



# Kabanata 5 na Materyal ng Bonus

## — Panimula —

Ikaw ba ay isang taong nagnanais na mayroong higit pang mga halimbawa, talakayan, at komentaryo sa sadyang maikling paglalarawan ng mga aralin? Kung gayon, nakarating ka sa tamang lugar! Naglalaman ang file na ito ng materyal na bonus para sa ilan sa mga aktibidad mula sa Kabanata 5.

Para sa mga palaisipan, maraming mga halimbawa ng mga nalutas na palaisipan ang ibinibigay, kasama ang karagdagang komentaryo sa kung paano ito likhain. Ang programa ng Maagang Pamilya ng Matematika ay batay sa ideya na ang maagang matematika ay isang bagay na dapat gawin ng isang pamilya na magkasama, at ang paggawa ng mga palaisipan para sa iyo ng iyong anak ay isang mahalagang bahagi ng prosesong iyon. Sa sandaling makita mo ang hang ng bawat palaisipan, dapat mong makita na ang karamihan kung hindi lahat ng mga palaisipan ay medyo madali para sa iyo na lumikha.

Marami sa mga palaisipan na ito ay may iba't ibang antas ng kahirapan, at maraming mga mungkahi at halimbawa sa mga darating na pahina para sa kung paano lumikha ng mga antas na iyon. Laging magsimula sa pinakamadaling mga palaisipan. Mas mainam na maranasan ang iyong anak sa tagumpay, pag-unawa, at kasiyahan sa mga palaisipan na medyo napakadali, kaysa mabigo, panghinaan ng loob, at labis na hamon ng mga palaisipan na napakahirap. Kapag ang iyong anak ay nagtataguyod ng kumpiyansa at sigasig para sa isang aktibidad sa matematika, iyon ang oras upang dahan-dahang isama ang mas malaking hamon. Gayundin, hindi lahat ng mga palaisipan ay magiging masaya para sa lahat, kaya huwag itulak ang mga palaisipan at aktibidad na tila hindi kumonekta. Ito ang makikita mo sa mga sumusunod na pahina:

- **Kabanata 5 — Nim na may Mga Kadahilanan**
- **Kabanata 5 — Pag-aayos ng Eratosthenes**
- **Kabanata 5 — Mga Levers at Mobiles**
- **Kabanata 5 — Hatiin ang Kahon**
- **Kabanata 5 — Mga Puzzles ng Pagpapalit ng Liham**
- **Kabanata 5 — Mga Pagsisiyasat - Paglalaro ng Mga Hugis**
- **Kabanata 5 — Produkto ng Produkto**
- **Kabanata 5 — Limitadong Mga Calculator**
- **Kabanata 5 — Doble o Wala**

---

## — Legal na Bagay —

Ang bawat pamilya ay dapat magkaroon ng pagkakataong matuto at masiyahan sa matematika nang magkasama. Sa layuning iyon, ang Early Family Math ay isang koleksyon ng mga materyales na malayang maaaring mag-edit, salin, kopyahin, at ipamahagi ng mga pamilya at tagapagturo, nang hindi humihingi ng pahintulot, para sa mga hindi pang-komersyal na gamit lamang.

# Kabanata 5 — Nim na may Mga Kadahilanan

## — Panimula —

Magsimula sa anumang numero, sabihin 20. Hayaan ang bata na magpasya kung mauuna ba siya o pangalawa. Sa panahon ng kanilang pagliko, ang isang manlalaro ay maaaring bawasan ang sinumang tagahati ng kasalukuyang numero mula sa numero. Sapilitang 0 natalo ang manlalaro.

## — Pagsusuri —

Tulad ng dati, isang mahusay na diskarte para sa pag-aaral tungkol sa larong ito ay upang tumingin sa isang mas simpleng bersyon ng laro, na sa kasong ito ay nangangahulugang nagsisimula sa napakaliit na mga numero. Kung ito ang iyong tira at nahaharap ka sa bawat isa sa mga numerong ito, narito ang mangyayari: 1 - talo, 2 - panalo, 3 - talo, 4 - panalo, 5 - talo, 6 - panalo, 7 talo, at 8 manalo. Sa ngayon ang pattern ay malinaw - kung ito ang iyong paglipat at mayroon kang isang kakaibang numero, pagkatapos ay mawawala sa iyo; kung mayroon kang isang pantay na numero, pagkatapos ay mananaloka ka.

Ang paghahanap ng panalong diskarte ay isang malaking hakbang, ngunit pumunta tayo sa mas malalim. Bakit ito gumagana? Ano ang mga katangian ng mga kakatwa at kahit na mga numero na lumilikha ng sitwasyong ito? Itakda ang katanungang ito sa harap ng iyong anak at bigyan sila ng maraming oras upang pag-isipan ito at mag-eksperimento dito - walang pagmamadali, at ang prosesong ito ng pakikipagbuno sa isang katanungan ay napakahalaga at hindi dapat maiikli.

Ang ilang eksperimento sa maliliit na bilang ay mabilis na isiniwalat kung ano ang nangyayari. Kung mayroon kang isang kakatwang numero, ang lahat ng mga divisor ay kakaiba, kaya kapag binasa mo ang anumang tagahati ang resulta ay isang pantay na numero. Dahil dito, ang mga kakatwang numero sa isang pagliko ay laging humantong sa isang pantay na numero sa susunod na pagliko. Kahit na ang mga numero ay palaging may parehong kakaiba at kahit na mga numero para sa mga divisor. Kaya, ang sitwasyon ay hindi masyadong kapareho. Gayunpaman, kung mayroon kang isang pantay na numero, ang iyong layunin ay upang bigyan ang iyong kalaban ng isang kakaibang numero, at may isang madaling paraan upang gawin iyon — piliin ang paghahati 1 at ilabas ito!

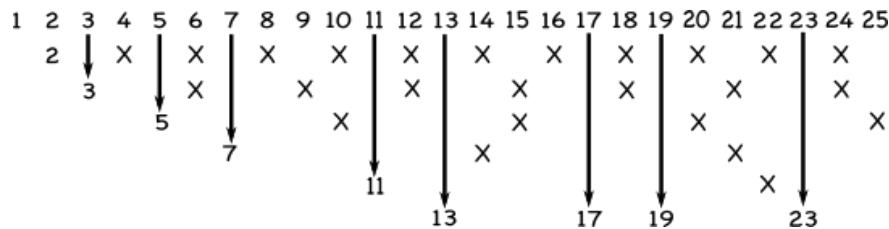
# Kabanata 5 — Pag-aayos ng Eratosthenes

## — Panimula —

Magsimula sa isang linya ng numero na may bilang na 1 hanggang 25 - o isang mas malaking saklaw kung pinapayagan ng puwang at pasensya mo.

