

Corrigé du TD7 : Révisions et groupes d'homotopie supérieurs

Exercice 1. Réminiscences

1. Cette question est un cas particulier de l'exercice 8 du TD6. Notons D et D' les deux droites en question et X le complémentaire de leur réunion. On distingue plusieurs cas :

Premier cas : les droites D et D' sont confondues, dans ce cas le complémentaire a le même type d'homotopie qu'un cercle par rétraction sur un cylindre d'axe D . Le groupe fondamental est donc égal à \mathbb{Z} .

Deuxième cas : les deux droites D et D' s'intersectent en un unique point O . En prenant la sphère de centre O et de rayon 1, on voit que X a le même type d'homotopie que cette sphère privée de quatre points, elle même ayant le même d'homotopie que la plan privé de trois points et par van Kampen, le groupe fondamental est égal au produit libre de trois copies de \mathbb{Z} .

Troisième cas : les deux droites sont d'intersection vide. Notons P et P' deux points de D et D' tels que la droite D'' qui les joint soit orthogonale à D et D' . Ces deux points sont uniques si D et D' ne sont pas parallèles. Notons K un plan affine qui contient les vecteurs dirigeants de D et D' U, V les ouverts obtenus en faisant le produit de K par deux demi-droites D''_1 et D''_2 qui recouvrent D'' et dont l'intersection est un segment ouvert strictement contenu dans $[P, P']$. Notons enfin \tilde{U} et \tilde{V} leur intersection avec X . C'est un recouvrement ouvert de X et on applique Van Kampen comme dans le corrigé de l'exercice 9 de la feuille 5.

2. Appliquer Van Kampen au recouvrement donné par les complémentaires des deux origines. Ce sont des cercles, et l'intersection est contractile. Donc le groupe fondamental est le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Groupe dihédral et produit de sphères

1. On a les relations $srs = r^{-1}$, i.e. $sr = r^{-1}s$ ou encore $sr^{-1} = rs$ (car $s^2 = e$). On en déduit que tout mot en $r^{\pm 1}, s^{\pm 1}$ est égal dans G à un mot de la forme $r^k s^l$, puis comme $r^{10} = e, s^2 = e$, on peut choisir $0 \leq k \leq 9, 0 \leq l \leq 1$. Ainsi

$$G = \{Id, r, \dots, r^9, s, rs, \dots, r^9 s\}$$

Pour montrer que ces différents éléments sont distincts, on peut les différencier par le déterminant puis observer que les rotations $(r^k)_{0 \leq k \leq 9}$ sont bien différentes.

2. G agit de façon libre (et propre car il est fini) sur X . Par l'exercice 2 du TD4, p est donc un revêtement. Comme l'espace total $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2$ est simplement connexe, l'exercice 2 du TD4 entraîne que $\pi_1(B) = G$.
3. Il s'agit d'expliciter les sous-groupes de G à conjugaison près. Voir https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf page 62, correction de l'exercice 3.31. Pour chaque sous-groupe $H \subseteq G$, le revêtement correspondant est la projection $H \backslash X \rightarrow G \backslash X$.

Exercice 3. Point base des groupes d'homotopie

Voir page 49 de <https://webusers.imj-prg.fr/~ilia.itenberg/enseignement/poly.pdf>. Il reste à vérifier que l'application $\phi_\gamma : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(X, x_1)$ est un morphisme de groupes, où γ est un chemin qui relie x_0 à x_1 . Soient f et g deux applications continues de I^k vers X qui envoient ∂I^k vers x_0 . Soit l'homotopie définie par

$$H : [0, 1] \times I^k \rightarrow X$$

$$(t, x) \mapsto \phi_\gamma(f + 0)((2-t)s_1, s_2, \dots, s_n), \text{ si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$\phi_\gamma(0 + g)((2-t)t_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n) \text{ si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$$

C'est l'homotopie qui correspond au dessin de la page 49 *loc.cit.*.

Exercice 4. Groupes d'homotopie des graphes

Soit $g : (\mathbb{S}^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$.

