als Punktquelle angesehen werden können. Genauer heißt dies, dass

$$a \sin \zeta \ll \lambda/2$$

erfüllt sein muss, wobei a die Breite und ζ der Öffnungswinkel der Lichtquelle ist.

2. Versuchsaufbau und Durchführung

Beim MICHELSON-Interferometer wird nun die Interferenz von Licht genutzt, um Wellenlängen und Brechungsindizes zu messen. Zur Erzeugung des Phasenunterschieds wird eine prinzipielle Anordnung wie in Abbildung 1 genutzt. Der

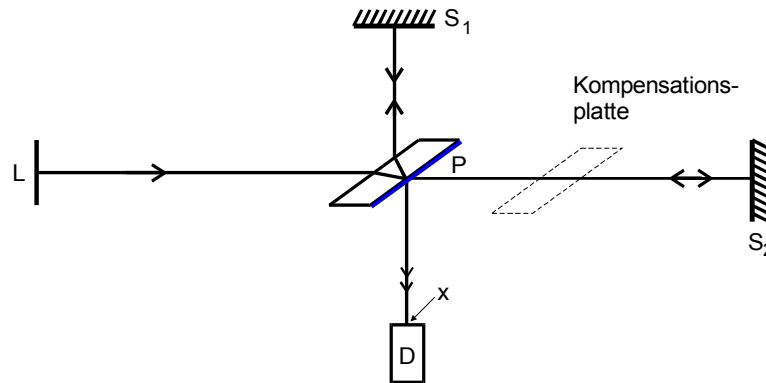


Abbildung 1: Anordnung zur Erzeugung von Interferenz beim MICHELSON-Interferometer. (L ist die Lichtquelle, P ein halbdurchlässiger Spiegel, D der Detektor und S1/2 Spiegel) [1]

halbdurchlässige Spiegel wird zur Teilung der von der Quelle kommenden Lichtstrahls genutzt, die Kompensationsplatte (mit gleicher Dicke und Brechungsindex wie der Spiegel) sorgt dafür, dass die optische Weglänge der beiden Strahlteile durch den Spiegel P nicht verändert wird.

Durch Variation der Position des Spiegels S1 kann man nun kleine Änderungen der optischen Weglänge eines Teilstrahls herbeiführen. Hierzu wird eine Mikrometerschraube an einem Hebel benutzt, die mit einem Motor an einem Untersetzungsgetriebe sehr fein verstellt werden kann. Der Detektor D zählt währenddessen die Interferenzmaxima, die periodisch über die Ebene, an der die Strahlen interferieren, hinweglaufen. Zwischen der Wegänderung Δd , der Anzahl der Helligkeitsmaxima z und der Wellenlänge λ besteht der Zusammenhang

$$\Delta d = z \frac{\lambda}{2}.$$

Die optische Weglänge kann bei feststehendem Spiegel S1 auch dadurch verändert werden, dass vor diesen in den Strahlengang ein durchsichtiges, z.B. mit Gas gefülltes Gefäß gestellt wird. Der Zusammenhang zwischen dem Brechungsindexunterschied Δn zur Umgebung und den anderen Größen lautet dann

$$b\Delta n = z \frac{\lambda}{2},$$

wenn b die Länge des Gefäßes ist.

Den kompletten Aufbau der benutzten Apparatur zeigt die Abbildung 2. Zunächst muss die Apparatur justiert werden: Hierzu wird als Lichtquelle ein Laser benutzt und der Strahl mit einer Aufweitungslinse aufgeweitet, um das Erkennen des Interferenzmusters zu vereinfachen. Durch Verstellen des justierbaren