Isulat ang numero 2 sa ibaba mismo. Sa linya kahit sa 2 na ito, ilagay ang X sa bawat maramihang 2.

Ngayon, hilahin ang unang numero nang walang X sa ibaba nito (3 sa kasong ito) at ilagay ito sa susunod na linya. Isulat ang 3 at ilagay ang X sa linyang iyon para sa lahat ng mga multiply nito. Magpatuloy sa ganitong paraan. Sa huli, mahila mo ang lahat ng mga *prima*. Tandaan na ang 1 ay isang *yunit* at hindi isang kalakasan!



## — Pagsusuri —

Inihayag ng simpleng proseso na ito ang ilang mga kagiliw-giliw na katotohanan tungkol sa mga prima. Tingnan kung ang iyong anak ay maaaring magkaroon ng ilan sa mga katanungang ito - gayunpaman, kung hindi sila natural na lumitaw, narito ang ilang mga katanungan na tatanungin.

1) Bakit ang mga numero na bumababa ng mga prima?

Ipagpalagay na mayroon kang isang pinaghalong numero. Nais naming ipakita na ang numerong ito ay magkakaroon ng X sa ilalim nito. Dahil pinaghalo, nahahati ito sa ilang bilang,  $n$ , sa pagitan ng 1 at ng numerong iyon. Kung ang  $n$  ay isang kalakasan, kung gayon ang aming pinaghalong numero ay magkakaroon ng X sa ilalim nito mula sa pagiging isang naunang kalakasan. Kung ang  $n$  ay hindi isang kalakasan, kung gayon mayroon itong X sa ilalim nito mula sa ilang naunang kalakasan, tawagan itong  $p$ . Ngayon,  $p$  pantay na hinahati  $n$  at  $n$  pantay na hinati sa aming bagong numero, kaya dapat hatiin ng  $p$  ang aming bagong numero. Dahil dito, kapag minamarkahan ang mag multiply ng, isang X ay inilalagay sa ilalim ng aming bagong numero.

2) Kapag inilalagay mo ang X's para sa mga multiply ng isang kalakasan, mayroong ilang mga numero na mayroon nang X mula sa isang naunang kalakasan. Kailan nangyari iyon at kailan hindi nangyari?

Tingnan natin ang mga multiply ng 5 sa salaan sa itaas. Ang mga multiply na  $5 \times 2$ ,  $5 \times 3$ , at  $5 \times 4$  ay naka-cross out na.  $5 \times 5$  lang ang bago. Nangyayari ito dahil ang  $5 \times 2$ ,  $5 \times 3$ , at  $5 \times 4$  ay pawang mga multiply ng 2 at 3, mas naunang mga prime. Kung nais naming ilagay ang X sa mga sariwang lugar, dapat naming i-multiply ang 5 sa mga numero na mayroon lamang pangunahing mga kadahilanan na 5 at mas mataas. Sapagkat medyo nakakapagod na subaybayan ang lahat ng iyon, ang ginagawa ng ilang tao ay tumatawid lamang ng mga kakaibang mga multiply at iniwan ito.

3) Para sa salaan na ito, ano ang huling kalakasan na may kapaki-pakinabang na bagong X sa hilera nito?

Sa salaan na ito, ang mga prime na may kapaki-pakinabang na X ay 2, 3, at 5. Ang mga multiply na 7 at 11 ay pawang mga old X's. Kung titingnan mo ang sagot sa huling tanong, makikita mo ang sagot dito. Ang tanging paraan lamang upang makakuha ng bagong X ay upang magparami ng kalakasan sa pamamagitan ng mga prima na mas malaki kaysa sa o katumbas nito. Kapag naabot namin ang isang kalakhang tulad ng 7 kung saan  $7 \times 7 > 25$ , hindi namin kailangang suriin ito. Kaya, kailangan lamang naming suriin ang mga prime na ang parisukat ay mas maliit kaysa o katumbas ng huling numero.

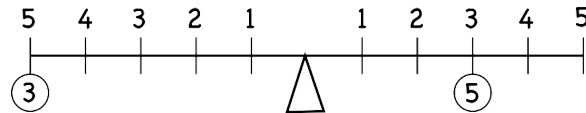
4) Kung bibigyan ka ng isang numero, sabihin sa 53, aling mga prima ang kakailanganin mong hatiin ito upang makita na ito ay pangunahing?

Mula sa sagot hanggang sa huling katanungan, kailangan lamang naming suriin ang mga prime na ang parisukat ay mas mababa sa o katumbas ng 53. Ang mga prima na iyon ay 2, 3, 5, at 7 - wala sa mga hati na 53 na pantay-pantay, kaya't 53 dapat maging pangunahing!

# Kabanata 5 — Levers at Mobiles

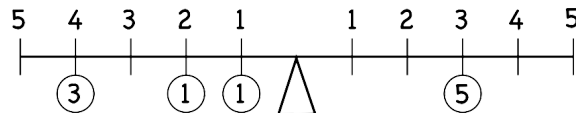
## — Levers —

Ang prinsipyo ng pingga ay nagsasaad na ang puwersang ipinataw sa isang bahagi ng isang pingga ng isang mapa ay katumbas ng mga oras ng masa ang distansya nito mula sa pivot point, ang fulcrum.



Sa pingga sa itaas, ang 3 sa kaliwang bahagi ay isang distansya ng 5 mula sa fulcrum, kaya ang puwersa nito ay  $3 \times 5 = 15$ . Ang 5 sa kanang bahagi ay isang distansya ng 3 mula sa fulcrum, kaya ang puwersa nito ay  $5 \times 3 = 15$ . Ang pingga na ito ay nasa balanse.

Kung mayroong higit sa isang timbang sa isang panig, ang mga puwersa ay magdagdag.



Sa pingga na ito, mayroong  $3 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$  sa kaliwang bahagi, at  $5 \times 3 = 15$  sa kanang bahagi. Kaya't balanse ito.