Première remarque : Par compacité, l'image de \mathbb{S}^n sera incluse dans un nombre fini de sommets et d'arêtes de X . Démontrons ce fait : si on a un nombre infini de sommets dans l'image g , on peut en extraire une sous suite convergente, soit vers un point à l'intérieur d'une arête, soit vers un sommet. Dans les deux cas, on peut trouver un ouvert qui contient la limite et au plus un autre sommet du graphe, ce qui contredit la convergence. Si l'image contient un nombre infini d'arêtes, on peut trouver un sommet x dans l'image de g et une suite infini de points x_n distincts dans des arêtes distinctes reliées à x et qui sont dans l'image de g . Par compacité, la suite converge vers un point y . Il existe au plus un indice n_0 tel que $y = x_{n_0}$. Donc pour $n > n_0$, dans chaque arête correspondant à x_n on peut trouver un ouvert U_n qui contient y , au plus un sommet et pas x_n . L'image des réunion disjointe des ouverts U_n dans le graphe fournit un ouvert autour de y qui ne contient aucun x_n , ce qui contredit la convergence. Donc pour montrer que g est homotopiquement triviale, il suffit de montrer qu'elle l'est quand X est supposé fini.

Nous allons construire un revêtement de X par un arbre. Pour toute arête orientée a de X , on note $d(a)$ (resp. $f(a)$) le sommet d'où a démarre (resp. celui où elle finit). On note a^{-1} la même arête parcourue dans l'autre sens.

Soit \tilde{X} le graphe construit de la manière suivante : son ensemble de sommets est l'ensemble des mots $a_1 \dots a_n$ avec $n \geq 0$, et a_1, \dots, a_n des arêtes orientées de X , tels que

- $d(a_1) = x_0$;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f(a_i) = d(a_{i+1})$;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ (c'est-à-dire que les mots sont réduits).

En particulier, cet ensemble comprend le mot vide ϵ . On place une arête entre les mots $a_1 \dots a_n$ et $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et tous les a_1, \dots, a_{n+1} vérifiant ces propriétés.

Ainsi, les sommets de \tilde{X} correspondent exactement aux chemins dans X qui démarrent en x_0 et qui ne « retournent pas en arrière ». Deux sommets sont reliés si les chemins correspondants diffèrent d'une seule arête. L'espace \tilde{X} obtenu est un graphe connexe sans cycle, c'est donc un arbre.

On définit une application $p : \tilde{X} \rightarrow X$ en envoyant

- le mot vide sur x_0 ;
- le sommet $a_1 \dots a_n$ pour $n \geq 1$ sur $f(a_n)$.
- l'arête orientée allant du sommet $a_1 \dots a_n$ vers le sommet $a_1 \dots a_n a_{n+1}$ sur l'arête orientée a_{n+1} de X .

C'est un revêtement : l'existence d'un voisinage trivialisant pour un point à l'intérieur d'une arête est claire par définition. Soit maintenant un sommet $s \in X$, et soit $(b_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les arêtes orientées partant de s . Soit U un petit voisinage contractile de s tel que s soit le seul sommet de X contenu dans U . Nous allons montrer que U est un voisinage trivialisant de s pour p .

Soit $x = a_1 \dots a_n$ un mot non vide tel que $f(a_n) = s$. Ainsi, il existe $j \in I$ tel que $a_n = b_j^{-1}$. Alors par définition, les arêtes orientées partant de x dans \tilde{X} sont :

- celles allant vers $a_1 \dots a_n b_i$ pour tout $i \neq j$.
- celle allant vers le mot $a_1 \dots a_{n-1}$.

On a donc une bijection entre l'ensemble des arêtes orientées partant de s et celui des arêtes partant de x (le cas du mot vide se traite de manière similaire) : ainsi, la composante de $p^{-1}(U)$ contenant s est bien homéomorphe à U .

Par le théorème du relèvement, g se relève en une application continue $\tilde{g} : \mathbb{S}^n \rightarrow \tilde{X}$. Par compacité, l'image de \tilde{g} est incluse dans un sous-arbre fini de \tilde{X} , or un arbre fini est contractile. Ainsi, \tilde{g} est homotopiquement triviale, et donc f l'est aussi.