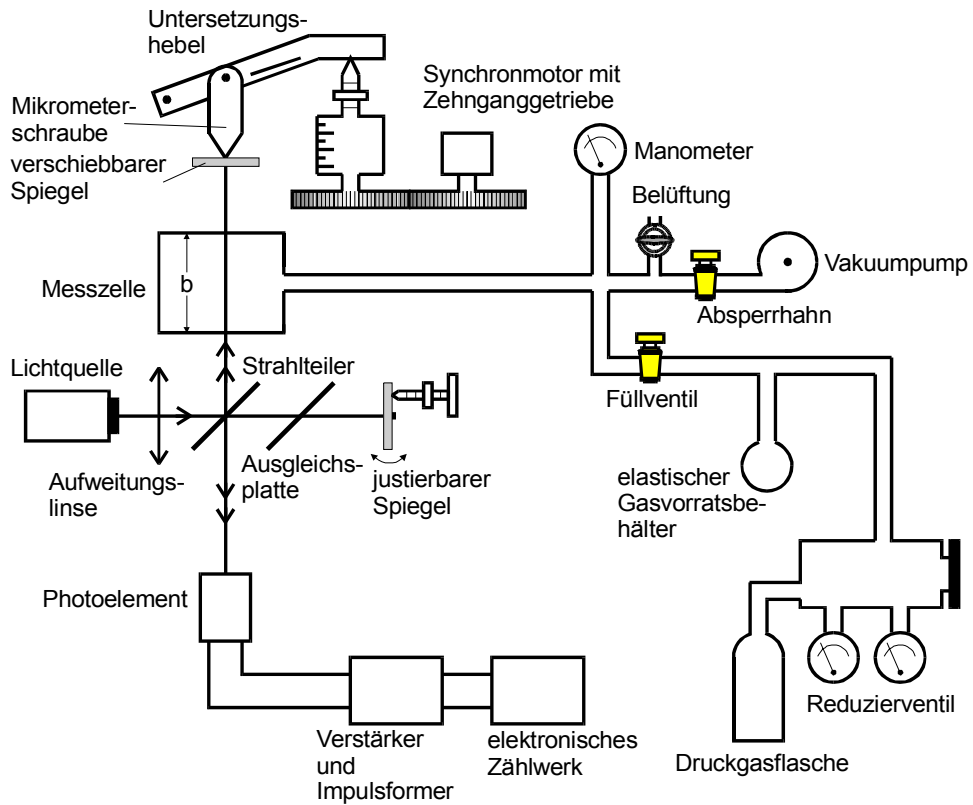


Abbildung 2: Der vollständige Aufbau der benutzten Versuchsapparatur. [1]

Spiegels werden nun die beiden Strahlteile am Photoelement möglichst gut zur Deckung gebracht. Dabei wird sichergestellt, dass die Breite der Interferenzringe ungefähr den Abmessungen des Photodetektors entspricht, um diese zuverlässig messen zu können.

Es ist nun die Wellenlänge des benutzten Lasers zu bestimmen. Dazu wird der Spiegel mit einem Synchronmeter langsam in Bewegung versetzt und die vorbeilaufenden Ringe am Detektor mit einem elektronischen Zählwerk gezählt. Nach etwa 3000 Impulsen wird die Messung gestoppt und die abgefahrene Wegdifferenz abgelesen.

Die Messungen der Brechungsindizes von Luft und CO₂ funktionieren ähnlich, nur dass hierbei der Spiegel nicht bewegt wird, sondern die optische Weglänge durch eine Druckänderung in der Messzelle verändert wird. An Stelle der Wegdifferenz werden hier die Anfangs- und Enddrücke, sowie die gezählten Impulse aufgenommen.

Es soll zuletzt noch anstatt des Lasers eine Na-Spektrallampe benutzt werden. Nach Einsetzen der Lampe muss die Apparatur neu justiert werden, was aufgrund der deutlich kleineren Kohärenzlänge der Spektrallampe schwieriger ist als beim Laser. Es wird dann die mittlere Wellenlänge mit der gleichen Methode wie beim Laser gemessen, nur dass hier nicht deutlich mehr als 600 Impulse messbar sind.

Den Abstand der Dublettlinien des Natriumspektrums wird mit einer Schwebungsmethode gemessen: Hierzu wird der Strom des Photodetektors verstärkt und auf einem Speicheroszilloskop sichtbar gemacht, während der verschiebbare Spiegel vom Motor bewegt wird. Durch Abzählen der Knoten können bei bekannter Geschwindigkeit des Spiegels die beiden Frequenzen der beiden Schwingungen errechnet werden.

3. Auswertung

3.1. Bestimmung der Wellenlänge eines He-Ne-Lasers

Die Wellenlänge des verwendeten Lasers errechnet sich aus der mittels des MICHELSON-Interferometers gemessenen Anzahl an Intensitätsmaxima bei gegebener Strahlwegänderung $2\Delta d$ nach

$$\lambda = \frac{2}{Z}\Delta d = \frac{2}{Z} \frac{\Delta s}{5,046}.$$

Hierin entspricht 5,046 der gegebenen Untersetzung und Δs der Änderung der Mikrometerschraube. Wir führen drei Messungen durch:

$\Delta s[\text{mm}]$	$\Delta d[\text{mm}]$	Impulse Z	Wellenlänge $\lambda[\text{nm}]$
5,02	0,995	3152	631,25
4,92	0,975	3088	631,50
4,88	0,967	3059	632,30

Aus den Messergebnissen λ_i ermitteln wir hier, wie auch weiterhin, den Mittelwert

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad , \text{ mit}$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lambda_i - \langle \lambda \rangle)^2 \quad \text{dem Quadrat der Standardabweichung,}$$

$$\sigma_{\langle \lambda \rangle} = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{dem absoluten Fehler,}$$

$$r_{\langle \lambda \rangle} = \frac{\sigma_{\langle \lambda \rangle}}{\langle \lambda \rangle} \quad \text{dem relativen Fehler.}$$

Es ergibt sich somit eine Wellenlänge von

$$\lambda = (631,7 \pm 0,3)\text{nm} = 631,7\text{nm} \pm 0,1\%.$$

3.2. Bestimmung der Brechungsindizes von CO₂ und Luft

Mit der soeben bestimmten Wellenlänge λ und der Schichtdicke $b=0,05\text{m}$ lässt sich nun aus unseren Messungen (siehe Tabelle 1) die Brechungsindexänderung

$$\Delta n = \frac{Z\lambda}{2b}$$

berechnen. Aus ihr wiederum folgt der Brechungsindex $n(p_0, T_0)$ unter Normalbedingungen ($p_0=1013,2\text{mbar}$ und $T_0=273,15\text{K}$)