Pinaghihigpitan namin ang mga problemang ito upang magamit lamang ang buong numero. Maaari kang magpasya kung papayagan mo ang maraming mga timbang na mai-hang-off ng parehong punto - ipalagay namin na okay na gumawa ng maraming mga timbang sa sumusunod na talakayan.

## — Mga Puzzles ng Lever —

Mayroon kang isang timbang na 3-yunit at isang timbang na 5-yunit upang mailagay sa kabaligtaran ng fulcrum. Saan dapat sila ibalanse? Ang sagot dito ay maaaring ang distansya 5 at 3, ngunit maaari rin itong 10 at 6, o kahit na mas malaking mga sagot tulad ng 15 at 9. Maging bukas sa pagtalakay sa kung ano man ang naisip ng iyong anak.

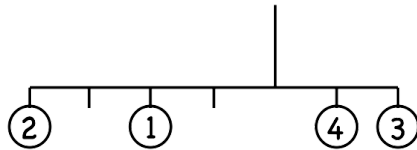
Kung mayroon kang isang 3-yunit at isang mabigat na 5-yunit upang ilagay sa isang gilid ng isang pinggan, ang mga timbang ang maaari mong mailagay sa aling mga distansya sa kabilang panig? Ang katanungang ito ay nagpapatuloy sa mga tanong sa pahina ng Gawin Ito Bilang sa pagtatapos ng Kabanata 4. Tulad ng dati, galugarin ang iba't ibang mga kumbinasyon ng timbang. Ano ang mangyayari kung ang 3 at 5 ay pinalitan ng 4 at 5, 4 at 9, o 6 at 9?

Paano nagbabago ang huling problemang ito kung ilalagay natin ang 3-unit at 5-unit weights sa magkabilang panig ng fulcrum? Ngayon ay madaling timbangin ang timbang na 1-yunit sa pamamagitan ng paggamit ng  $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$ . Ano ang iba pang mga timbang na maaari mong timbangin sa ganitong paraan?

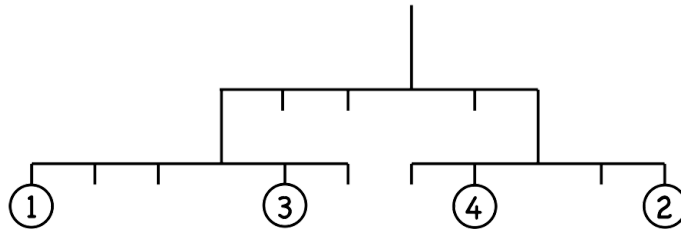
## — Mobiles —

Bibigyan ka ng ilang mga timbang at isang disenyo para sa isang mobile na may ilang mga puntos na maglakad. Ang hamon ay upang maglagay ng kahit isang timbang bawat punto ng pag-attach upang ang mobile ay magbalanse kasama ang bawat braso. Alang-alang sa mga problemang ito, ipagpapalagay namin ang mga wire na lumilikha ng mobile ay walang timbang. Ang bawat braso sa mobile ay isang pinggan na nangangailangan ng pagbabalanse, kaya ang mga palaisipan na ito ay isang extension ng Lever Balance - pagsasanay ang mga palaisipan na iyon bago simulan ang mga ito.

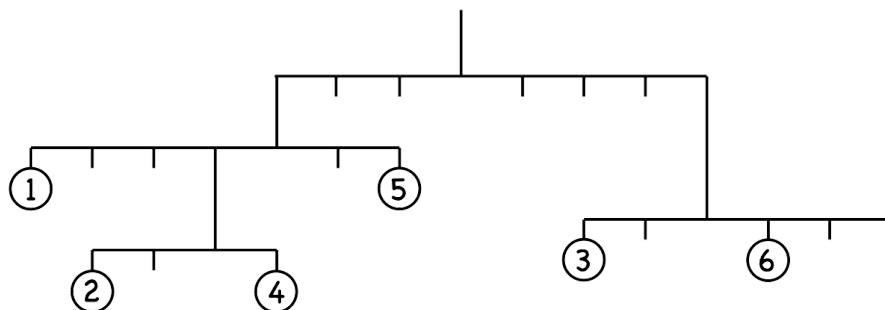
Magsimula sa pinakasimpleng mga mobile, na kung saan ay mga pingga lamang sa hangin. Narito ang isang solusyon para sa paglalagay ng mga timbang mula 1 hanggang 4 sa mobile na ito upang balansehin ito. Gumagawa ito bilang isang pinggan na may fulcrum sa hang point. Para sa mobile na ito mayroon kaming  $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ .



Kung mayroong higit sa isang antas sa mobile, kung gayon ang bawat indibidwal na braso sa bawat antas ay dapat balansehin bilang isang pingga. Para sa susunod na mobile, balanse ang dalawang ilalim na braso dahil  $1 \times 3 = 3 \times 1$  at  $4 \times 1 = 2 \times 2$ . Para sa susunod na antas, madaragdagan mo lang ang mga timbang sa ibaba nito. Halimbawa, ang bigat sa kaliwang bahagi ay  $1 + 3 = 4$  - hangga't sa susunod na antas hanggang sa pag-alala, hindi mahalaga kung saan sa kanang braso ang mga timbang ay matatagpuan. Kaya, para sa susunod na antas na pataas,  $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$ , kaya ang balanse sa tuktok na antas ay nagbabalanse rin.



Magkaroon ng kasiyahan sa paggawa ng mga mobile na palaisipan para sa bawat isa. Narito ang isang huling upang i-play sa paggamit ng bawat isa sa mga numero mula 1 hanggang 6. Huwag mag-alala tungkol sa pagiging magarbong at gamitin ang bawat numero nang isang beses. Anumang nakumpletong palaisipan ay magiging masaya. Sinusuri ang mga antas na mayroon kami:  $2 \times 2 = 4 \times 1$ ;  $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$ ;  $3 \times 2 = 6 \times 1$ ; at  $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$ .



# Kabanata 5 — Hatiin ang Kahon

## — Panimula —

Ang isang rektanggulo, 4 ng 4 o mas malaki, na may mga numero sa ilan sa mga parisukat nito, ay dapat nahahati sa mas maliit na mga parihaba. Ang bawat numero ay dapat magtapos sa isang hiwalay na rektanggulo na ang lugar ay ang bilang.