Remarque En fait n'importe quel arbre, même infini, est contractile. En effet, si A est un arbre et $x \in x_0$ un point fixé on peut construire une homotopie entre l'identité de A et l'application constante égale à x_0 de la manière suivante : pour chaque sommet v de A , on fixe un chemin $\gamma_v : I \rightarrow A$ tel que $\gamma_v(0) = v$ et $\gamma_v(1) = x_0$. Pour toute arête a de A , d'extrémités v_1 et v_2 , on définit une application F sur le bord du carré $a \times I$ par

$$F|_{a \times \{0\}} = \text{Id}_a$$

$$F|_{v_i \times I} = \gamma_{v_i}$$

$$F|_{a \times \{1\}} = x_0$$

On utilise alors le lemme suivant pour prolonger F à tout le carré $a \times I$ (en considérant le carré comme homéomorphe au disque \bar{D}^2) pour toute arête a , et ainsi en une homotopie $F : A \times I \rightarrow A$ entre Id_A et x_0 .

Lemme Soit X un espace topologique et $f : S^n \rightarrow X$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) f est homotope à une application constante.
- (b) f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : \bar{D}^{n+1} \rightarrow X$.

Montrons (a) \Rightarrow (b) (nous n'avons besoin que de ce sens-là). Soit F une homotopie entre f et l'application constante égale à $x_0 \in X$. On pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2(1 - \|x\|)\right) & \text{pour } \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{pour } \|x\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 5. Bouquet de deux plans projectifs

1. La première remarque est que si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces topologiques pointés connexes par arcs tels que x_0 et y_0 admettent des voisinages ouverts contractiles U et V dans X et Y respectivement, alors par Van Kampen $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, en prenant le recouvrement $X \vee V$ et $U \vee Y$. Le groupe fondamental en question vaut donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Pour simplifier l'exposition, on colorie un des deux plans projectifs en rouge, et l'autre en bleu. Soient a et b les deux générateurs du groupe fondamental, a celui correspondant au plan projectif rouge, et b celui correspondant au plan projectif bleu.

Puisque a et b sont d'ordre 2, on a $(ab)^{-1} = ba$. On note $c = ab$. Ainsi, tout mot réduit de longueur paire en a et b est de la forme c^n pour $n \in \mathbb{Z}$. Quant aux mots de longueur impaire, ils sont de la forme $c^n a c^{-n}$ ou $c^{-n} b c^n$ ou $c^n (aba) c^{-n}$ ou $c^{-n} (bab) c^n$ pour $n \geq 0$. Mieux : puisque $aba = abc^{-1}$ et $bab = c^{-1}ac$, tout mot impair est en fait de la forme $c^n a c^{-n}$ ou $c^n b c^{-n}$.

Soit H un sous-groupe de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous avons plusieurs cas à distinguer :

- (a) H est trivial
- (b) H est contenu dans le sous-groupe $\langle c \rangle$ engendré par c . Ainsi, il est engendré par c^m pour un certain $m \geq 1$, et est donc d'indice $2m$ dans G .
- (c) $H \cap \langle c \rangle = \{1\}$. Alors H contient un unique mot de longueur impaire, et est d'ordre 2. Quitte à remplacer H par un sous-groupe conjugué, on peut supposer que ce mot est a ou b .
- (d) H n'est pas contenu dans $\langle c \rangle$, et l'intersection $H \cap \langle c \rangle$ est non-triviale. Ainsi, H contient un certain c^m , et quitte à conjuguer par une puissance de c , on peut supposer que H contient a ou b . Si $m = 2k + 1$ est impair, on remarque que $ac^m = b(ab)^{2k} = (ab)^{-k}b(ab)^k$, et donc les sous-groupes $\langle a, c^m \rangle$ et $\langle b, c^m \rangle$ sont conjugués. En revanche, si m est pair, leurs classes de conjugaison sont distinctes (cf. les revêtements distincts obtenus plus bas).