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{\Delta p}.$$

Δp [bar]	Impulse Z	Δn	$n(p_0, T_0)$
LUFT			
0,995	43	0,000272	1,000309
0,995	43	0,000272	1,000309
0,995	45	0,000284	1,000323
0,995	40	0,000253	1,000288
0,995	43	0,000272	1,000309
0,995	47	0,000297	1,000338
0,995	43	0,000272	1,000309
0,995	43	0,000272	1,000309
0,995	36	0,000227	1,000259
0,995	41	0,000259	1,000295
0,995	41	0,000259	1,000295
0,995	41	0,000259	1,000295
CO ₂			
0,995	63	0,000398	1,000453
0,995	62	0,000392	1,000446
0,995	62	0,000392	1,000446
0,995	63	0,000398	1,000453
0,995	64	0,000404	1,000460
0,995	63	0,000398	1,000453
0,995	61	0,000385	1,000438
0,995	63	0,000398	1,000453
0,995	62	0,000392	1,000446
0,995	62	0,000392	1,000446

Tabelle 1: Messreihe zur Bestimmung der Brechungsindizes von CO₂ und Luft

Während der gesamten Messung herrschte eine Temperatur von $T=305,25\text{K}$. Δp sind Tabelle 1 zu entnehmen. Eine Mittelung liefert die Brechungsindizes

$$n_{\text{CO}_2} = 1,000449 \pm 0,000002 = 1,000449 \pm 0,0002\%,$$

$$n_{\text{Luft}} = 1,000303 \pm 0,000006 = 1,000303 \pm 0,0006\%.$$

Eine Fehlerfortpflanzung der Ungenauigkeit auf die Wellenlänge ist an dieser Stelle unnötig ($\approx \pm 10^{-7}$).

3.3. Bestimmung der Wellenlängendifferenz zweier Duplettlinien einer Natriumdampfampe

Im folgenden Abschnitt wird die Fehlerfortpflanzung nach GAUSS für multiplikative Zusammenhänge verwendet:

$$f(x, y) = x^m y^n$$

$$\Rightarrow r_{f(x,y)} = \sqrt{m^2 r_x^2 + n^2 r_y^2}$$

Die Berechnung der Wellenlänge der verwendeten Natriumdampfampe erfolgt analog zur Wellenlänge des Lasers.

$\Delta s[\text{mm}]$	$\Delta d[\text{mm}]$	Impulse Z	Wellenlänge $\lambda[\text{nm}]$
0,92	0,182	618	590,04
0,91	0,180	606	595,18
0,85	0,168	568	593,13

$$\Rightarrow \lambda_0 = (592,8 \pm 1,5)\text{nm} = 592,8\text{nm} \pm 0,3\%$$

Die relative Geschwindigkeit v des Synchronmotors: Nach $\Delta t=(300\pm 1)\text{s}$ ist eine Änderung $\Delta s=(3,01\pm 0,01)\text{mm}$ der Mikrometerschraube zu messen. Unter Berücksichtigung der Untersetzung und der Tatsache, dass der Lichtweg sich zusätzlich um einen Faktor 2 ändert, erhält man

$$v = \frac{2\Delta s}{5,046\Delta t}.$$
$$\Rightarrow v = (3,98 \pm 0,02)10^{-6}\text{m/s} = 3,98 \cdot 10^{-6}\text{m/s} \pm 0,5\%$$

Über die Geschwindigkeit v lässt sich nun die auf dem Ausdruck abgelesene Periode $\tau=(178\pm 2)\text{s}$ (siehe Anhang) in die Wellenlänge $l=\tau v$ der Einhüllenden umrechnen. Aus ihr berechnet sich die Wellenlängendifferenz

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{l} = \frac{\lambda_0^2}{\tau v}.$$
$$\Rightarrow \Delta\lambda = (0,50 \pm 0,01)\text{nm} = 0,50\text{nm} \pm 1,2\%$$

3.4. Diskussion der Ergebnisse

Die Wellenlänge des emittierten Lichtes konnte für beide Quellen bis auf einen kleinen Fehler von unter 0,5% recht gut bestimmt werden.

Bei der Bestimmung der Brechungsindizes ist der statistische Fehler verschwindend klein. Dies ist auf die Näherungen in der Herleitung der verwendeten Formel zurückzuführen.

Die Wellenlängendifferenz der Dublette von 0,5nm entspricht in guter Näherung unseren Erwartungen.

Abschließend lässt sich sagen, dass bei sorgfältiger Justierung, welche unter Umständen viel Zeit in Anspruch nimmt, der durchgeführte Versuch zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

A. Anhang

A.1. Literatur

- [1] Die Abbildungen im Theorieteil stammen aus der Versuchsanleitung (<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/INHALTneu.htm>).

A.2. Messdaten

Messdaten angefügt in Kopie.