Para sa mga matatanda, ang pagbuo ng mga palaisipan na ito ay sapat na simple. Kumuha ng isang rektanggulo, hatiin ang loob nito sa mga parihaba, maglagay ng mga numero para sa mga lugar sa loob ng bawat panloob na rektanggulo, at pagkatapos ay alisin ang anumang pag-sign ng mga panloob na parihaba. Ang nakakalito lamang na bahagi ay ang paglalagay ng mga numero sa mga lugar na ginagawang madali upang malutas ang palaisipan - maaari mong palaging magbigay ng mga pahiwatig kung kinakailangan kung ang iyong palaisipan ay napakahirap.

## — Mga Estratehiya sa Paglutas —

Narito ang ilang mga pangkalahatang diskarte na maaaring gawing simple ang paglutas ng mga palaisipan. Gawin ang iyong makakaya upang hayaan ang iyong anak na matuklasan ang mga patakarang ito habang nilalaro nila ang mga palaisipan. Gumawa ng isang listahan ng sama-sama ng mga panuntunang naisip nila.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) Tumingin sa mga numero na may isa o dalawa lamang na mga pagpipilian para sa kanilang mga parihaba.

Ang parehong 4 ay lubos na napipigilan. Ang bawat 4 ay maaari lamang nasa loob ng isang 1 ng 4 o isang 2 ng 2 na rektanggulo. Ang itaas na 4 ay na-hemmed, kaya't hindi ito maaaring nasa loob ng 1 ng 4. Kaya, dapat mayroong isang 2 sa 2 na rektanggulo sa kaliwang sulok sa itaas. Iyon ay umalis sa ibabang 4 na may posibilidad lamang na ang rektanggulo nito ay 1 ng 4 at pumupunta sa ibabang bahagi.

2) Tingnan ang pangunahing mga numero - dapat na nasa loob sila ng isang 1 by n na rektanggulo.

Ang 3 sa palaisipan sa itaas ay dapat na nilalaman sa isang 1 hanggang 3 na rektanggulo. Ang 3 sa kanang sulok sa itaas ay maaari lamang maging bahagi ng isang 1 hanggang 3 na rektanggulo na dumadaan sa tuktok na gilid o sa kanang bahagi. Ang itaas na kaliwang 2 ng 2 parisukat na naka-block para sa 4 ay ginagawang imposibleng magkaroon ng 1 sa 3 kasama ang tuktok na gilid.

Pinipilit ng 1 ng 4 kasama ang ilalim ang 1 ng 3 para sa mas mababa sa dalawang 3 na mas mataas sa dalawang mga posibilidad na patayo.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) Ang mga bilang na malapit sa maximum na sukat ay madalas na may ilang mga pagpipilian.

Tingnan ang 6 at 5's sa susunod na palaisipan. Ang pinakamataas na 6 ay nangangailangan ng maraming silid, at ang tanging paraan para may sapat na silid para sa ito ay pataas na pataas pababa, gamit ang buong haligi. Ang iba pang 6 ay hindi maaaring maging 1 x 6 dahil ang hilera ay pinutol ng haligi ng iba pang 6. Kaya, ang mas mababang 6 ay dapat na isang 2 x 3, na kung saan ay hindi pa masyadong natutukoy.

Bilang isa pang halimbawa, kung nagkaroon ng 8 sa palaisipan na ito, ang 1 hanggang 8 ay hindi magkakasya, kaya't magiging bahagi ito ng isang 2 hanggang 4 na rektanggulo.

4) Mga parisukat na nakakahon sa may ilang mga pagpipilian.

Ang pinakamataas na 5 ay naka-box sa, kaya't ang pagpipilian lamang ay nasa isang 5-box na haligi. Ang iba pang 5, dahil ito rin ay isang kalakasan, dapat na patayo o pahalang. Ito ay pinutol ng pahalang ng haligi para sa 6, kaya dapat itong patayo nang patayo hanggang sa kanan sa ibaba ng 3.

5) Ang mga sulok ay madalas na napipigilan.

Ang 2 sa kanang sulok sa itaas ay dapat na pahalang, kaya't madaling punan.



# Kabanata 5 — Mga Puzzle Palitan ng Liham

## — Panimula —

Kapag naging komportable ang iyong anak sa mga nawawalang mga palaisipan mula sa ilang mga pahina nang mas maaga sa kabanatang ito, maaari silang magsimula naglalaro ng mga palaisipan na ito. Sa mga ito, ang isa o higit pa sa mga digit ay pinalitan ng mga titik. Ang tatlong mga patakaran para sa mga titik ay: Ang

- isang naibigay na titik ay palaging ang parehong digit
- Ang kaliwang digit ng isang numero ay hindi kailanman 0
- Iba't ibang mga titik ay dapat na magkakaibang mga digit

Lumikha ng mga palaisipan na ito sa pamamagitan ng pagkuha ng isang problema sa pagdaragdag o pagbabawas at pagpapalit ng isa o higit pang mga digit. Ang mga palaisipan ay maaari ring likhain upang makagawa ng mga kagiliw-giliw na hamon sa paglutas ng problema para sa iyong anak. Tandaan na ang mga halaga ng mga titik ay hindi madala mula sa palaisipan hanggang sa palaisipan.

## — Mga Halimbawa —

Ang unang halimbawang ito ay naglalarawan kung paano ka makakakuha ng isang karaniwang problema sa pagdaragdag o pagbabawas at gumawa ng isang palaisipan na pagpapalit ng sulat mula rito. Pinalitan ng unang bersyon ang lahat ng 6 ng A, at ang pangalawang bersyon ay nagpatuloy upang palitan ang 2 ng B.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

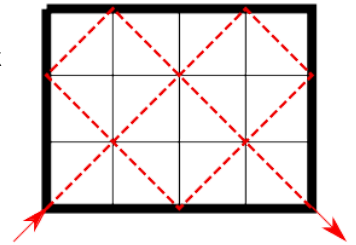
Ang natitirang mga halimbawa ay maingat na itinayo upang payagan ang paglutas gamit ang mga katangian ng partikular na sitwasyon. Ang isang pag-aari na dapat tandaan ay kapag nagdagdag ka ng dalawang numero, ang pagdadala sa susunod na haligi ay palaging 0 o 1. Kaya, halimbawa, sa problemang  $A + A = C4$ , C ay dapat na 1 sapagkat hindi pinapayagan na maging 0.