Les revêtement correspondant à ces classes de conjugaison de sous-groupes sont :

- (a) On considère l'espace topologique obtenu comme union d'une sphère de centre $(k, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si on colorie toutes les sphères « paires » en rouge et les sphères « impaires » en bleu, on obtient un revêtement en envoyant les sphères bleues sur la partie bleue de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et les sphères rouges sur la partie rouge. Cet espace est bien le revêtement universel car il est simplement connexe, comme on peut le voir par exemple en appliquant Van Kampen. Notons que tout élément de G induit un automorphisme de ce revêtement : l'élément a envoie la sphère k sur la sphère $-k$ par l'application antipodale, et l'élément b envoie la sphère $1 + k$ sur la sphère $1 - k$ par l'application antipodale. Par conséquent, l'élément ab agit comme la translation qui envoie la sphère k sur la sphère $k + 2$ (par l'application identité).
- (b) Le revêtement correspondant doit être de degré $2m$. On l'obtient en identifiant dans le revêtement précédent la sphère correspondant à l'entier k avec celle correspondant à l'entier $k + 2m$, pour tout m , de sorte à obtenir un « collier » de $2m$ sphères, les paires étant bleues et les impaires étant rouges.

- (c) Si $H = \langle a \rangle$, alors le revêtement est obtenu en quotientant le revêtement universel par la réflexion par rapport au plan $x = 0$: on obtient une demi-droite de sphères, avec un plan projectif rouge au bout. De même, si $H = \langle b \rangle$, on obtient une demi-droite de sphères avec un plan projectif bleu au bout.
- (d) Si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m pair, le revêtement est obtenu en identifiant dans celui de (b) la sphère k avec la sphère $2m - k$ par l'application antipodale : on le voit comme une chaîne de $m - 1$ sphères, avec un plan projectif rouge à chaque extrémité. De même, si $H = \langle b, c^m \rangle$ avec m pair, on l'obtient en identifiant la sphère $1 + k$ avec la sphère $2m + 1 - k$ (modulo $2m$) par l'application antipodale : c'est une chaîne de $m - 1$ sphères avec un plan projectif bleu à chaque extrémité. Enfin, si $H = \langle a, c^m \rangle$ avec m impair, ce sera une chaîne de $m - 1$ sphères avec un plan projectif rouge à une extrémité, et un plan projectif bleu à l'autre.

Exercice 6. Espace lenticulaire

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit librement sur \mathbb{S}^3 . En effet, soit $\zeta \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ tel que $\zeta.(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$. Si $z_1 \neq 0$, alors on a directement que $\zeta = 1$. Si $z_1 = 0$ alors, $z_2 \neq 0$, donc $\zeta^n = 1$. Comme $m \wedge n = 1$, on peut trouver $k \geq 1$ tel que $(\zeta^n)^k = \zeta$ et on en déduit $\zeta = 1$.

Remarquons que l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est évidemment propre car $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un groupe fini.

Ainsi, d'après l'exercice 2 du TD4, la projection p est un revêtement, et la sphère de dimension 3 étant simplement connexe, on a $\pi_1(B) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Sphéroïdes

Remarquer que le quotient de I^k où $I = [0, 1]$, par son bord est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^k , par exemple via l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : I^k &\rightarrow \mathbb{S}^k \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto \left(\frac{\sin(\pi \|t\|_\infty)}{\|t\|} t, \cos(\pi \|t\|_\infty) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, toute application $\sigma : I^k \rightarrow X$ qui envoie ∂I^k sur x_0 se factorise à travers une application continue pointée $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^k \rightarrow X$. Soient $\phi_i : (\mathbb{S}^k, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ deux applications pointées et E un équateur passant par s_0 qui sépare la sphère en deux parties A_1 et A_2 . L'opération de groupe se décrit par la composition

$$\mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k \xrightarrow{\phi_1 \vee \phi_2} X,$$

où la première flèche est la contraction de l'équateur. Or, on peut construire une homotopie

$$H : \mathbb{S}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^k.$$

qui préserve le point base s_0 et fait tourner l'équateur E . On définit alors l'application suivante $\psi(x, t) = \phi_1(x)$ si $x \in H(., t)(A_1)$, et $\psi(x, t) = \phi_2(x)$ si $x \in H(., t)(A_2)$. C'est une homotopie entre $\phi_1 * \phi_2$ et $\phi_2 * \phi_1$