$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array}$	$\begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}$	$\begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}$
$\begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline B2 \end{array}$	$\begin{array}{r} C \\ +C \\ \hline D4 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +7 \\ \hline B \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline B0 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array}$	$\begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}$
$\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}$	$\begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}$

# Kabanata 5 — Paglalaro ng Mga Hugis

## — Bouncing Billiard Ball — Panimula —

Isipin ang isang table ng bilyaran na may bulsa sa bawat sulok. Kapag ang isang bola ay tumalbog sa gilid ng mesa, tumatalbog ito palayo sa parehong anggulo na pinasok nito. Kung kukunin namin ng bola ang isang anggulo ng 45 degree mula sa ibabang kaliwang sulok, saan ito magtatapos? Ang sagot ay nakasalalay sa laki ng talahanayan. Ang larawan sa kanan ay ang nangyayari sa isang 3 by 4 na talahanayan.



Bigyan ang iyong anak ng isang guhit ng isang mesa at hamunin ang iyong anak na hulaan kung aling sulok ang unang tatamaan at kung gaano karaming mga tumalbog ang aabutin bago makarating sa sulok na iyon.

## — Bouncing Billiard Ball — Pagsusuri —

Magsimula sa pamamagitan ng pagpapaalam sa iyong anak na maglaro lamang dito at huwag magmadali sa pagtuklas ng mga resulta. Tulad ng makikita mo, ang problemang ito ay nagsasangkot ng ilang sopistikadong mga ideya para sa isang kabataan. Kung kinakailangan, magtanong ng isa o dalawa upang bigyan ang kanilang pag-iisip ng kaunti pang istraktura. Alam mo kung ano ang darating - tingnan muna ang mga mas simpleng lamesa upang maghanap ng mga pattern - kapag ang ideyang ito ay awtomatiko para sa iyong anak, ito ay maglilingkod sa kanila nang maayos sa natitirang buhay nila!

Ang pinakasimpleng mga talahanayan ay 1 sa pamamagitan ng  $n$ , at madali silang maunawaan. Nagpe-play na may ilang mga halaga ng  $n$ , ang pattern ay mabilis na lumilitaw. Madali itong maliitin ang isang simpleng resulta tulad nito; gayunpaman, ang anumang ganap na naunawaan na resulta ay dapat ipagdiwang, at ang resulta na ito ay hahantong sa iba.

Resulta: 1 sa pamamagitan ng  $n$  table: Ang bola ay kukuha ng mga  $b-b$   $n-1$ . Ang bola ay magtatapos sa kanang sulok sa ibaba kung ang  $n$  ay pantay at sa kanang itaas na sulok kung  $n$  ay kakaiba.

Ang susunod na pinakasimpleng mga talahanayan ay 2 ng  $n$ . Ang mga pattern dito ay medyo kasangkot. Ang mahusay na pag-iingat ng record ay maaaring gumawa ng isang malaking pagkakaiba sa isang bagay tulad nito. Mapapansin ng isang mapagmasid na eksperimento na ang isang 2 by 4 na talahanayan ay kumikilos tulad ng isang 1 by 2 table, at isang 2 by 6 na talahanayan tulad ng isang 1 by 3. Ito ay mabilis na bumubuo sa susunod na resulta.

Resulta: Ang isang 2 by  $2 \times n$  table ay kumikilos tulad ng isang 1 by  $n$  table.

Bakit ito? Ano ang nangyayari? Ito ay isang proseso ng matematika upang itanim sa iyong anak - maghanap ng mga pattern at pagkatapos ay hangarin na maunawaan ang mga ito, at sa bagong pag-unawang palawakin ang iyong naunang mga resulta.

Ano ang nangyayari ay ang mga bounce sa isang talahanayan ay hindi nagbabago kung palakihin mo ang parehong mga sukat ng parehong kadahilanan. Kapag tapos na iyon, ang talahanayan ay mas malaki ngunit ang geometry ay pareho. Sa mga terminong geometry, sinasabing ang "dalawang talahanayan ay" magkatulad. "

Resulta: Ang isang  $k \times m$  ng  $k \times n$  na talahanayan ay gawain ng eksakto tulad ng isang  $m$  by  $n$  table.

Nakarating kami dito sa maliit na mga hakbang, ngunit ito ay isang MALAKING resulta. Nangangahulugan ito na maaari naming simulan ang aming pagtatasa sa anumang talahanayan sa pamamagitan ng unang pag-aalis ng anumang karaniwang kadahilanan.

Ipinagpatuloy kung saan kami tumigil sa 2 by  $n$  tables. Naiintindihan namin kung ano ang mangyayari kapag  $n$  ay pantay, ngunit kung ano ang mangyayari kapag  $n$  ay kakaiba? Ano ang nangyayari para sa 2 ng  $n$  para sa  $n = 1, 3, 5, 7$ , at iba pa? Ang pattern ay mabilis na madaling makita.

Resulta: Kapag ang  $n$  ay kakaiba, ang isang 2 sa pamamagitan ng  $n$  mesa ay may  $n$  bounces at nagtatapos sa itaas na kaliwang sulok.

Maraming pag-unlad ang ginagawa. Ang paglalaro ng maraming mga halimbawa ay humahantong sa ilang higit pang mga pattern.

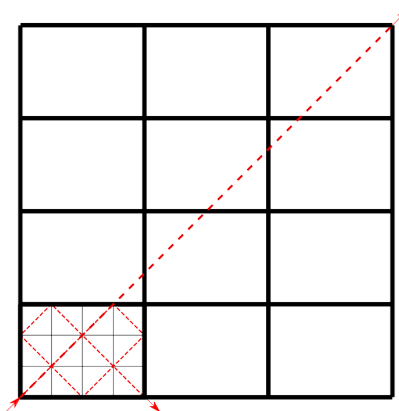
Resulta: Kung ang  $n$  ay hindi isang maramihang 3, ang isang talahanayan ng 3 sa pamamagitan ng  $n$  ay may  $1 +$  talbog at nagtatapos sa kanang sulok sa itaas kung ang  $n$  ay may natitirang 1 kapag hinati ng 3, at sa ibabang kanang sulok kung ang  $n$  ay may natitirang 2 kapag nahahati sa 3. Kung ang  $n$  ay kakaiba, ang isang talahanayan na 4 sa pamamagitan ng  $n$  ay may  $2 +$  talbog at nagtatapos sa kaliwang sulok sa itaas. Kung ang  $n$  ay hindi isang maramihang 5, ang isang 5 sa pamamagitan ng  $t$  mesa ay may  $n + 3$  na mga bounce at nagtatapos sa kanang itaas na kanang sulok kapag ang  $n$  ay kakaiba at ibabang kanang sulok kapag  $n$  ay pantay.

Sa puntong ito natutukso kaming tingnan ang data, makita ang ilang mga pattern, at gumawa ng ilang mga haka-haka.

Pang-isip: Ipalagay na ang  $k$  at  $n$  ay walang mga kadahilanan na pareho. Pagkatapos ak sa pamamagitan ng  $t$  mesa ay magkakaroon ng  $k + n - 2$  talbog. Matatapos ito sa kaliwang sulok sa itaas kung  $k$  ay pantay. Nagtatapos ito sa kanang itaas na sulok kung  $k$  ay kakatwa at  $n$  ay kakaiba, at sa ibabang kanang sulok kung  $k$  ay kakatwa at  $n$  ay pantay.

Wow - kung ang haka-haka na ito ay totoo, ganap naming nalutas ang problemang ito! Alam mo kung ano ang darating ... Tingnan natin kung maaari nating ipaliwanag kung bakit dapat totoo ang haka-haka na ito (o alamin na ito ay hindi totoo).

Bagaman mayroong iba pang mga paraan upang maunawaan ang sitwasyong ito, tulad ng kung minsan nangyayari, kung ano ang ginagawang mas madaling maunawaan ang problemang ito ay isang bagong ideya. Maaaring hindi ito mangyari sa iyo, ngunit kapag nakita mo ito ay marahil ay namangha ka. Ang ideya ay upang iladlad ang talahanayan upang ang bola ay maaaring pumunta sa isang tuwid na linya! Narito kung ano ang mangyayari kung ilalahad natin ang orihinal na  $3 \times 4$  na talahanayan at gawin ang landas ng bola sa isang tuwid na linya.



Ang nakikita na totoo ang haka-haka ay mas madali ngayon. Ang mga talbog ay tumutugma sa mga linya ng tawiran - mayroong  $(k - 1)$  sa kanila na tatawid sa isang direksyon at  $(n - 1)$  sa kanila upang tumawid sa ibang direksyon, kaya magkakasama na gumagawa ng isang kabuuang  $(k - 1) + (n - 1) = k + n - 2$  linya na tatawid. Ang pagkakita sa kung aling sulok ito nagtatapos ay isang bagay sa pagsubaybay sa kung paano magbubukas ang mga bagay. Tapos na tayong lahat ngayon na may isang kagiliw-giliw na paglalakbay.

### — Pagpuno ng Mga Rehiyon Sa Mga Hugis — Panimula —

Ipagpalagay na mayroon kang isang  $8 \times 8$  chessboard at mayroon kang isang koleksyon ng  $1 \times 2$  tile. Ang paghahanap ng isang paraan upang eksaktong masakop ang chessboard na may 32 sa mga  $1 \times 2$  hanggang  $2 \times 1$  tile ay sapat na simple.

Magsimula tayong mag-alis ng ilang mga parisukat mula sa chessboard at tingnan kung ano ang nangyayari. Kung aalisin mo ang isang sulok ng chessboard, malalaman mo kaagad na hindi mo na matatakpan ang chessboard ng mga tile dahil ang mga tile ay palaging saklaw ng pantay na bilang ng mga parisukat, at mayroon na ngayong 63 mga parisukat upang masakop. Okay, alisin ang dalawang salik upang makagawa ng pantay na bilang ng mga natitirang parisukat - maaari mo ba itong takpan ngayon? Ang sagot ay nakasalalay sa aling dalawang sulok ang iyong aalisin. Bakit? Paano kung hindi mo na pinaghihigpitan ang iyong sarili sa pag-aalis ng mga sulok, ano ang mangyayari pagkatapos?

### — Pagpuno ng Mga Rehiyon Sa Mga Hugis — Pagsusuri —

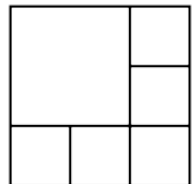
Hayaang maglaro ang iyong anak dito bago ilantad ang ideyang pangkulay. Kung naglalaro sila sa maliliit na board, maaari nilang tuklasin ang panuntunan sa kanilang sarili, at palaging mas mahusay iyon.

Ang isang pagmamasid na makakatulong ng malaki sa katanungang ito ay ang paggamit ng pangkulay ng mga parisukat na chessboard. Kung kukuha ka ng 1 ng 2 mga tile at kulayan ang isang parisukat na puti at ang isa pang itim, makikita mo ang isang kagiliw-giliw na bagay na nagaganap. Ang bawat tile ay dapat masakop ang isang parisukat ng bawat kulay. Hindi lamang ang mga tile ng k ay tumatakip sa  $2 \times 2$  square, ngunit takpan nila ang mga puting parisukat at k black square - ang parehong bilang ng mga parisukat ng bawat kulay. Gamit ang ideyang ito, magiging malinaw na kung aalisin mo ang higit pang mga parisukat ng isang kulay kaysa sa iba, imposibleng takpan ang pisara.

Kung nasisiyahan ang iyong anak sa mga katanungang ito, magsimulang mag-branch out sa paggamit ng iba pang mga hugis upang punan ang board. Maglaro sa paligid ng pagpuno nito ng 1 ng 3 mga tile o may 3 mga parisukat sa isang L na hugis. Anong mga pattern at patakaran ang natuklasan mo sa mga ito? Ano ang iba pang mga hugis na maaaring maging kagiliw-giliw upang i-play?

### — Pagpuno ng Mga Kuwadro Sa Mga Kwadro — Panimula —

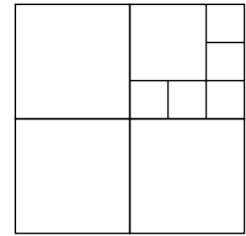
Sa aling mga paraan maaari mong punan ang isang parisukat sa iba pang mga parisukat, kung saan ang iba pang mga parisukat ay hindi kailangang magkakatulad ang laki? Gayunpaman, ang haba ay hindi maaaring maging ganap na mga random na numero - ang haba ng gilid ng bawat parisukat ay dapat na ilang buong bilang ng maramihang ng isang nakapirming haba. Ang katanungan upang siyasatin ay: Ano ang lahat ng mga bilang ng mga parisukat na posible? Gayundin, kung alam mong posible ang isang numero, mayroong isang madaling paraan upang ilarawan kung paano ito gawin?



Hayaang maglaro ang iyong anak sa loob ng maraming araw at huwag magmadali upang masagot ang sagot. Mayroong maraming iba't ibang mga paraan upang magkaroon ng mga ideya para sa pagsisiyasat na ito, kaya't maging kakayahang umangkop at makipagtulungan sa mga ideya ng iyong anak. Narito ang isang diagram na nagpapakita kung paano posible ang 6.

Ang pagkakaroon ng ilang mabilis na mga halimbawa ay palaging isang magandang ideya. Paghiwalay sa malaking parisukat sa mga parisukat ng pantay na sukat bilang isang madaling pagsisimula. Mula doon alam mo na ang mga parisukat na numero (1, 4, 9, 16, 25,...) lahat ay gumagana.

Paggawa ng halimbawa ng 6 na parisukat, maaari nating gamitin ang isang malaking parisukat ng anumang laki at ilagay ang 1 ng 1 mga parisukat sa dalawa sa mga gilid nito. Ang paggawa nito para sa mas malaking malaking mga parisukat (1 ng 1, 2 ng 2, 3 ng 3,...) nakukuha natin ang  $1 + 3 = 4$ ,  $1 + 5 = 6$  (tulad ng nakalarawan),  $1 + 7 = 8$ ,  $1 + 9 = 10$ , at iba pa. Kaya, ang lahat ng kahit na mga numero na nagsisimula sa 4 ay maaaring gawin sa ganitong paraan.



Ang isang makapangyarihang ideya na mabilis na nakabalot dito ay upang makita na maaari tayong kumuha ng isang diagram na gumagana, at palitan ang isa sa mga parisukat nito ng isa pang diagram na gumagana. Kaya halimbawa, kung kukuha ka ng isang simpleng  $2 \times 2$  na nakunan ng 4 na 1 na mga parisukat, at papalitan mo ang isa sa mga 1 na 1 mga parisukat na may 6-square na halimbawa, makukuha mo ang diagram na ipinakita sa kanan ng 9 na mga parisukat.

Dahil ang isang parisukat ay napapalitan ng isang  $n$ -square diagram, ang net na pagbabago sa bilang ng mga parisukat ay upang idagdag ang  $n-1$  sa mga ito. Nangangahulugan ito na maaari kaming kumuha ng isang numero na gumagana, at magdagdag ng mga multiply ng isang mas mababa kaysa dito sa anumang iba pang bilang na gumagana. Sa partikular, maaari kaming magdagdag ng mga maramihang  $4 - 1 = 3$  sa anumang iba pang bilang na gumagana - ang mga madaling idagdag 3 ay ang lahat ng pantay na mga numero na nagsisimula sa 4. Ang

paglalagay ng lahat ng sama-sama ay nagsasabi na ang mga numero 1, 4, 6, 7, 8, 9,... lahat gumagana, at madaling makita ang kahit isang simpleng paraan upang maitayo ang mga ito. Madali ring kumbinsihin ang iyong sarili na imposible ang 2, 3, at 5.

Kung nasisiyahan ang iyong anak sa pagtuklas sa katanungang iyon, galugarin ang mga pagkakaiba-iba sa temang ito. Ipagpalagay na pinapayagan mo lang ang mga parisukat ng ilang mga laki - tulad ng 1 ng 1, 2 ng 2, at 3 ng 3. O marahil ay payagan lamang ang 2 ng 2 at 3 ng 3. Tingnan kung aling mga katanungan ang humantong sa mga kagiliw-giliw na resulta at kung alin ang hindi masyadong kawili-wili.

Ang isa pang direksyon na titingnan ay ang pagpuno sa iba pang mga numero ng mga figure na may parehong hugis. Halimbawa, tanungin ang parehong tanong para sa regular na mga triangles (mga triangles na may lahat ng kanilang panig sa parehong haba). Ang ilang mga figure ay kagiliw-giliw na siyasatin sa ganitong paraan, at ang ilan ay hindi talagang interesante - alin sa mga iyon?

# Kabanata 5 — Game ng Produkto

## — Panimula —

Gumamit ng isang nakabahaging piraso ng papel na lipunan tulad ng sumusunod:

Ang unang manlalaro ay naglilipat ng isang token sa anumang numero mula 1 hanggang 9 sa mga parisukat na 1-9 sa ibabang hilera. Ang pangalawang manlalaro ay naglalagay ng isa pang token sa isa sa mga parisukat na 1-9 sa ibabang hilera at inaangkin ang produkto sa 6 by 6 grid. Mula noon, pipiliin ng bawat manlalaro na ilipat ang isa sa dalawang mga token at i-claim ang produkto (kung kaya nila). Ang unang manlalaro na nag-angkin ng 3 mga parisukat na magkakasunod na nanalo. Paghaluin ang mga numero ng produkto sa 6 by 6 grid upang mabigyan ang iyong anak ng mas mahusay na kasanayan na kilalanin ang mga produkto.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ang mga naglalaro na board na ito ay maaaring gawin kasing laki ng gusto mo, kahit na napakalaki nila nang mabilis. Narito ang ilang mas malaking mga board na may kaukulang mas malaking mga saklaw ng bilang sa ilalim ng mga ito.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Ang mga parisukat na may pulang mga bituin ay "malayang" mga parisukat at maaaring magamit ng magkabilang panig kung kinakailangan.

# Kabanata 5 — Limitadong Mga Calculator

## — Panimula —

Ipagpalagay na mayroon kang isang calculator na nasira nang masama at hinamon kang gumawa ng ilang resulta sa calculator. Maaari kang magkaroon ng iba't ibang mga sitwasyon na maaaring magbigay ng mga kagiliw-giliw na hamon sa isang mabilis na paglalarawan ng palaisipan. Madaling i-play nang pasalita ang aktibidad na ito tuwing mayroon kang ekstrang sandali. Narito ang ilang mga halimbawa upang makapagsimula ka.

Bagaman mayroong ilang mga sandali kung saan nangyayari ang mas malalim na matematika sa mga katanungang ito, karamihan sa mga ito ay mga problema nang buo para sa kasiyahan ng paglalaro sa kanila.

1a) Ipagpalagay na mayroon kang isang calculator na may +, -, x, at /, ngunit isa lamang ang nagtatrabaho key key, and 4. Maaari mo bang makuha ang resulta 21? Kung gayon, ano ang kaunting bilang ng mga hakbang na kakailanganin mo?

Ang  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$  ay isang paraan, ngunit maraming iba pang mga paraan upang magawa ito. Ang isa pa ay  $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$ . Ang layunin ay upang maglaro at masiyahan sa paggalugad.

1b) Ipagpalagay na maaari mong gamitin ang 4 na higit sa apat na beses - aling mga numero ang maaari mong gawin? Ipagpalagay na kailangan mong gamitin ang 4 na eksaktong apat na beses.

Tulad ng pagtaas ng mga mapagkukunan sa matematika ng isang bata, ang problema sa apat na 4 ay isang kasiya-siyang palaisipan. Sa puntong ito, ang mga pagpipilian ng iyong anak ay lubos na limitado, ngunit masaya pa rin itong maglaro. Partikular na mahirap na gawin ang maraming mga numero nang hindi nahahati o gumagamit ng mga decimal. Huwag mag-alala sa pagbuo ng lahat ng mga numero sa pagkakasunud-sunod - makabuo lamang ng maraming iba't ibang mga numero hangga't maaari.

Narito ang ilang mga halimbawa upang makapagsimula ka lamang.

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44/44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44/4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) Maglaro kasama ang pagkakaroon ng iba pang mga solong numero at paglikha ng iba pang mga resulta.



2a) Ipagpalagay na ang iyong calculator ay maaaring magdagdag lamang ng 4 o 7. Aling mga numero ang maaari mong gawin?

Ito ang resulta na nakita natin ng maraming beses sa ngayon. Simula sa  $(4 - 1) \times (7 - 1)$ , maaari mong makamit ang lahat ng mga numero sa pamamagitan ng pagdaragdag ng mga multiply ng 4 at 7.  $18 = 2 \times 7 + 4$ ,  $19 = 3 \times 4 + 7$ ,  $20 = 5 \times 4$ ,  $21 = 3 \times 7$ , at iba pa.

2b) Ipagpalagay na mayroon itong 4 o 7, ngunit maaari itong idagdag at ibawas. Aling mga numero ang maaari mong gawin?

Maaari kang gumawa ng lahat ng mga numero sa ganitong paraan.

2c) Palitan ang 4 at 7 ng iba pang mga pares ng mga numero. Ano ang nangyayari para sa mga pares na ito?

Sa Teoryang Numero, tinatawag itong Tema ng Bezout. Sinasabi ng resulta na sa pamamagitan ng pagsasama ng mga multiply ng dalawang numero maaari kang makagawa ng anumang maramihang mga pinakadakilang karaniwang tagapamahagi ng dalawang numero.

3) Ipagpalagay na mayroon ka lamang isang 1 key at maaari lamang magdagdag o mag-doble. Halimbawa,  $2 \times (2 \times 1) + 1$  ay 5. Ano ang iba pang mga numero na maaari mong likhain?

Ito ay isang katanungan tungkol sa mga binary number na magkaila. Hindi mahalaga para sa iyong anak na napagtanto ito o maunawaan ito, para lamang ito sa paglalaro. Anumang numero ay maaaring nakasulat sa binary, kaya lahat ng mga numero ay maaaring makamit sa pamamagitan ng pagsasama ng pagdoble sa pagdaragdag ng 1. Halimbawa, 21 ay  $16 + 4 + 1$ . Kaya,  $21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0) + 1$ .

# Kabanata 5 — Doble o Wala

## — Panimula —

Sinimulan ng mga manlalaro ang laro sa pamamagitan ng lihim na pagpili ng 5 magkakaibang mga numero na mas malaki sa 20 at hindi mas malaki sa 120. Matapos mapili ang mga ito, nakasulat kung saan lahat ay makakaya makita sila. Paggamit ng Mga Number Card o ibang aparato, isang random na numero mula 1 hanggang 20 ang nilikha. Ang numerong iyon ay paulit-ulit na dinoble hanggang sa ang numero ng alinman ay na-hit sa kauna-unahang pagkakataon o ang bilang ay naging mas malaki kaysa sa 120. Ang unang manlalaro na na-hit ang lahat ng limang numero ay ang nagwagi.

## — Pagsusuri —

Ang tanong ay: Ano ang pinakamahasag na limang mga numero na pipiliin? Narito ang ilang mga ideya na maisip.

Panuntunan: Palaging pumili ng isang numero na isang lakas na 2 beses sa isang numero mula 1 hanggang 20.

Kung pipiliin mo ang isang numero tulad ng 23 o 46, hindi sila kailanman ma-hit at garantisadong mawawala ka.

Panuntunan: Huwag pumili ng isang numero na dalawang beses pang isa pang numero na maaari mong mapili ngunit hindi.

Kung pumili ka ng 44, bakit hindi pumili ng 22 sa halip? Kung pumili ng ibang tao ng 22, mamimiss mo ang isang pag-ikot.

Karagdagang pagtatasa: Ang mga numero mula 1 hanggang 20 ay pantay na malamang na mapili. Gayunpaman, dahil ang 9 ay humahantong sa 18, ang 18 ay dalawang beses na mas malamang sa isang panimulang punto kaysa sabihin na 11 ay. Kung pagsamahin mo ang mga paraan upang makakuha ng iba't ibang pagsisimula, ang mga panimulang punto ay may mga sumusunod na posibilidad:

11 - 1/20 (mula 11)

12 - 3/20 (mula 3, 6, at 12)

13 - 1/20 (mula 13)

14 - 2/20 (mula 7 at 14)

15 - 1/20 (mula 15)

16 - 5/20 (mula 1, 2, 4, 8, at 16)

17 - 1/20 (mula 17)

18 - 2 / 20 (mula 9 at 18)

19 - 1/20 (mula 19)

20 - 3/20 (mula 5, 10, at 20)

Malinaw na ang pinakamahasay na mga bilang na gagamitin ay mag multiply ng 16, 12, at 20. Isang simpleng diskarte ay ang paggamit ng limang mga numero: 32, 64, 24, 48, at 40. Ang mga numerong ito ay hindi laging mananalo, ngunit dapat itong gawin nang mahusay para sa iyo sa paglipas ng panahon.